

**UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PARMA
DOTTORATO DI RICERCA IN PSICOLOGIA
CICLO XXV**

**PRESENTAZIONE DEL *CURRICULUM TICE* PER LA
RISOLUZIONE DEI PROBLEMI ARITMETICI
E VALUTAZIONE DELL'EFFICACIA**

Coordinatore:

Chiar.ma Prof.ssa TIZIANA MANCINI

Tutor:

Chiar.ma Prof.ssa FRANCESCA CAVALLINI

Dottoranda: MARTINA NANI

INDICE

Introduzione

Cap. 1: Teorie e tecniche cognitivo-comportamentali per la risoluzione di problemi aritmetici

- 1.1 Di quali tipi di problemi ci occuperemo?
- 1.2 Alcune definizioni di problem solving nelle teorie classiche
- 1.3 Abilità cognitive coinvolte nel problem solving: alcuni modelli
- 1.4 Aspetti metacognitivi nella risoluzione dei problemi
- 1.5 L'approccio comportamentale
- 1.6 Il ruolo del comportamento verbale
- 1.7 TAPS: Talk Aloud Problem Solving
- 1.8 Il *Curriculum Tice* per la risoluzione dei problemi aritmetici

Cap. 2: La ricerca

- 2.1 Studio 1: il *Curriculum Tice* applicato durante sedute di potenziamento e riabilitazione individuali
- 2.2 Studio 2: Il *Curriculum Tice* utilizzato in un piccolo gruppo all'interno di una classe scolastica
- 2.3 Conclusioni e prospettive future

Appendice

Curriculum Tice per la risoluzione dei problemi aritmetici, Copione per l'insegnante dei 5 livelli, primi esempi.

Bibliografia

INTRODUZIONE

Analizzando i programmi didattici delle scuole, già dalle prime classi della primaria, è possibile notare come sia importante per i bambini acquisire le competenze necessarie per risolvere i problemi. Il problem solving è capace di offrire agli studenti abilità trasversali importanti non solo per il successo accademico ma anche (e soprattutto) per la risoluzione di problemi nella vita quotidiana: il processo di problem solving richiede agli studenti di interpretare informazioni da una grande varietà di stimoli (narrativi, espositivi e visivi) che potrebbero riprodursi in situazioni di vita reale. Risolvere problemi richiede agli studenti di descrivere, spiegare, predire, manipolare e condividere idee (Lesh e Doerr, 2003) rendendo i bambini protagonisti di un processo di risoluzione attraverso il quale possono imparare importanti abilità di base che producono capacità di ordine superiore che possono essere riutilizzate in situazioni simili che si presenteranno in futuro.

Ma risolvere i problemi sembra essere tutt'altro che facile: varie ricerche infatti hanno sottolineato come le difficoltà nella risoluzione dei problemi siano frequenti e comuni sia nei bambini con disturbo specifico dell'apprendimento (Temple, 1991; Semenza, Miceli e Girelli, 1997; Geary, 2004) sia nei bambini a sviluppo tipico (Passolunghi e Cornoldi, 2007).

Lo scopo che guida questa ricerca è quello di studiare e analizzare tecnologie educative efficaci per la strutturazione di percorsi educativi mirati all'acquisizione delle abilità per la risoluzione dei problemi. La presente ricerca indaga gli approcci cognitivo-comportamentali all'analisi e al potenziamento dell'abilità di risoluzione dei problemi aritmetici. La scelta di concentrare le analisi e limitare lo studio alle pubblicazioni legate a questo approccio nasce proprio dall'intento educativo del mio lavoro di ricerca: infatti la letteratura sul potenziamento della risoluzione dei problemi aritmetici è principalmente di stampo cognitivo-comportamentale e propone da un lato la comprensione dei processi cognitivi sottostanti alla risoluzione dei problemi e dall'altro interventi capaci di insegnare nuove strategie con l'obiettivo di ottenere un forte impatto educativo e applicativo. La nostra necessità primaria era quella di rispondere ad un bisogno dei bambini di potenziare le abilità di soluzione dei problemi, quindi tutto il percorso di ricerca ha avuto come principale obiettivo quello di trovare il metodo più efficace ed efficiente da mettere a immediata disposizione dei nostri studenti.

Molte delle ricerche che ho approfondito (Robbins, 1996; Passolunghi, 2003; Bellorini, Cornoldi e Passolunghi, 2006; Passolunghi, 2006) si concentrano proprio sulle abilità

necessarie per acquisire ed insegnare il problem solving e rappresenteranno una base importante per la costruzione di un piano di intervento efficace.

Dopo aver analizzato la bibliografia di riferimento, ci occuperemo di descrivere il *Curriculum Tice* per la risoluzione di problemi aritmetici: questo nuovo materiale, costruito proprio durante il mio percorso di ricerca in collaborazione con la Morningside Academy di Seattle (WA, USA), si propone come un efficace ed agevole strumento per l' insegnamento, il recupero e il potenziamento dell'abilità di risolvere i problemi.

Il *Curriculum Tice* è stato sperimentato in una prima fase all'interno di un Centro di Apprendimento in un contesto di intervento uno ad uno e successivamente applicato in una classe 3° primaria in piccolo gruppo.

CAPITOLO 1: TEORIE E TECNICHE COGNITIVE COMPORTAMENTALI PER LA RISOLUZIONE DEI PROBLEMI ARITMETICI

1.1. Di quali tipi di problemi ci occuperemo?

Molti autori si sono occupati della definizione dei diversi tipi di problemi. Ad esempio Fuchs e Fuchs (2002) hanno distinto i problemi aritmetici semplici (arithmetic story problem), i problemi aritmetici complessi (complex story problem) e i problemi del mondo reale (real-world problem). Tale classificazione si delinea lungo un continuum: al primo livello di difficoltà troviamo i problemi aritmetici semplici, che presentano un testo breve ed essenziale con una domanda e la richiesta di una sola operazione per ottenere la soluzione (Jordan e Hanich, 2000; Hanich, Jordano, Kaplan e Dick, 2001). Ad un livello intermedio sono posti i problemi aritmetici complessi che hanno un testo più lungo, ma ancora relativamente breve, che contiene delle domande e dei dettagli non essenziali ma nessun dato numerico irrilevante e per la risoluzione sono necessarie da una a tre operazioni. Al livello più complesso c'è il problem solving della vita reale che presenta un testo più esteso con dettagli non essenziali e con elementi numerici irrilevanti e che può richiedere da una a tre operazioni. La comprensione di problemi così complessi aumenta se lo studente incontra difficoltà nel riconoscere un problema nuovo come appartenente a un problema di tipo familiare per il quale è noto un metodo risolutivo.

Noi ci concentreremo sui problemi tipicamente proposti a scuola, caratterizzati da prove in cui la situazione problematica viene proposta verbalmente per iscritto e la soluzione dei quesiti viene ottenuta attraverso una serie di operazioni aritmetiche; queste tipologie di problemi vengono definiti arithmetic word problem (problemi aritmetici di tipo verbale). Sono problemi di tipo routinario, ossia situazioni simili già incontrate in precedenza, seppure con una diversa formulazione linguistica che richiedono un simile schema risolutivo. La scelta di limitare l'indagine su questo tipo di problemi è dettata dall'obiettivo di studiare strategie ed interventi educativi spendibili nella prassi scolastica per migliorare la performance degli studenti nel problem solving aritmetico.

1.2 Alcune definizioni di problem solving nelle teorie classiche

«Risolvere problemi significa trovare una strada per uscire da una difficoltà, una strada per aggirare un ostacolo, per raggiungere uno scopo che non sia immediatamente raggiungibile» (Polya, 1957).

Il problem solving in ambito matematico è stato di centrale importanza fin dai lavori di Polya negli anni '40 (1945); moltissime definizioni sono state date da allora del problem solving (Berlyne 1978; Antonietti e Angelini, 2002) ma questo concetto ha sempre mantenuto complessità nella definizione (Doyle, 2005) e variabilità all'interno dei diversi approcci teorici. Molti autori hanno definito la situazione problematica come una situazione in cui il risolutore non riesce immediatamente ad arrivare ad una soluzione: Mowrer (1947) ritiene che il problema sia caratterizzato dalla presenza di una forte pulsione e dalla mancanza di una risposta immediatamente disponibile capace di ridurre tale pulsione; secondo Johnson (1955) un problema sorge nel caso in cui un individuo fosse motivato al conseguimento di una meta e il suo primo tentativo di raggiungerla fosse senza successo o quando la prima risposta diretta verso la meta non venisse ricompensata; anche per Duncker (1969) il problema è una situazione in cui “un essere vivente ha un obiettivo da raggiungere e non sa come raggiungerlo”. Una concezione simile è proposta da Kanizsa (1973) secondo il quale “un problema sorge quando un individuo, motivato a raggiungere una meta, non può farlo in forma automatica o meccanica, cioè mediante un'attività istintiva o un comportamento appreso”; il problema può essere una situazione nella quale il risultato non può essere raggiunto immediatamente (Radford e Burton, 1974). Newell e Simon (1972) affermano che ci troviamo in una situazione problematica quando una persona vuole raggiungere una meta ma non sa subito quale serie di azioni deve compiere per raggiungere l'obiettivo; si può anche affermare che un problema si presenta ogni volta che il raggiungimento dell'obiettivo è bloccato per qualsiasi ragione (Kahney, 1993). Mayer, infine, (1998) definisce problema una situazione nella quale si registra una variabilità interindividuale circa gli schemi di azione messi in atto dai partecipanti che impedirebbe di prevedere il comportamento degli individui posti in quelle situazioni. Un altro importante autore che si è occupato della definizione di problem solving all'interno di una più ampia concettualizzazione teorica è stato Vygotskij che si riferisce esplicitamente a situazioni di problem solving all'interno della sua teoria dello sviluppo del bambino (D'Amore, Fandiño Pinilla e Marazzani, 2004): la zona di sviluppo prossimale viene definita come “la distanza tra il livello di sviluppo così com'è determinato dal problem solving autonomo e il livello di sviluppo potenziale così com'è determinato

attraverso il problem solving sotto la guida di un adulto o in collaborazione con i propri pari più capaci” (Vygotskij, 1987). Possiamo chiaramente evincere che secondo Vygotskij (1987) il problem solving genera apprendimento: infatti grazie all’ attività di problem solving l’allievo può superare significativamente il livello di sviluppo effettivo per addentrarsi nella zona di sviluppo prossimale per innalzare il proprio livello di sviluppo.

1.3. Abilità cognitive coinvolte nel problem solving: alcuni modelli

Proseguiamo ora con l’analisi delle ricerche più attuali afferenti alla teoria cognitiva, che si è occupata prevalentemente di identificare i processi cognitivi alla base della soluzione dei problemi e le caratteristiche che identificano un buon problem solver. La teoria cognitiva è strettamente legata a quella dell’HIP (Human Information Processing) dal punto di vista epistemologico e di seguito presentiamo alcuni studi che coinvolgono il nostro oggetto di interesse, la risoluzione di problemi aritmetici.

Uno dei principali autori che ha approfondito la classificazione dei processi cognitivi implicati durante la soluzione dei problemi aritmetici di tipo verbale è Mayer (Mayer, 1983; 1987; 1998; Mayer, Larkin e Kadane, 1984). Il suo modello propone una serie di fasi necessarie per la soluzione del problema: il processo di soluzione ha inizio con la codifica del problema che a sua volta è suddivisa nei processi di :

1. traduzione: ogni affermazione del testo viene trasformata in una rappresentazione semantica in memoria e inizia così la costruzione della rappresentazione interna del problema. Questa fase richiede al solutore di comprendere il significato di ogni espressione del problema e inferire le implicazioni di una determinata espressione.
2. integrazione: il solutore cerca di unire in una rappresentazione coerente tutte le varie fasi del testo. In questa fase è fondamentale il ruolo attribuito al processo di categorizzazione, ossia l’individuazione della categoria generale alla quale il problema può appartenere (Hinsley, Hayes e Simon, 1977; Passolunghi, Lonciari e Cornoldi, 1996; Passolunghi, 1999). Il riconoscimento di un modello familiare di risoluzione facilita gli studenti nell’accesso rapido alle procedure risolutive; infatti chi è esperto ha a disposizione l’intera struttura del problema che permette di raggiungere la soluzione in modo più veloce (Berger e Wilde, 1987; Larkin, McDermott, Simon e Simon, 1980).

Successivamente troviamo il processo di ricerca della soluzione, costituito anch'esso da due fasi di elaborazione dell'informazione:

3. pianificazione: il solutore deve cercare in memoria la strada per la soluzione; è implicata la conoscenza strategica per costruire e monitorare il piano di soluzione, riconoscendo quali operatori applicare al momento più opportuno (Mayer, 1987). Il buon solutore deve saper scomporre il problema in sotto-obiettivi senza mai dimenticare però la meta finale da raggiungere.
4. calcolo: il solutore identifica quali sono le operazioni da utilizzare per ottenere i differenti sotto-obiettivi; per eseguire le operazioni è necessaria la conoscenza degli algoritmi di calcolo.

Come si può rilevare dall'analisi del precedente modello, la risoluzione dei problemi prevede sia una conoscenza concettuale sulle operazioni aritmetiche sia una conoscenza delle procedure per risolverle, ma da sole questa abilità non sono sufficienti per sviluppare capacità nella risoluzione dei problemi. Alcuni studi (Lurija e Tsetkova, 1967; Bull, Johnston e Roy, 1999; Bull e Sherif, 2001) confermano l'importanza di valutare il ruolo delle funzioni esecutive per l'esame di soggetti con difficoltà nella risoluzione dei problemi. Infatti, se esaminiamo un problema di tipo verbale, ci accorgiamo di quanto sia importante il ruolo della memoria di lavoro per il mantenimento ed il processamento delle informazioni in modo efficiente nella comprensione del problema (Le Blanc & Weber-Russell, 1996; Passolunghi, Cornoldi e Diliberto, 1999; Swanson e Sachse-Lee, 2001; Bellorini et al. 2006; Passolunghi, 2006b). Molte ricerche hanno proseguito gli studi per identificare quali sono le competenze che distinguono buoni e cattivi solutori: il gruppo di ricerca di Passolunghi (Passolunghi, Cornoldi e De Liberto, 1999) ha evidenziato come i cattivi solutori utilizzino il ricordo del testo del problema in modo meno efficiente dei buoni solutori perché non riescono a filtrare le informazioni irrilevanti. Infatti i cattivi solutori hanno un minor ricordo delle informazioni rilevanti e uno più elevato di informazioni irrilevanti che comporta un sovraccarico delle informazioni contenute in memoria e un uso inefficiente delle risorse disponibili. È inoltre stato dimostrato che, anche con la presenza del testo scritto del problema, quelli risolti in modo corretto sono quei problemi di cui si ha avuto un ricordo migliore (Passolunghi e Cornoldi, 2000; Passolunghi, 2006b;). L' inibizione delle informazioni irrilevanti dipende, secondo questi autori, dalla capacità di updating (aggiornamento), che richiede di attribuire diversi livelli di attivazione delle diverse unità di informazione che via via vengono

presentate, per poter mantenere attivo solo un ristretto numero di elementi grazie all'attivazione/inibizione delle informazioni (Passolunghi e Pazzaglia, 2004; 2005).

Un ulteriore elemento che rende efficace un problem solver di fronte a problemi aritmetici di tipo verbale è la competenza nella comprensione del problema proposto (LeBlanc e Weber-Russell, 1996; Lucangeli, Tressoldi e Cendron, 1998; Passolunghi, Cornoldi e De Liberto, 1999; Helwig, Almond, Rozek-Tedesco, Tindal e Heath, 1999; Mayer 2004; Littlefield e Rieser, 2005). Gli studenti con carenze nella abilità precedentemente descritte possono risolvere in modo adeguato problemi che non richiedono una comprensione del testo scritto, come ad esempio i problemi numerici o spaziali. La maggior parte dei problemi presentati a scuola sono di tipo verbale e richiedono allo studente di discriminare le informazioni rilevanti da quelle irrilevanti.

1.4 Aspetti metacognitivi nella risoluzione dei problemi

Particolare interesse hanno suscitato nella mia rassegna bibliografica gli studi che, oltre ai processi cognitivi precedentemente descritti, hanno descritto il ruolo delle abilità sovraordinate di tipo metacognitivo sulla prestazione; alcune strategie efficaci utilizzate per implementare le strategie dei bambini puntano quindi allo sviluppo dell'efficienza del pensiero e della metacognizione. È stata infatti rilevata una correlazione tra la conoscenza metacognitiva e la capacità di affrontare la matematica (Lucangeli, Cornoldi e Tessari, 1991; Passolunghi e Cornoldi, 2007; Lucangeli, Caccio, Salerno e Cornoldi, 1997; Passolunghi, 2003).

Uno dei primi ricercatori cognitivisti a parlare di “approccio strategico” alla soluzione dei problemi è stato Polya (1957), che ha delineato alcune fasi attraverso le quali il solutore deve passare per giungere alla soluzione: la comprensione del problema, la costruzione di un piano, l'esecuzione della risoluzione e il controllo del processo. Nonostante queste prime ricerche sui processi strategici del problem solving, dobbiamo attendere fino al 1976 per una definizione di metacognizione: Flavell (1976) la definisce come “la conoscenza dei processi cognitivi e dei loro prodotti e il monitoraggio di questi processi in relazione ai compiti cognitivi rivolti verso un obiettivo”. Oggi la metacognizione è definita come un costrutto multidimensionale (Boekaerts, 1999) che permette a chi apprende di adattarsi ai vari compiti richiesti e ai differenti contesti (Allen e Armour Thomas, 1992; Montague, 1998). Le capacità metacognitive includono le riflessioni sulla mente e il controllo che la mente esercita su se

stessa e permettono di analizzare il compito, di scegliere le strategie più adatte per risolverlo e utilizzare in modo efficiente le risorse cognitive.

La conoscenza metacognitiva riguarda la conoscenza e la profonda comprensione dei processi cognitivi e dei suoi prodotti (Flavell 1976) ed è possibile descriverne tre aspetti diversi:

- conoscenza metacognitiva dichiarativa: conoscenza proposizionale gli elementi di base del pensiero umano (attenzione, memoria, ...)
- conoscenza procedurale: conoscenza dei metodi per raggiungere gli obiettivi ; è l'applicazione della conoscenza dichiarativa per risolvere situazioni problematiche
- conoscenza strategica: seleziona tra le diverse strategie quelle più utili per un determinato compito .

Pochi anni dopo, Brown (1978) ha descritto alcuni processi metacognitivi di controllo implicati nella risoluzione dei problemi, risultati che altri autori hanno trovato correlare con il successo in matematica (Lucangeli e Cornoldi, 1997):

1. previsione: è l'abilità di immaginare gli atti cognitivi per stimare, oltre al proprio livello di prestazione, anche la difficoltà della prova o di prevedere il risultato dell'applicazione di una certa strategia
2. pianificazione: è la capacità di organizzare le azioni in sequenza (temporale, causale o gerarchica)
3. monitoraggio: riguarda il controllo del soggetto su un'attività cognitiva già intrapresa
4. valutazione: controlla infine sia le strategie intraprese sia la prestazione stessa.

I gruppi di ricerca italiani (Lucangeli e Cornoldi, 1997; Lucangeli, Cornoldi e Tellarini, 1998) distinguono le credenze metacognitive dalla conoscenza metacognitiva; altri hanno definito le credenze come una variabile non cognitiva ma motivazionale (Garcia e Pintrich, 1994; Vermunt, 1996; Masui e De Corte 1999); secondo Simons (1996) le credenze "meta" sono idee generali che le persone hanno circa il funzionamento della propria e altrui cognizione e le definisce come uno degli elementi della metacognizione.

Le ricerche in questo ambito dimostrano in modo significativo come le capacità metacognitive correlino con il successo nella risoluzione dei problemi; lo studente "metacognitivo" possiede le strategie necessarie per comprendere il problema, pianificare ed eseguire il piano di soluzione, controllare i processi che sta mettendo in atto ed eventualmente correggere i propri errori. Nonostante il vasto numero di programmi educativi basati su tale approccio, vorrei proporre un'integrazione tra il modello metacognitivo e quello comportamentale per coniugare la conoscenza dei processi che guidano la risoluzione di un

problema e la scientificità di un intervento comportamentale che abbia come obiettivo la misurazione delle variabili, l'operazionalizzazione dei comportamenti da osservare e la gestione delle contingenze di rinforzo del comportamento verbale adeguato.

1.5 L'approccio comportamentale

Molti autori hanno spesso correlato le abilità di problem solving con altre competenze, come l'apprendimento, il pensiero e la creatività (Skinner 1968; Radford e Burton, 1974; Holt, 2008). A differenza di altri approcci, gli psicologi comportamentisti ci offrono una definizione di problem solving in termini operazionali, basati sulla relazione tra antecedente, comportamento e conseguenza.

Skinner (1966; 1969), all'interno della sua analisi del problem solving, propone una definizione a due livelli:

1. una situazione per la quale una risposta non è mai stata rinforzata prima
2. un processo di soluzione, cioè quel comportamento che porta al cambiamento che è il problem solving e la sua risposta che è la soluzione.

In modo simile numerose definizioni di questo processo lo definiscono “una sequenza comportamentale, all'interno di una situazione in cui i parametri sono definiti, che conduce ad un risultato”; un problema è una situazione stimolo per la quale un organismo non ha una risposta pronta (Davis, 1973). Il problem solving è definibile come una nuova sequenza di risposte precedentemente imparate (Epstein, 1985; 1987) o una nuova combinazione di risposte precedentemente apprese (Johnson e Layng, 1992; 1994). Come ha esposto Catania (1992) durante lo svolgimento di problemi aritmetici le produzioni intermedie fungono da stimoli discriminativi che possono occasionare la soluzione. Tali definizioni, in linea con le basi teoriche ed epistemologiche della teoria comportamentista, evidenziano come anche il processo di risoluzione dei problemi sia empiricamente osservabile.

Gli studi afferenti alla teoria del comportamento si sono occupate di identificare proprio quelle sequenze comportamentali necessarie per avere successo nella risoluzione dei problemi. Le analisi suggeriscono che i fattori comunemente associati alla bassa performance nella risoluzione di problemi aritmetici sono le difficoltà nella discriminazione della corretta operazione, l'ordine delle operazioni, la gestione delle informazioni irrilevanti e la velocità ad eseguire i calcoli (Zentall e Ferkis, 1993). Le competenze fondamentali per la buona riuscita in matematica riguardano la fluenza nelle abilità di base (contare, riconoscimento dei numeri,

corrispondenza parola-numero, concetto di quantità) e nei fatti aritmetici; oltre alle abilità di base come conoscenza numerica e calcolo, altri studiosi hanno messo in evidenza il ruolo dell'identificazione dell'operazione, dello svolgimento dell'operazione e dell'identificazione dell'ordine di grandezza dei numeri (Levingston, Neef e Cihon, 2009).

Se è vero che il padroneggiamento degli elementi di base (*component*) è una variabile importante per risolvere i problemi, sembra che questi aspetti siano necessari ma non sufficienti (Lin, Podell, e Tournaki-Reid, 1994; Harper, Mallette, Maheady, Bentley e Moore, 1995; Whalen, Schuster, e Hemmeter, 1996). Questo rende ancora più difficile l'identificazione delle variabili importanti per il problem solving.

Gli interventi comportamentali solitamente si basano sull'insegnamento ed il consolidamento dei diversi *component* del problem solving, fino al raggiungimento del criterio per ognuno (Saxon, 1982; Klingele e Reed, 1984; Gleason, Carnine e Valia, 1991; Carnine, 1997; Carnine, Jones e Dixon, 1994; Mayfield e Chase, 2002). Non viene fornita una esplicita istruzione per tutte le possibili e nuove risposte ma l'istruzione delle precedenti situazioni è sufficiente per produrre la soluzione nel nuovo contesto. Il processo di ricerca della soluzione è stato studiato in diverse ricerche e definito in diversi modi, come generalizzazione (Streifel, Bryan, e Aikins, 1974; Goldstein e Mousetis, 1989; Melchiori, de Souza, e de Rose, 2000; Mueller, Olmi e Saunders, 2000), contingency adduction (Johnson e Layng, 1992; 1994; Binder, 1996; Andronis, Layng e Goldiamond, 1997) e produttività (Catania, 1980; Catania e Cerutti, 1986).

La strada che abbiamo scelto di percorrere, sulla base degli studi analizzati, è sicuramente quella di rendere osservabile, misurabile e operazionalizzabile il processo di risoluzione del problema e di misurare il comportamento verbale del risolutore per rinforzarne in modo differenziale l'adeguatezza.

1.6. Il ruolo del comportamento verbale

La risoluzione dei problemi coinvolge fondamentalmente abilità di pensiero e di ragionamento "interne": la strada che la scienza del comportamento ha percorso per indagare gli eventi privati (i comportamenti *covert*) è da sempre stata quella di osservare e misurare il comportamento verbale, capace di rendere *overt* le variabili cognitive (Skinner, 1969).

Anche nel problem solving emerge che un elemento di fondamentale importanza per l'insegnamento delle competenze è quello di produrre stimoli verbali che guidino il solutore

attraverso la sequenza del problema, grazie all'uso del pensare parlando ad alta voce durante il processo di ragionamento.

Berk (1994) ha studiato il parlare privato dei bambini in contesti naturali, e afferma che il parlare privato serve a direzionare le azioni del bambino, fungendo da auto-guida (che si configura quindi come funzione fondamentale del parlare privato). Il parlare infatti è un elemento universalmente disponibile per i bambini che crescono in un ambiente sociale ricco e interattivo; l'intervento migliore consiste non solo nel ritenere il parlare privato come un compito da allenare ma soprattutto nel creare le condizioni che aiutino il bambino a usare il parlare privato in modo efficace.

Se pensiamo alla nostra esperienza, parliamo a noi stessi in molte occasioni, ad esempio quando una risposta che si può ascoltare incrementa il concatenarsi del comportamento intraverbale (Skinner, 1957) e ci aiuta ad arrivare alla soluzione; spesso quando dobbiamo risolvere un problema difficile di qualsiasi tipo usiamo risposte aperte vocali o scritte. Skinner (1969) sostiene che le costruzioni verbali diventano di pubblica proprietà, mentre i fatti privati non lo possono diventare: per questo è così importante trasformare un comportamento *covert* (non osservabile, come il pensiero) in un comportamento *overt* (osservabile, come il parlare ad alta voce).

Queste istruzioni verbali overt, nella situazione di problem solving in cui il soggetto che parla è anche il proprio ascoltatore, possono essere considerate fonti di rinforzo automatiche nelle quali il parlante genera stimoli per incrementare altri comportamenti già presenti nel suo repertorio.

Le più attuali ricerche nell'ambito del *verbal behavior* sostengono che per essere un soggetto verbale competente lo *speaker* deve anche essere contemporaneamente *listener* (Home e Lowe, 1996; Barnes-Holmes e Cullinan, 2001; Greer e Ross, 2008); queste due abilità vengono acquisite inizialmente in modo indipendente, per poi fondersi in “speaker e listener sotto la stessa pelle” (Greer e Keohane, 2005), in modo che il soggetto parlante sia anche il proprio ascoltatore (Lodhi e Greer, 1989).

Sembra difficile però poter indagare nella pratica quotidiana il comportamento verbale, perché spesso i bambini “pensano” (comportamento covert) invece che parlare ad alta voce: è utile quindi rendere tale comportamento overt per poter gestire le correzioni del processo in corso e le contingenze di rinforzo, elemento fondamentale per l'incremento della performance (Mace, Neef, Shade e Mauro, 1996).

1.7 TAPS: Talk Aloud Problem Solving

Una tecnologia educativa che include tutti gli aspetti fino ad ora trattati è il Talk Aloud Problem Solving (TAPS): TAPS è un acronimo derivato dal lavoro di Whimbey e Lockhead (1991) sul Think Aloud Pair Problem Solving. Molte ricerche hanno verificato l'efficacia di questa tecnologia educativa sull'incremento della performance nella risoluzione dei problemi (Swanson, 1990; Short, Schatschneider, Cuddy, Evans, Dellick e Basili, 2004). Diversi studi hanno dimostrato che il TAPS incrementa il livello di controllo sul compito da parte dello studente (Flaherty, 1975; Berardi-Coletta, Buyer, Dominowski e Rellinger 1995; Hogan, 1999) e il successo nel problem solving (Chi, De Leeuw, Chui, e LaVancher, 1994; Johnson e Chung, 1999). L'elemento fondamentale di questa tecnologia educativa è la verbalizzazione (Montague e Applegate, 1993): infatti il *think aloud* fornisce molti dati verbali sul ragionamento durante la risoluzione di un compito di problem solving utili all'insegnante per identificare le informazioni e le procedure che lo studente sta utilizzando per la risoluzione del problema (Fonteyn, Kuipers e Grobe, 1993). Il *think aloud* promosso dal TAPS aiuta a costruire la cornice indispensabile per una comprensione più accurata del problema (Mac Gregor, 1990) e produce un padroneggiamento più profondo del materiale grazie al controllo e alla revisione del processo risolutivo (Slavin, 1995).

Gli studi tradizionali su TAPS fino ad ora citati si collocano prevalentemente all'interno della teoria metacognitiva, ma recenti formulazioni del *think aloud* ne sottolineano importanti aspetti comportamentali. Uno dei gruppi di ricerca più importanti nello studio e nell'applicazione di tale metodologia è quello di Robbins (1996), che cambia "think aloud" con "talk aloud". In questa prospettiva comportamentale viene data rilevanza principale alle gestione delle conseguenze del comportamento verbale: l'insegnante promuove il *think aloud* nell'ottica di rinforzare in modo differenziale i comportamenti verbali adeguati per la strutturazione del processo risolutivo. TAPS è una tecnologia educativa che privilegia lo sviluppo di abilità di problem solving più che la ricerca immediata del risultato di un particolare compito e misura la quantità e la qualità del comportamento verbale funzionale allo sviluppo di capacità di ragionamento trasversali alle discipline e alla competenze utili in contesti naturali.

TAPS è un programma educativo basato sul rinforzo del parlare ad alta voce per rendere osservabile, attraverso il comportamento verbale, il pensiero ed il ragionamento. Il ragionamento è un elemento essenziale del problem solving e richiede la manipolazione degli stimoli verbali per restringere le alternative di risposta in base al risultato di un problema

(Robbins, 2004): questo accade quando l'ambiente richiede al solutore di produrre stimoli verbali che, in modo sequenziale e sistematico, costruiscono un pattern di comportamento. Può essere assimilato a quello che Skinner descriveva come "un controllo delle contingenze di rinforzo".

Questa tecnologia educativa si basa sulla definizione che il parlante è anche il proprio ascoltatore; infatti TAPS prevede l'insegnamento di due repertori, quello del *problem solver* e quello dell'*active listener*, che vengono inizialmente allenati separatamente per poi fondersi in un'unica abilità. Parlare ad alta voce consente al listener di accertarsi che sia in corso il processo di problem solving, di valutare l'adeguatezza del comportamento verbale ed eventualmente fornire prompt e diminuisce la dispersione dell'attenzione da parte del solutore.

Il programma TAPS introduce le qualità dei due diversi repertori che devono essere costruite, quella del problem solver e quella dell'active listener: il ruolo dell'active listener è quello di fornire supporto e rinforzo al problem solver.

Per insegnare tali abilità, il lavoro in classe viene svolto attraverso diverse fasi: durante i primi giorni di istruzione l'insegnante guida la classe attraverso insegnamento diretto; vengono creati dei cartelloni da esporre all'interno dell'aula con le definizioni delle caratteristiche del problem solver e dell'active listener. L'insegnante modella gli studenti proponendo una serie di esempi e non-esempi delle diverse qualità dei due repertori lavorando in coppia con uno studente alla volta. Quando le competenze discriminative degli studenti aumentano, i bambini sono pronti a lavorare a coppie in modo autonomo, creando un ambiente rumoroso, produttivo e stimolante.

L'insegnamento di TAPS prevede il lavoro su due repertori, che prima vengono insegnati separatamente per poi fondersi in un unico attore. Le caratteristiche dei due repertori sono:

PROBLEM SOLVER:

1. mostra attitudine positiva: "proverò a risolvere questo problema, posso cercare la risposta a questa domanda, cercherò di spiegare perché questa è la mia risposta, cercherò di trovare le evidenze di cui ho bisogno, troverò le parole che provano la mia risposta"
2. presta attenzione: "indicherò le parole che mi guidano verso la risposta, selezionerò le parole accuratamente, rileggerò alcune parti del problema perché ho bisogno di maggiori informazioni, uso la matita per segnare ogni

item di cui ho bisogno, tornerò indietro e rileggere per vedere se ho fatto giusto”

3. divide il problema in parti: “non conosco il significato di una parole, quindi provo a guardare la parola vicina, non conosco il significato di una parola quindi guardo il significato della frase precedente, credo che farò un disegno di questa parte della storia, credo che farò un diagramma per questa parte del problema”
4. evitare di buttare la risposta: “non ho bisogno di buttare la risposta perché tutte le informazioni sono sul testo, questo mi sembra giusto ma è meglio che cerchi di vedere se è davvero la risposta corretta, credo di riuscire ad immaginarmelo, ma è meglio che facci un disegno per questo, questa potrebbe essere una delle due possibili risposte; lasciami cercare cosa manca così posso scegliere quelle giusta, ah, l’ho vista! Aspetta, è meglio che non salti alle conclusioni, vado a controllare ancora”
5. è attivo: “sto cercando di avere una raffigurazione di quello che sta succedendo nella storia, sto immaginando il disegno di quello che sta succedendo in questo passaggio, ora disegno un diagramma, ora disegno alcuni simboli per aiutarmi nella comprensione, leggero la domanda ad alta voce prima di fornire la risposta”.

ACTIVE LISTENER:

- segue il risolutore senza interrompere
- incoraggia il risolutore
- cerca gli errori
- guida senza dare la soluzione
- controlla il risultato

Il protocollo di TAPS prevede che l’insegnante modelli il comportamento verbale richiesto dal *Think Aloud* attraverso una serie di esempi e non esempi, discriminazione tra risposta corretta ed errata e role playing.

L’obiettivo finale dell’intervento con TAPS è quello di rendere il soggetto speaker e listener sotto la stessa pelle, affinché non ci sia più bisogno di una pratica a coppie ma il processoolutivo venga controllato, gestito e rinforzato dal solutore in modo indipendente e fluente.

Nella risoluzione dei problemi aritmetici, quindi, un ruolo fondamentale è quello svolto dal ragionamento non solo interno, ma anche, e soprattutto all'inizio, quello ad alta voce. Quest'ultimo è in grado di guidare il solutore durante la sequenza del problema (Johnson e Street, 2004).

Offrire istruzioni dirette e modellare il processo di ragionamento, sin dalla più tenera età, rappresentano aiuti concreti ed efficaci che gli insegnanti possono offrire agli studenti; questi permetteranno di aumentare la fiducia in se stessi oltre che modificare l'atteggiamento nei confronti della matematica (Henjes, 2007).

Il parlare ad alta voce rappresenta una auto-guida per gli scolari, indirizzando le loro azioni verso giusti obiettivi (Berk, 1994); il parlare e il ragionare ad alta voce sono attività fondamentali nella vita di tutti i giorni e utili per svariate attività, disponibili per tutti gli individui. Per questo motivo si ritiene importante allenare il processo di ragionamento privato, creando le giuste condizioni che aiutano ad utilizzarlo in modo utile ed efficace.

Nel processo di problem solving, anche di tipo matematico, lo *speaker* (colui che parla ad alta voce) riveste contemporaneamente anche il ruolo di *listener* (ascoltatore del suo stesso ragionamento); queste auto-istruzioni fungono da veri e propri rinforzatori automatici (Johnson e Street, 2004). Alcuni importanti ricercatori che si sono occupati di studiare il *verbal behavior* (Greer e Speckman, 2009), sottolineano come queste due abilità, acquisite inizialmente in modo indipendente, tendono nel corso dello sviluppo a fondersi all'interno del soggetto consentendo a quest'ultimo di diventare un abile solutore.

La difficoltà più comunemente riscontrata dai ricercatori, e successivamente dagli insegnanti che hanno deciso di utilizzare questa metodologia, è stata quella di allenare i ragazzi a ragionare ad alta voce, poiché il comportamento più frequente è quello di pensare (privatamente) anziché ragionare a voce alta (Henjes, 2007).

Per superare questa difficoltà, in letteratura sono stati realizzati alcuni studi che si sono occupati di provare la validità di quella che è stata chiamata *Think Aloud Strategies to Solve Word Problems* da applicare nel contesto scolastico e non solo, per sperimentare successi nella risoluzione dei problemi ragionando a voce alta (Stice, 2000; Leader e Middleton, 2004; Henjes, 2007).

Ma nello specifico in cosa consiste la strategia del *Think Aloud*? In che modo, all'interno di una prospettiva comportamentale, possono essere misurate le variabili presenti nel processo di ragionamento?

Henjes (2007) definisce il *Think Aloud Strategy* come quella capacità in grado di trasformare in parole il processo di ragionamento degli studenti di fronte ad un problema. Ragionando ad

alta voce gli alunni mostrano una migliore comprensione del loro stesso flusso di pensiero, ponendosi le giuste domande e trovando le strategie più opportune per risolvere il problema. Anche se all'inizio questo ragionamento non si sviluppa in modo naturale durante il processo di apprendimento, gradualmente e vivendo numerose esperienze di rinforzo, gli studenti mostreranno competenza in questo campo.

Il *Think Aloud Protocol* (Imperio, 2008) permette di raccogliere dati sul processo mentale dei soggetti contemporaneamente al momento in cui vengono verbalizzati, riducendo al minimo il rischio di ottenere informazioni errate o incomplete. Imperio sottolinea, inoltre, come il *think aloud* differisca dall'introspezione, in quanto esso non interferisce con la performance del soggetto e con il suo processo mentale.

Alcuni autori hanno proposto di combinare il ragionamento ad alta voce con la collaborazione dei propri compagni realizzando il TAPPS: *Thinking Aloud Pairs Problem Solving* (Whimbey e Lockheads, 1991).

Attraverso questa strategia, gli studenti imparano all'inizio in modo separato ad essere *problem solver* e *listener*, per poi ricoprire contemporaneamente questi ruoli. Inoltre questo metodo consente di diventare non solo bravi solutori, ma anche competenti nel saper utilizzare quello che conoscono (Stice, 2000).

Se molte ricerche svolte in questo ambito si collocano prevalentemente all'interno della teoria cognitiva e metacognitiva (Stice, 2000), all'interno dell'ambito comportamentale anche un'attività apparentemente di tipo solo cognitiva, qual è appunto il ragionamento, viene studiata come un comportamento di tipo esterno, *overt*, rendendo misurabili e osservabili le variabili coinvolte nel processo di ragionamento (Skinner, 1969).

In quest'ottica il pensare è considerato produttivo quando le risposte verbali conducono a specifiche conseguenze; queste ultime sono rinforzate automaticamente. In tale tipo di pensiero produttivo, chiamato *problem solving* attraverso il ragionamento, il *problem solver* arriva a costruire le risposte attraverso un concatenamento intraverbale. Colui che risolve problemi genera, così, stimoli da integrare a comportamenti già presenti nel proprio repertorio (Whimbey e Lockheads, 1991)).

In particolar modo gli studi di Johnson e Street (2004) e quelli di Robbins (2006) tendono a gestire le conseguenze del comportamento verbale in modo differenziale. Robbins (2006), partendo dai principali errori che si osservano comunemente durante la risoluzione dei problemi come la lettura inaccurata, il ragionamento errato, mancanza di perseveranza e il fallimento nel pensiero ad alta voce, si è preoccupata di sostituire il *think aloud* con il *talk*

aloud: da qui il termine TAPS, utilizzato per designare il processo di pensiero ma soprattutto il parlare ad alta voce durante la risoluzione dei problemi.

Con il TAPS si è dimostrato che si è in grado di rinforzare il parlare ad alta voce, rendendo dunque osservabile il ragionamento degli studenti. Inoltre esso consente di aumentare la comprensione nella lettura dei problemi, di ampliare e acquisire un nuovo vocabolario, di migliorare le abilità matematiche insegnando agli studenti a porsi le giuste domande.

Lo scopo finale è allora quello di rendere osservabili e di sistematizzare abilità, regole, strategie, che gli studenti posseggono già nella propria mente, per poter poi risolvere qualcosa di nuovo e differente. A lungo termine il TAPS si propone l'obiettivo di rendere gli studenti cittadini responsabili e di successo in qualsiasi situazione lavorativa (Robbins, 2006).

Whimbey e Lockhead's (1991) hanno sostenuto che TAPS consenta di aumentare il QI dei ragazzi.

Anche nella scienza del comportamento, dunque, nel processo di problem solving e di quello matematico nello specifico, il ragionamento occupa un ruolo fondamentale. Durante il ragionamento, nell'attività di risoluzione dei problemi, vengono coinvolte variabili esterne (dunque osservabili) e variabili interne. Le variabili esterne sono costituite da:

- a) Stimoli verbali e non verbali
- b) Indicazioni, direttive finalizzate a favorire la concettualizzazione del problema
- c) Istruzioni che hanno la funzione di agevolare la soluzione del problema.

Le variabili interne, invece, sono legate alle differenze individuali e dipendono dalla:

- a) Quantità di informazioni immagazzinate
- b) Facilità di richiamare alla memoria le informazioni stesse
- c) Capacità di selezionare i concetti
- d) Flessibilità nel formulare ipotesi
- e) Capacità di saper confrontare il caso specifico con il caso generale

Ciò che differenzia il ragionamento usato nell'ambito comportamentale, rispetto a quello cognitivo, è dato, quindi, dal fatto che nel primo caso l'obiettivo fondamentale del ricercatore o dell'insegnante risiede nel cercare di rendere osservabili anche variabili prettamente cognitive, in modo da renderle misurabili e replicabili.

1.8 Il Curriculum Tice per la risoluzione dei problemi aritmetici

In contesti di insegnamento o di recupero dell'abilità di risoluzione dei problemi aritmetici, era fondamentale per noi avere a disposizione un materiale uniforme, utilizzabile da tutti gli operatori educativi, costruito secondo una task analysis che includesse gli aspetti di verbalizzazione del ragionamento del TAPS accanto a un insegnamento specifico di strategie risolutive.

Il primo compito che un insegnante si trova ad affrontare quando vuole insegnare a risolvere problemi è quello di scegliere il tipo di materiale da proporre ai propri studenti: potrebbe scegliere i problemi dai libri di testo, cercare su internet oppure rifarsi ai programmi ministeriali. La scelta del tipo di materiale su cui lavorare è di centrale importanza per l'intervento didattico perché prevede una scelta dell'approccio educativo di riferimento.

I problemi sono solitamente categorizzati in base al tipo di operazione; i libri o gli insegnanti forniscono euristiche generali per la risoluzione, ad esempio:

- 1- capire quello che la domanda richiede
- 2- trovare le informazioni che ti aiutano nel rispondere alla domanda
- 3- scegli l'operazione corretta
- 4- valutare la risposta
- 5- risolvi il problema

Se lo studente sa già risolvere il problema, direttive come queste possono costituire prompts generici ma non aiutano ad imparare come risolvere un problema.

Altri problemi si basano sull'individuazione delle "parole chiave": questi problemi sono solitamente categorizzati in base al tipo di operazione. I libri o gli insegnanti dicono quale operazione effettuare in base alla presenza di determinate parole chiave.

Es.: quando vedi l'espressione "di più" utilizza l'addizione

quando vedi l'espressione "persi" utilizza la sottrazione

Ci sono però diverse eccezioni dovute ai diversi significati che tali parole assumono.

Ad esempio lo stesso verbo "regala" appare negli esempi a) e b) ma nel primo caso si tratta di una addizione e nel secondo di una sottrazione.

a) Luca regala 7 figurine. Maria regala 3 figurine in più rispetto a Luca. Quante figurine ha regalato in tutto Maria?

b) Luca ha 15 figurine. Il giorno dopo ne regala 7. Quante figurine possiede ora?

Lo studente può incontrare un'altra difficoltà quando il verbo non fornisce alcuna informazione circa l'operazione, ad esempio:

Mario ha 4 cuccioli, 3 sono cani. Quanti non sono cani?

Tutte queste particolarità possono essere affrontate solamente attraverso l'insegnamento di principi espliciti o regole per risolvere i problemi.

Una delle strategie più frequenti è quella di richiedere agli studenti di illustrare i problemi disegnando immagini. Questa è una buona modalità per gli alunni ancora inesperti. Gli insegnanti iniziano con le illustrazioni e successivamente mostrano come queste si possono trasformare in operazioni.

Disegnare immagini ha però una limitata generalizzabilità nella vita di tutti i giorni ed è una modalità difficilmente applicabile nel risolvere problemi con numeri a molte cifre. Le immagini possono essere utili nell'introdurre i problemi ma devono essere successivamente sostituiti da principi e regole che insegnino agli studenti le relazioni tra le parole del problema ed i principi matematici necessari per risolvere il problema.

Le ricerche suggeriscono che le difficoltà nel discriminare la corretta operazione, il riconoscimento delle informazioni inerenti la risoluzione del problema, la velocità di calcolo sono alcune tra le abilità più frequentemente associate a scarse performance nella soluzione dei problemi (Neef, Nelles, Iwata e Page, 2003).

Alcuni autori (Wood, Frank e Eacker, 1998; Neef et al., 2003) sottolineano l'importanza di accuratezza e velocità di calcolo, quindi di fluency, come elementi necessari per il raggiungimento di performance soddisfacenti.

Una strategia comune è quella di far manipolare direttamente ai ragazzi gli oggetti, contandoli tutti nel caso dell'addizione, togliendoli nella sottrazione ecc. (Anstrom, 2003).

Sebbene la manipolazione abbia mostrato la sua efficacia, essa non è priva di limiti, primo tra tutti quello di non garantire la discriminazione dell'operazione appropriata soprattutto in quei problemi che includono grandi quantità o concetti astratti, come la distanza o il tempo.

Per ottenere una generalizzazione in più contesti, con diverse quantità e con diversi concetti, un particolare approccio è quello d'insegnare ai ragazzi a trasformare i problemi in equazioni, i cui termini rappresentano le parti del problema (Neef et al., 2003).

Le ricerche che hanno mirato ad insegnare ai ragazzi a risolvere i problemi sono state indirizzate non solo agli allievi con disturbo di calcolo matematico diagnosticato, ma anche ad alunni che presentano semplici difficoltà nella comprensione e strutturazione del problema (Mayfield e Chase, 2002; Neef et al., 2003; Levingston et al., 2009).

Inizialmente questa modalità è stata rivolta a bambini di scuola primaria, ma è stata in un secondo momento estesa anche a studenti universitari (Mayfield e Chase, 2002), ovviamente

puntando al raggiungimento di abilità più complesse della semplice discriminazione tra addizione e sottrazione, oltre che a ragazzi con ritardo mentale.

Quasi tutte le ricerche svolte in ambito comportamentale propongono agli insegnanti di utilizzare diversi curricula di matematica, in cui si insegna ai ragazzi ad impostare il problema sottoforma di equazione algebrica a tre termini, dove l'incognita da calcolare, la x , può trovarsi al primo termine, al secondo o alla fine (Neef et al., 2003; Levingston et al., 2009). La possibilità di accedere al rinforzatore è l'elemento centrale che consente di incrementare il comportamento di risolvere problemi.

Nella ricerca di Neef e colleghi (2003) sono stati esaminati gli effetti dell'insegnamento di comportamenti precorrenti (nello specifico: identificare il numero iniziale, identificare il secondo numero, l'operazione e il risultato finale) sul comportamento di risolvere problemi di matematica. I problemi richiedevano come operazione l'addizione o la sottrazione e il risultato finale poteva trovarsi in diverse posizioni dell'equazione.

È stato preparato uno specifico curriculum di problemi matematici, nel quale una delle variabili, che poteva trovarsi all'inizio, al centro o alla fine del problema, era sconosciuta e doveva essere calcolata.

Ogni problema era costituito da 5 parti:

- la parte iniziale indicava il n. di oggetti posseduti dalla persona;
- il verbo indicava se l'oggetto era aggiunto o sottratto;
- lo stesso verbo indicava l'operazione;
- la frase successiva indicava il nuovo n. di oggetti posseduti dalla persona;
- la risposta alla domanda finale permetteva di accedere alla soluzione.

Ovviamente lo studio non è privo di limiti, tra cui il fatto di aver insegnato solo problemi che richiedevano operazioni di addizione e sottrazione.

Partendo, quindi, da questo limite, Levingston e Neef (2009) hanno completato il curriculum, con la costruzione di specifici problemi di moltiplicazione e divisione, sempre da risolvere sottoforma di equazione algebrica a tre termini, con una variabile incognita.

Anche in questo curriculum sono state insegnate quattro abilità precorrenti:

- identificazione del risultato;
- discriminazione dell'operazione;

- discriminazione del numero più grande;
- discriminazione del numero più piccolo.

Le procedure utilizzate si sono dimostrate efficienti perché si limitavano all'identificazione degli elementi di base e alle operazioni del problema, senza ricorrere a strategie di riflessione. Un'altra modalità proposta è stata quella di comparare un metodo di training per insegnare cinque regole algebriche, da applicare all'interno di problemi (Mayfield e Chase, 2002) distinguendo i soggetti in tre gruppi: esercitazione cumulativa, metodi di esercitazione extra e semplice ripasso.

L'esercizio cumulativo inizia con l'apprendimento di due abilità indipendenti che poi vengono unite. Una volta raggiunto il criterio, viene inserita una terza abilità. La procedura continua fin quando non sono state acquisite tutte le abilità in modo gerarchico. Il problem solving può essere, quindi, concepito come un concatenamento di precedenti risposte apprese (Mayfield e Chase, 2002).

I risultati suggeriscono che anche studenti con scarse abilità matematiche possono sperimentare successi, attraverso adeguati training.

Poiché spesso gli insegnanti si trovano a dover insegnare a studenti che non amano particolarmente la matematica, alcuni ricercatori (Mc Ginnis, Friman e Caryon, 1999) hanno proposto di insegnare regole algebriche suddivise in steps dalla complessità sempre crescente avvalendosi dell'utilizzo di una token economy; grazie a questa è aumentata la motivazione degli allievi e l'accuratezza nella risoluzione.

Una strategia particolarmente efficace è quella di insegnare il problem solving matematico avvalendosi dell'aiuto dei pari: in questo modo è stato dimostrato come si possono insegnare regole abbastanza complesse, che si mantengono anche a distanza di tempo (Mayfield e Chase, 2002).

Alcuni ricercatori hanno voluto utilizzare sia strategie mnemoniche, sia procedere per tappe sempre più complesse con l'utilizzo di flash-cards per insegnare a studenti con disturbo dell'apprendimento la moltiplicazione, all'interno del processo di problem solving. In un secondo momento sono stati introdotti i problemi, nei quali i ragazzi hanno mostrato di possedere non solo accuratezza, ma anche velocità di calcolo (Wood et al., 1998).

Per verificare se il problem solving sia in grado di far emergere spontaneamente abilità sempre più complesse e non direttamente insegnate, altri ricercatori hanno provato a dare dei problemi che richiedevano formule non direttamente apprese a ragazzi di scuola superiore. È stato constatato come il fatto di possedere abilità di base fosse una qualità necessaria per far

emergere abilità sempre più articolate, che in questo caso specifico riguardavano la risoluzione di frazioni (Bottge, Ruenda, Grant, Stephens, e Laroque 2010).

In una prospettiva comportamentale, il problem solving è considerato efficace se permetterà non solo di notare la contingenza a tre termini che consente quindi l'accesso al rinforzatore, ma anche di far emergere spontaneamente abilità non direttamente apprese per prove dalla difficoltà sempre crescente.

Ovviamente le diverse proposte dei ricercatori non sono esenti da limiti, come la grande quantità di tempo richiesta, oltre all'esercizio e alla supervisione costante. Tutti gli studi, inoltre, si sono svolti in un contesto americano nel quale l'insegnamento della matematica per certi aspetti è differente rispetto alla realtà italiana.

Aspetto importante, tuttavia, è la generalizzabilità dei risultati conseguiti grazie al problem solving matematico attraverso queste strategie che permettono di accedere ad una soluzione soddisfacente per un problema nuovo, o per un problema che il problem solver non ha mai visto prima (Parmar, Cawley e Frazita, 1996).

Imparare a risolvere i problemi avvalendosi di appositi curricula offre risultati osservabili sia in termini di problemi risolti correttamente, sia di motivazione dei ragazzi, oltre ad essere una sfida per l'insegnante che si mette costantemente alla prova (Neef et al., 2003; Johnson e Street, 2004).

L'aspetto importante, all'interno di questo ambito di studi, è rappresentato dal fatto che i ricercatori non rinunciano a rendere osservabile e misurabile il processo di risoluzione del problema, decidendo di misurare persino il comportamento verbale del risolutore, quello cioè che all'interno del cognitivismo è stato definito ragionamento (Johnson e Street, 2004).

La ricerca ha dimostrato che principi e procedure che sono ad un livello intermedio di generalizzabilità sono quelle maggiormente efficaci specialmente per quegli studenti che hanno difficoltà soprattutto a livello euristico o che non riescono ad immaginarsi da soli come risolvere i problemi. (Pressley e al., 1989).

Il curriculum dei problemi costruito in collaborazione con la Morningside Academy di Seattle (WA, USA) prevede l'insegnamento di 10 tipologie basilari di problemi: 5 con addizioni e sottrazione e 5 con moltiplicazioni e divisioni. Gli studenti imparano a risolvere equazioni a 3 termini con una variabile incognita.

La performance dello studente viene misurata e registrata giornalmente. Gli studenti e gli insegnanti utilizzano questi dati per decidere qual è la cosa migliore da fare successivamente per l'alunno, infatti ci può essere o meno la necessità di maggiore istruzione o maggiore pratica.

Le specifiche sequenze di abilità ed il focus sull'insegnamento di ciascuna come caso generale fa del curriculum dei problemi un programma generativo: *Generative Instruction* è una modalità di istruzione che produce abilità aggiuntive più complesse e che non sono state direttamente insegnate.

Attraverso la misurazione e la registrazione delle proprie performance gli studenti imparano importanti obiettivi, abilità di auto-monitoraggio, di organizzazione e di apprendimento cooperativo. Gli studenti hanno la libertà di passare alla lezione successiva una volta acquisito il livello precedente, si possono muovere attraverso il curriculum secondo il proprio ritmo e scegliere l'attività da svolgere nei momenti di pausa.

Ogni livello è costituito da:

- Protocollo per l'insegnante (è una guida che accompagna passo per passo l'insegnante nella spiegazione del problema, così come dovrà essere insegnato agli allievi);
- Prompt del livello (cioè il tipo di aiuti verbali che l'insegnante dovrà dare agli alunni);
- Problemi (seguono numerosi problemi adeguati al livello, che consentono agli alunni di esercitarsi).

I problemi vengono svolti in un tempo stabilito, cronometrato dall'insegnante e cioè 3 minuti.

- Dopo ogni livello, seguono dei problemi misti di tutti i livelli precedenti, che consentono al ragazzo di non dimenticare quello che è stato precedentemente acquisito.

Mantenendo questo ordine, abbiamo costruito il *Curriculum Tice* in collaborazione con la Morningside Academy di Seattle (WA, USA).

Il *Curriculum* non nasce unicamente per bambini con bisogni particolari, e quindi disturbi o difficoltà di apprendimento piuttosto che ritardo mentale, ma può facilmente essere utilizzato per iniziare ad insegnare a tutti i bambini. Sicuramente il suo uso è consigliato nella scuola primaria, dal momento che il *Curriculum Tice* consente di costruire e rafforzare le basi del processo di risoluzione dei problemi.

Le equazioni dei problemi sono tutte nella forma $A \pm B = X$, oppure $X \pm B = C$, o ancora $A \pm X = C$.

I livelli presenti nel curriculum corrispondono alle parti di cui si compone ogni problema: il livello 1, o step iniziale, è stabilito dalle parole indicanti il numero di oggetti inizialmente in

possesso della persona; il livello 2, o cambiamento di step, viene identificato dal verbo presente nel problema ed indica che gli oggetti in possesso sono stati aggiunti o sottratti (quindi suggerisce anche l'operazione da compiere). Infine il terzo livello, o soluzione finale, è rappresentato dalla frase che indica il numero di oggetti in possesso della persona alla fine del problema.

Uno degli steps presenta la variabile incognita da calcolare, come riportato nella domanda finale del problema. Rispondendo alla domanda si accede alla soluzione.

Di seguito, nella tabella 1, vengono riportati i livelli del curriculum rispetto ai problemi di addizione e sottrazione (prima colonna), l'obiettivo da raggiungere (seconda colonna), alcuni esempi (terza colonna) e infine la struttura dell'equazione da ottenere (ultima colonna).

Ecco la struttura del curriculum:

livello 1	<p>Trovare il risultato totale quando sono noti il numero iniziale ed il numero aggiunto.</p> <p>Trovare il numero rimanente quando sono noti il numero iniziale e il numero tolto</p>	<p>Mario ha 9 mele, Luca gliene regala 3. Quante mele ha ora Mario?</p> <p>Mario ha 12 mele. Ne mangia 3. Quante mele ha ora?</p>	<p>$9 + 3 = X$</p> <p>$12 - 3 = X$</p>
livello 2	<p>Trovare quale quantità è stata aggiunta o quanta ancora ne è richiesta quando sono noti il numero iniziale e il totale risultante o desiderato</p> <p>Trovare il numero tolto quando sono noti il numero iniziale e il numero rimanente</p>	<p>Mario ha 9 mele. Dopo che Luca ne ha alcune in più, ne possiede 12. Quante mele ha dato Luca a Mario?</p> <p>Mario ha 12 mele. Dopo averne mangiate alcune</p>	<p>$9 + X = 12$</p> <p>$12 - X = 9$</p>

		gliene rimangono 9. Quante mele ha mangiato?	
livello 3	Trovare il numero iniziale quando sono noti il numero aggiunto ed il totale risultante. Trovare il numero iniziale quando sono noti il numero tolto e il numero rimanente	Mario ha alcune mele. Luca gliene da 3. Poi ne aggiunge 12. Quante mele aveva all'inizio Mario? Mario aveva alcune mele. Di queste ne mangia 3. Gliene rimangono 9. Quante mele deve avere all'inizio?	$X+3 =$ 12 $X-3 =$ 9
livello 4 classificazioni	Trovare il numero totale della classe quando sono note entrambe le quantità delle sub-classi. Trovare la quantità di una delle classi quando sono noti il totale e la quantità di una classe.	Mario ha 9 mele e 3 arance. Quanti frutti possiede? Mario ha 12 frutti. 9 di questi sono mele. I rimanenti sono arance. Quante arance ha Mario?	$9+3 =$ X $9+X =$ 12

<p>livello 5</p> <p>comparazioni</p>	<p>Trovare la quantità più grande quando sono note la quantità minore e la differenza tra la quantità più grande e più piccola.</p> <p>Trovare la quantità minore quando sono note la quantità maggiore e la differenza tra la quantità più grande e più piccola.</p>	<p>Mario ha 9 mele. Possiede 3 arance in più (o in meno) rispetto alle mele. Quante arance ha Mario?</p> <p>Mario ha 12 mele. Ha 3 mele in più (o in meno) rispetto alle arance. Quante arance ha Mario?</p>	<p>$X-9 = 3$</p> <p>$12-X = 3$</p>
--------------------------------------	---	--	--

In particolare, gli studenti imparano a risolvere 10 formati di problemi. Essi imparano a trasformare tali formati in equazioni algebriche a 3 termini con una variabile sconosciuta ed a risolvere le equazioni stesse.

Il curriculum fornisce uno script preciso per la somministrazione da parte dell'insegnante e prevede un copione per il modellamento del comportamento verbale dei bambini che vengono guidati verso la formulazione dell'equazione di risoluzione del problema. Ecco un esempio:

ESEMPIO 1 (livello 1 – addizione) :

Pamela ha adottato 4 gattini la scorsa settimana. Oggi ha trovato altri 3 gattini per strada e li ha portati a casa. Quanti gattini ha ora Pamela?

INSEGNANTE DICE/FA
SENTE/DICE

STUDENTE

Scrivi sulla lavagna:

Pamela ha adottato 4 gattini la scorsa settimana.
Oggi ha trovato altri 3 gattini per strada e li ha portati a casa. Quanti gattini ha ora Pamela?

Chiedi ad uno studente di leggerlo ad alta voce.

Pamela ha adottato 4 gattini la scorsa settimana. Oggi ha trovato altri 3 gattini per strada e li ha portati a casa. Quanti gattini ha ora Pamela?

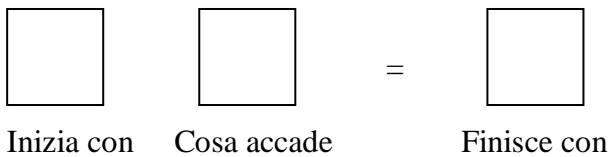
Questo problema è **come una storia**. In una storia, come nella vita reale, tutto accade secondo un ordine.

In un problema-storia dobbiamo capire con quale ordine avvengono i fatti. Dobbiamo trovare cosa accade all'**inizio**, nel **mezzo** e alla **fine**.

L'inizio della storia ci dice **con cosa partire**. La parte centrale dice **cosa accade dopo** e la fine ci dice **come si conclude**.

Quindi disegnerò 3 riquadri e metterò l'uguale prima dell'ultimo quadrato.

Disegna



Ora siamo pronti per riempire i riquadri.
Vediamo. Cosa ci chiede di trovare il problema?

È esatto. Ci chiede il numero di gattini che Pamela ha **alla fine** della storia.
Questo è quello che dobbiamo trovare.

Quanti gattini ha ora Pamela?

Ok, vediamo cosa **fare** ora. Sappiamo con quanti gattini **inizia**? Sappiamo quanti gattini ha Pamela **all'inizio** della storia?

Il curriculum quindi presenta alcune caratteristiche utili al suo utilizzo in contesto scolastico perché fornisce chiare indicazioni per l'utilizzo e un numero adeguato di problemi divisi in diversi livelli che permettono di fornire ai bambini materiale adatto al proprio livello di competenza nella risoluzione dei problemi.

CAP. 2: LA RICERCA

2.1 Studio 1: Il *Curriculum Tice* applicato durante sedute di potenziamento e riabilitazione individuali

Il primo studio ha previsto l'utilizzo del *Curriculum Tice* all'interno di un Centro di Apprendimento e di Ricerca con bambini che già lo frequentavano e che avevano necessità di un recupero e potenziamento nell'area delle risoluzione di problemi aritmetici.

Partecipanti e setting

Hanno partecipato alla ricerca 4 bambini frequentanti il Centro di Apprendimento e di Ricerca Tice di Castel San Giovanni (PC) e di Piacenza.

I partecipanti erano di età compresa tra gli 8 e i 10 anni e frequentavano la terza, la quarta o la quinta classe di scuola primaria.

In particolare, un bambino riporta una difficoltà di apprendimento, una bambina un disturbo specifico dell'apprendimento, mentre gli altri due hanno un ritardo mentale, medio e lieve.

I prerequisiti per poter essere inclusi come soggetti sperimentali nello studio sono stati la capacità di svolgere semplici calcoli di addizione e sottrazione; la lettura e comprensione del vocabolario usato all'interno dei problemi.

I bambini hanno lavorato con due ricercatori con la frequenza di una volta alla settimana per un'ora di esercizio alla volta. Il training si è svolto all'interno centro Tice di Castel San Giovanni e in quello di Piacenza e ha previsto un lavoro uno a uno tra insegnante e studente.

Gli insegnanti erano due sperimentatori formati nell'utilizzo della strategie educative derivanti dalla scienza del comportamento applicata e che conoscevano il *Curriculum*.

Disegno sperimentale

Lo studio ha finalità primariamente applicative ed educative generate dal bisogno dei partecipanti di accedere ad un percorso di recupero per lo svolgimento dei problemi aritmetici.

È stato quindi pianificato e condotto un disegno sperimentale a soggetto singolo, nel quale abbiamo osservato e misurato il comportamento dei bambini, rispetto ai problemi matematici, prima, durante e dopo il training con il *Curriculum Tice*. Abbiamo somministrato delle pre e post probe criteriali costruite dal nostro gruppo di ricerca insieme al *Curriculum*.

Variabile dipendente

Lo studio, che rappresenta la prima applicazione del *Curriculum Tice* per la risoluzione dei problemi aritmetici, ha definito la misurazione di 3 variabili dipendenti, derivanti dall'analisi della letteratura:

1. comportamento dei bambini di fronte al problema ed è stata operazionalizzata osservando i seguenti comportamenti:
 - comportamento verbale di fronte al compito (sbuffare, dire “ No basta, io non li voglio fare ”, sedersi pronti per iniziare a lavorare);
 - sedersi con il materiale utile per lavorare sul problema (foglio, quaderno, biro)
 - latenza tra la consegna di eseguire il problema e l'inizio effettivo del lavoro;
 - numero di problemi svolti (indipendentemente dalla loro correttezza).
2. La seconda variabile dipendente è la quantità di problemi svolti correttamente nel tempo stabilito.
3. La terza variabile dipendente è il QI (Matrici di Raven).

Variabile indipendente

La variabile indipendente introdotta è stata l'utilizzo del *Curriculum Tice* per la risoluzione dei problemi aritmetici. La domanda di ricerca voleva valutare e misurare l'efficacia del *Curriculum Tice* per il recupero e il potenziamento dello svolgimento dei problemi aritmetici.

Procedura

La procedura sperimentale ha previsto le seguenti fasi:

1. Pre probe per la misurazione delle VD
2. Trattamento
3. Post probe per la misurazione della VD

Materiale:

Le 3 variabili dipendenti sono state misurate in pre e post test utilizzando diversi strumenti:

1. griglia di osservazione del comportamento dei bambini di fronte ai problemi
2. pre-test criteriale di risoluzione dei problemi aritmetici
3. test d'intelligenza Matrici di Raven (CPM)

Durante la fase di trattamento, invece, abbiamo inserito l'insegnamento della risoluzione dei problemi con il *Curriculum Tice* (vedi appendice).

Metodo:

La sperimentazione è durata 9 mesi; i quattro bambini hanno iniziato in momenti diversi dell'anno a partecipare allo studio, per motivi organizzativi e di accesso al Centro.

Inizialmente abbiamo misurato il livello di partenza di ogni ragazzo somministrando il pre test. La consegna fornita ad ogni studente è stata: “ *Leggi attentamente i problemi, possibilmente ad alta voce. Calcola la soluzione finale, riportandola nell'apposito spazio* ”. Sono state considerate corrette solo le risposte che presentavano il numero esatto nella posizione dell'incognita; qualsiasi altra risposta (o nessuna risposta data) è stata considerata come errore.

Ogni bambino ha avuto a disposizione 20 minuti per completare il pre-test dei problemi.

I ricercatori, inoltre, hanno compilato la griglia di osservazione dei comportamenti dei partecipanti di fronte ai problemi del pre test.

Abbiamo inoltre somministrato le CPM per misurare il QI a tre bambini su quattro del nostro studio, scegliendo di escludere da questa prova la partecipante con ritardo mentale medio.

Successivamente, abbiamo introdotto il trattamento con il *Curriculum Tice*. Ai ragazzi è stato spiegato come identificare le tre componenti del problema, ossia i livelli, utilizzando il protocollo dell'insegnante presente nel *Curriculum*.

Il copione dell'insegnante presenta ogni problema come una storia da risolvere: “ *In una storia, come nella vita reale, tutto accade secondo un ordine: bisogna, dunque, “capire con che ordine avvengono i fatti; pertanto è importante trovare cosa accade all'inizio, nel mezzo e alla fine. L'inizio della storia ci dice con cosa partire. La parte centrale dice cosa accade dopo e la fine ci dice come si conclude* ”.

Successivamente, si procedeva seguendo lo script indicato dal materiale.

Si partiva sempre con la lettura ad alta voce di un problema, poi insegnavamo ai bambini a disegnare tre riquadri che avremmo dovuto riempire con i dati forniti dal problema; tra il primo e il secondo riquadro avremmo dovuto inserire l'operazione, mentre tra il secondo e il terzo riquadro avremmo disegnato il segno dell'uguale.

Per quanto riguarda i problemi del primo livello, ad esempio, nel primo riquadro bisognava inserire il dato che indicava come iniziava il problema, e quindi gli oggetti inizialmente posseduti, nel secondo riquadro inserivamo il dato che indicava cosa succedeva nel mezzo della storia e il cui verbo suggeriva se gli oggetti erano stati aggiunti o sottratti, mentre nell'ultimo riquadro inserivamo il dato finale, che rappresentava la fine della storia e quindi i nuovi oggetti in possesso.

Come suggerito dal protocollo dell'insegnante, abbiamo spiegato ai bambini che ad ogni punto ci dovevamo fermare e vedere se era presente qualche dato. In caso contrario, quindi se il problema parlava di quantità indefinite come alcuni, qualche, un po', avremmo disegnato nel riquadro la x , ossia la variabile incognita che stava ad indicare che non si conosceva la quantità, che doveva essere calcolata.

Inizialmente, fin quando i bambini non mostravano completa autonomia e padronanza del nuovo metodo di risoluzione del problema, il nostro intervento era costituito dal dare dei prompt di tipo verbale, che potessero guidare il ragazzo nella comprensione del problema e nel compilare correttamente i riquadri con i dati. I prompt che generalmente usavamo erano costituiti dalla ripetizione di alcune parti del copione affinché i bambini riuscissero a raggiungere la risposta corretta a quella domanda del copione, necessaria per i passaggi successivi.

Questa procedura è stata usata ogni volta che dovevamo iniziare un nuovo livello del curriculum.

Una volta che tutti i riquadri venivano riempiti, controllata anche l'operazione, abbiamo insegnato ai bambini un bel metodo per potersi calcolare la x , cioè quello che Robbins (2006) ha definito il “ metodo delle astine ”. Questo metodo consente ai ragazzi che non hanno ancora acquisito il recupero di fatti aritmetici di base di risolvere l'operazione utilizzando il conteggio delle astine.

Sotto ogni riquadro bisognava disegnare tante astine quante ne erano indicate all'interno del riquadro stesso. I metodi del calcolo erano diversi, a seconda della posizione assunta dalla x e dall'operazione richiesta dal problema. I problemi presentati nel *Curriculum* erano costituiti da numeri non molto alti, il cui totale non era superiore a 20.

Il disegno di ricerca ha previsto l'allenamento su una media di 10 problemi a seduta.

Il progetto di ricerca ha previsto il raggiungimento di 2 criteri: uno di accuratezza e uno di fluenza. Nella prima fase i partecipanti dovevano raggiungere il 100 % di accuratezza nelle risposte date ai problemi sotto la guida dell'insegnante che seguiva il copione previsto nel *Curriculum* per guidare i bambini verso la soluzione; nella seconda fase i bambini dovevano risolvere ciascun problema in 3 minuti in modo indipendente, ovvero senza la guida dell'insegnante. Questo ci ha consentito di lavorare anche sulla fluenza dello svolgimento dei problemi, che definisce il raggiungimento di una padronanza completa delle abilità di risoluzione dei problemi che consente ai bambini di risolvere il problema in modo accurato e veloce allo stesso tempo.

Al termine del training sono stati somministrati nuovamente i post test di risoluzione dei problemi, il CPM ed è stata compilata la griglia di osservazione del comportamento dei bambini di fronte ai problemi del post test.

Risultati

Presentiamo di seguito i risultati dello studio in modo sistematico per ognuna delle tre variabili.

- 1) Per quanto riguarda la prima variabile dipendente, abbiamo osservato che il comportamento dei bambini di fronte ai problemi misurato mediante la griglia di osservazione ha subito una modificazione qualitativa. Infatti nell'osservazione dopo il trattamento i bambini iniziano a leggere i problemi con una latenza sempre minore, si procurano il materiale necessario per il lavoro e leggono sempre i problemi ad alta voce in autonomia.

Il primo partecipante è passato da 0 a 10 problemi letti ad alta voce; il secondo da 0 problemi a 10 letti a voce alta; lo stesso risultato è stato conseguito anche dal terzo; la bambina con ritardo mentale medio, invece, è stata l'unica che aveva già come pre-requisito la lettura dei problemi a voce alta e quindi non ha mostrato un trend di miglioramento.

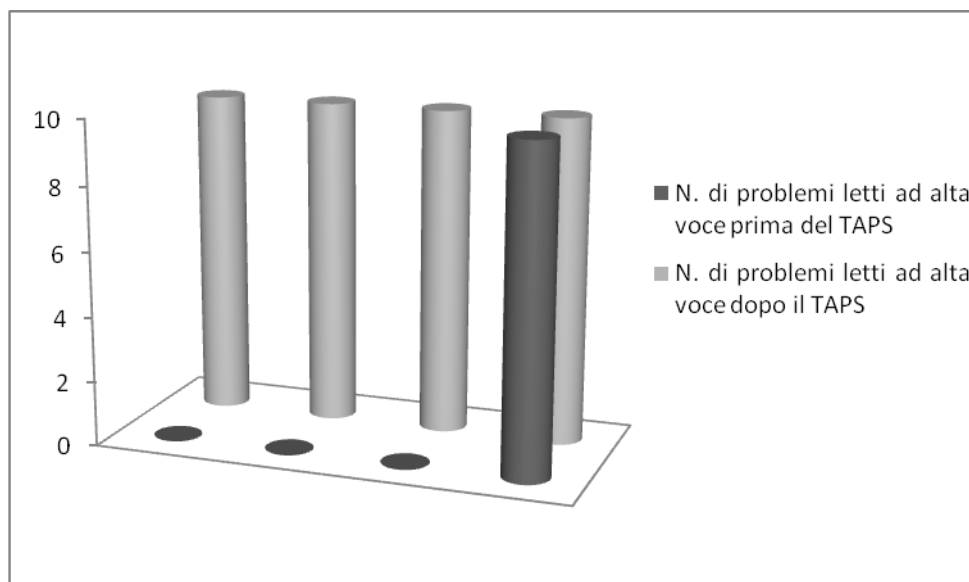


Grafico 1: n° di problemi letti ad alta voce in autonomia prima e dopo l'intervento con il *Curriculum Tice*

- 2) La percentuale del numero dei problemi risolti correttamente nei 3 minuti di tempo è aumentato per tutti e tre i bambini: Sofia è passata da 2 problemi risolti correttamente

a 6, lo stesso risultato è stato raggiunto da Alessandro, mentre Lorenzo è salito dai 2 ai 5 problemi risolti correttamente.

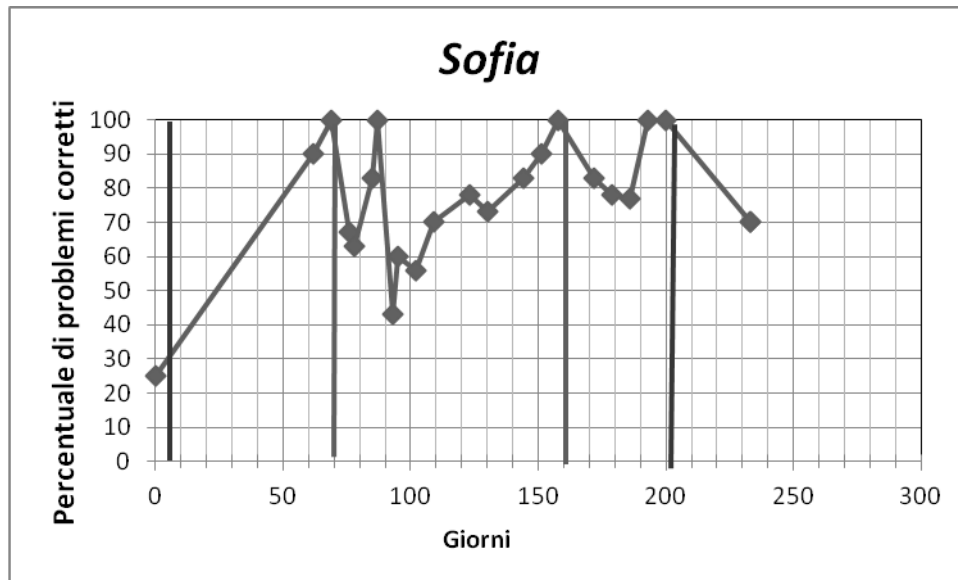


Grafico 2. Il grafico riporta i punteggi ottenuti da Sofia durante il pre-test , durante l'utilizzo del curriculum TICE e nella fase di post-test

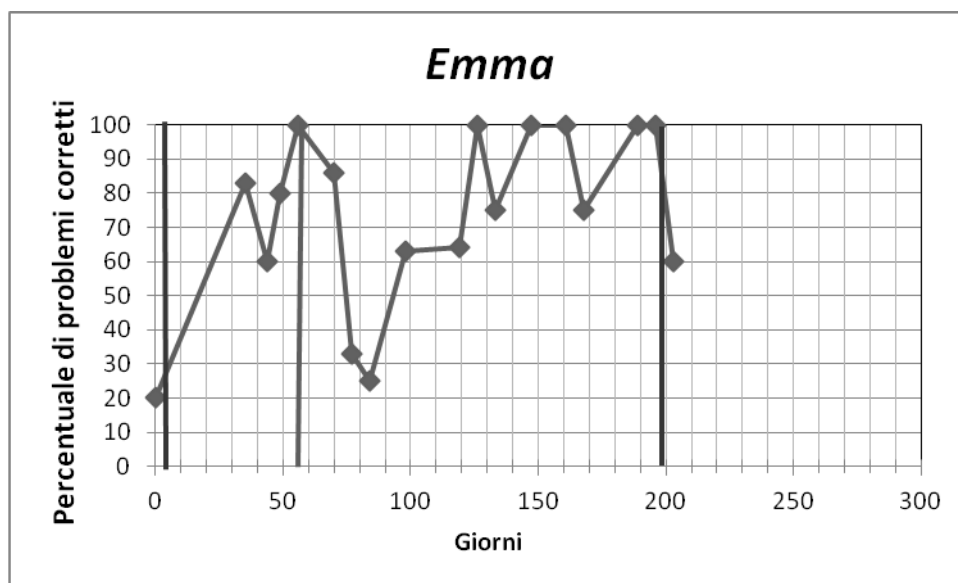


Grafico 3. Il grafico riporta i punteggi ottenuti da Emma durante il pre-test, durante l'utilizzo del curriculum TICE e nella fase di post-test

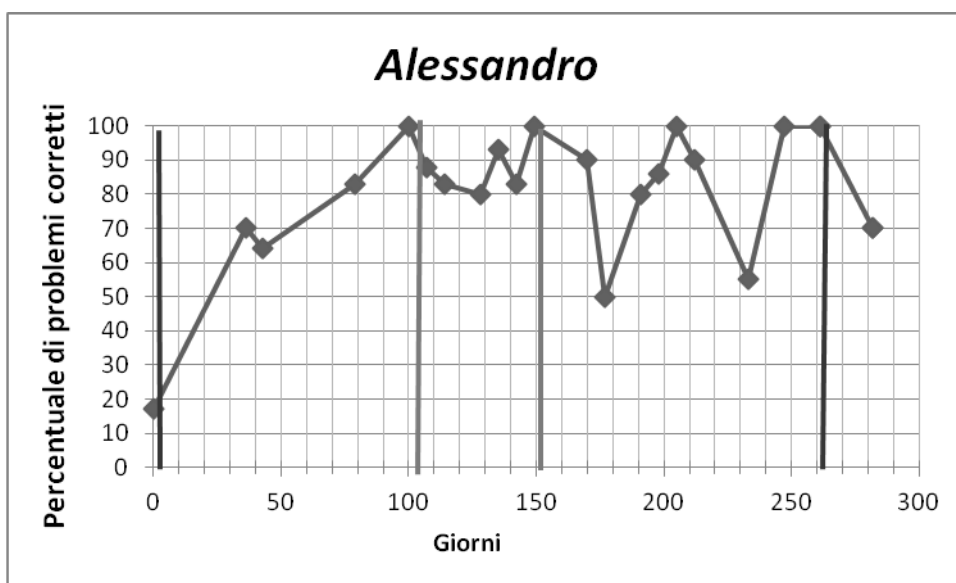


Grafico 4. Il grafico riporta i punteggi ottenuti da Alessandro durante il pre-test, durante l'utilizzo del curriculum TICE e nella fase di post-test

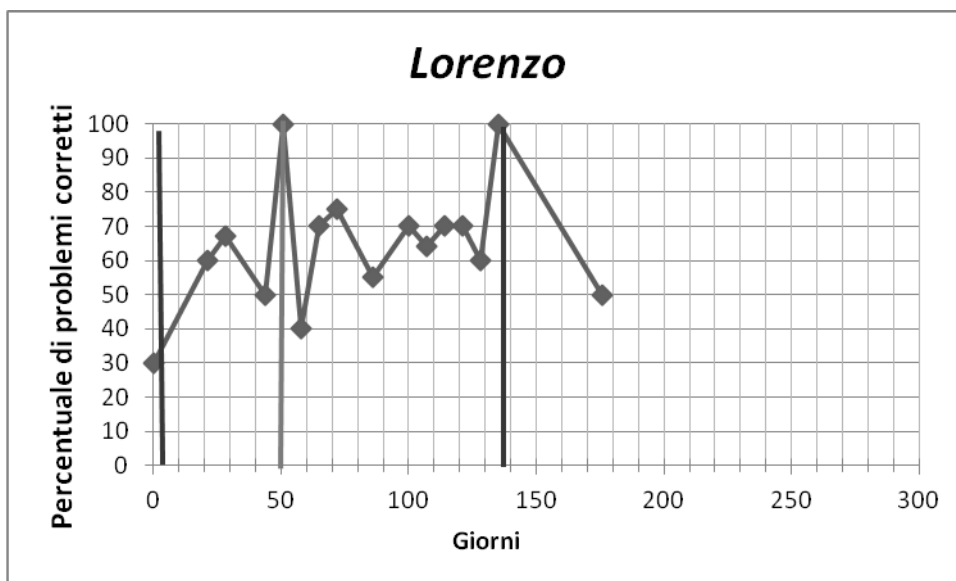


Grafico 5. Il grafico riporta i punteggi ottenuti da Lorenzo durante il pre-test, durante l'utilizzo del curriculum TICE e nella fase di post-test.

Vogliamo evidenziare graficamente la percentuale delle risposte corrette nel pre e nel post test di risoluzione dei problemi aritmetici.

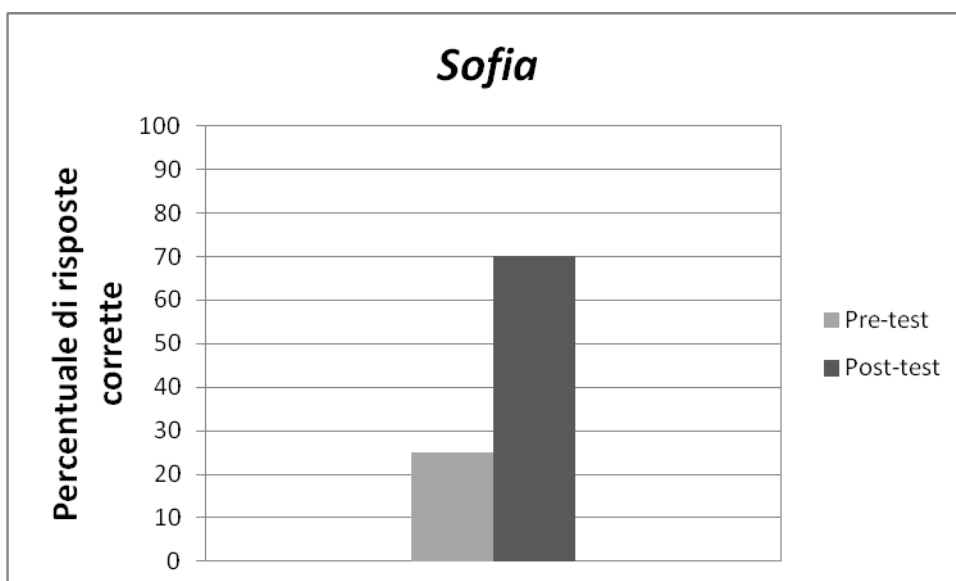


Grafico 6 : punteggi, in percentuale, ottenuti nel pre-test e post- test.

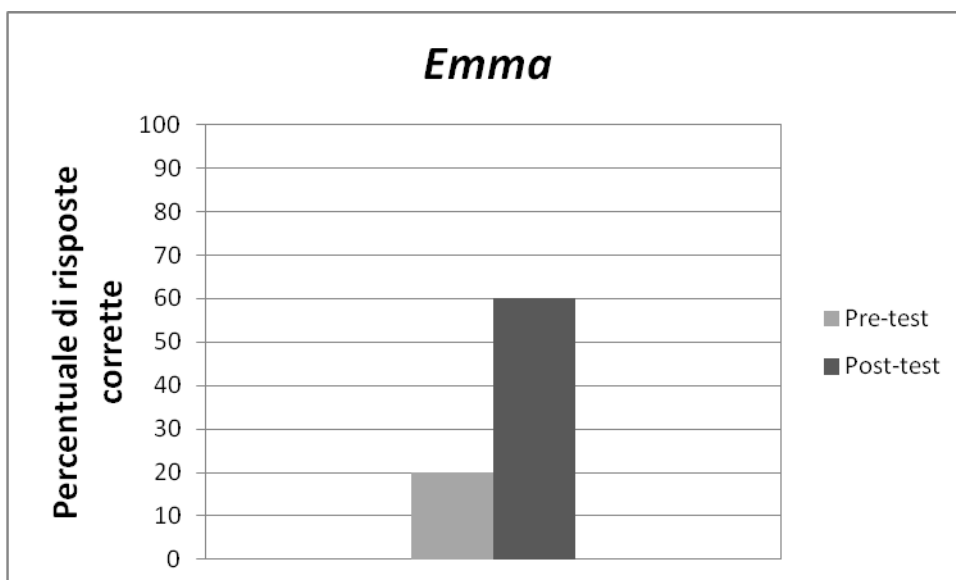


Grafico 7 : punteggi, in percentuale, ottenuti nel pre-test e post- test.

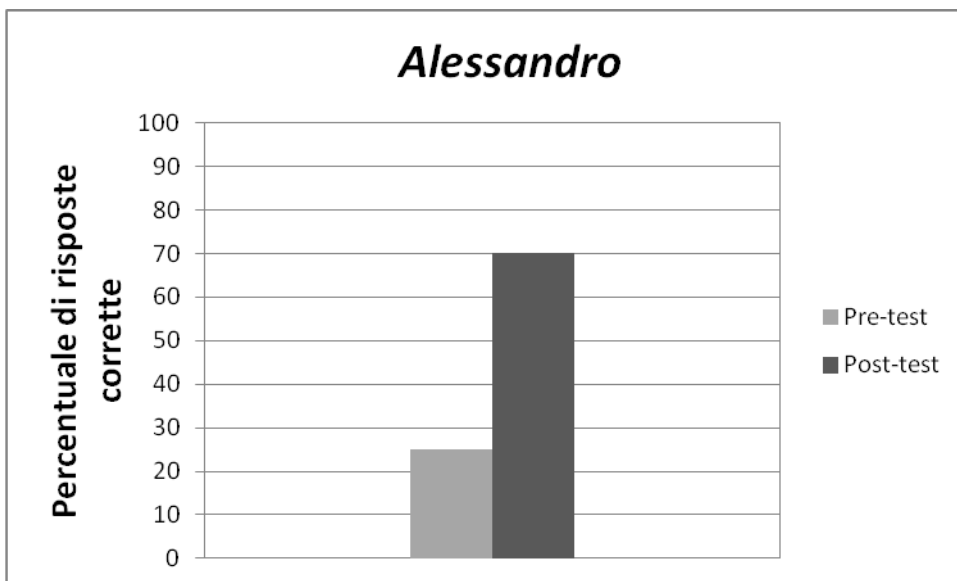


Grafico 8 : punteggi, in percentuale, ottenuti nel pre-test e post- test.

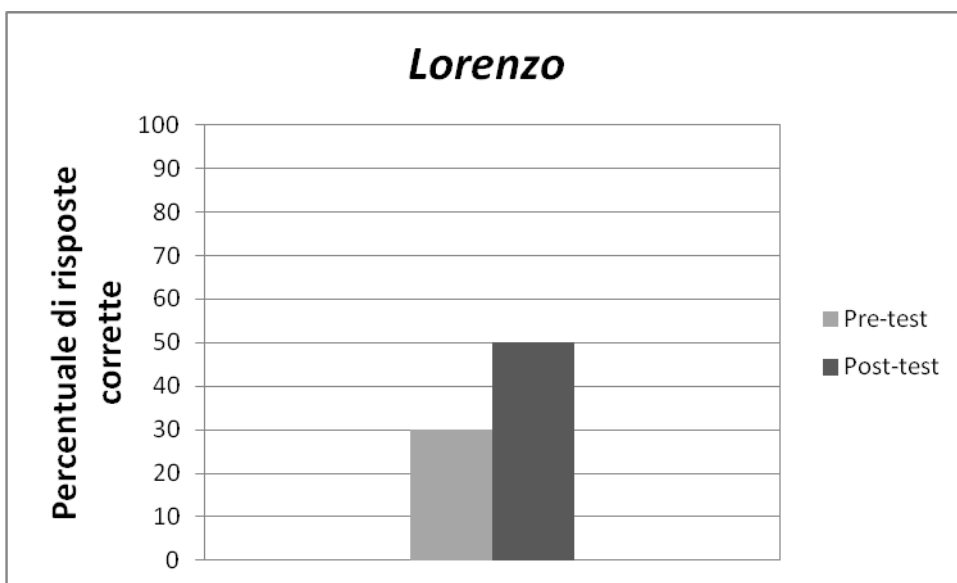


Grafico 9 : punteggi, in percentuale, ottenuti nel pre-test e post- test.

- 3) I punteggi conseguiti rispetto all'ultima variabile dipendente nel pre-test e nel post-test, ovvero il QI misurato tramite Matrici di Raven, sono:
- Partecipante 1: 18 punti pre test; 18 punti post test
 - Partecipante 2: da 25 a 30 punti
 - Partecipante 3: 14 punti pre test, 14 punti di post test.

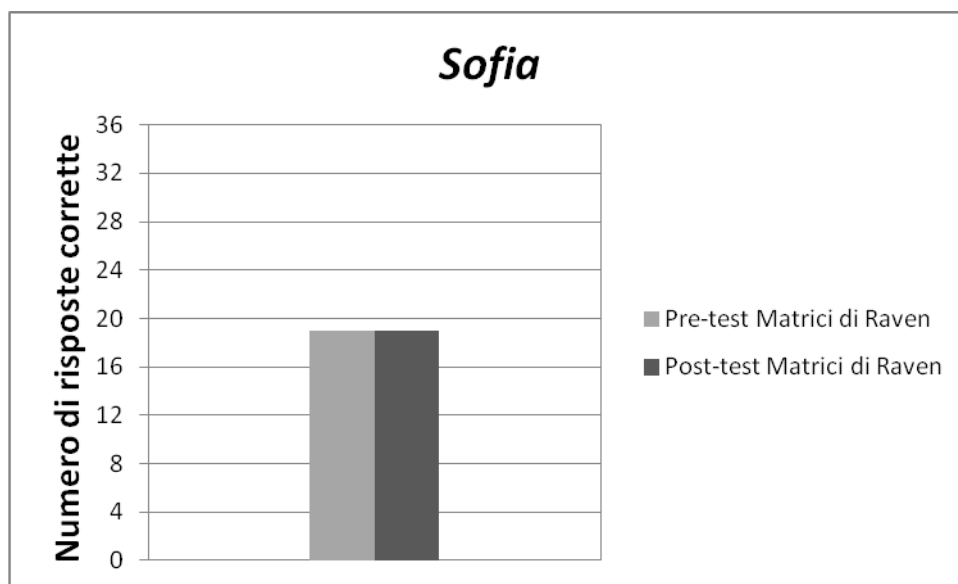


Grafico 10: punteggio ottenuto nel pre-test e post-test.

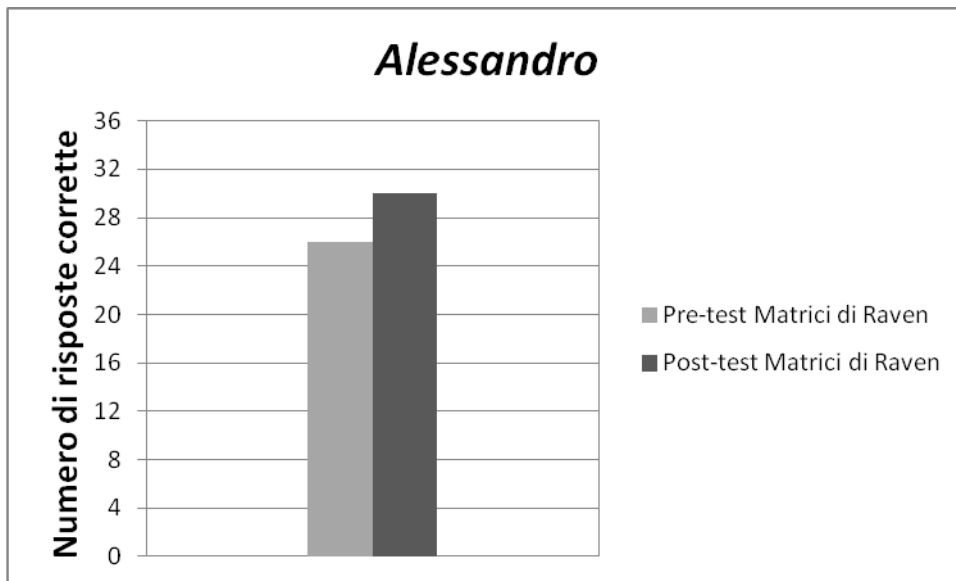


Grafico 11 : punteggio ottenuto nel pre-test e post-test.

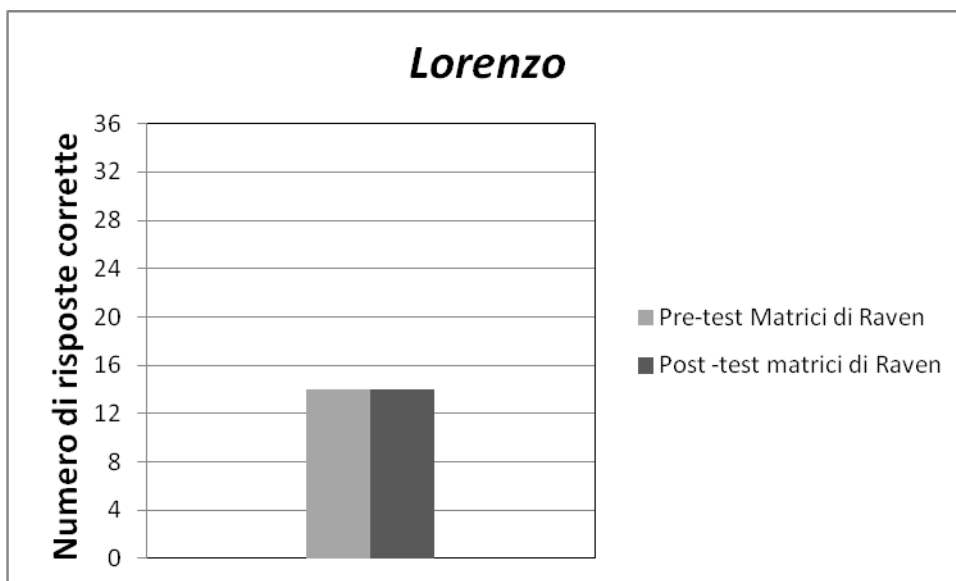


Grafico 12 : punteggio ottenuto nel pre-test e post-test.

Discussione dei dati

I risultati del nostro studio mostrano che l'insegnamento dei problemi aritmetici a studenti che presentano disturbo dell'apprendimento o ritardo mentale tramite il *Curriculum Tice* incrementa il numero di problemi svolti correttamente.

Inoltre, è stato rilevato anche un cambiamento nel comportamento dei bambini di fronte ai problemi (iniziare subito a leggere il problema e a lavorare).

Non abbiamo trovato alcun miglioramento significativo, invece, per quanto riguarda l'incremento del QI, a differenza di quanto riportato in alcune ricerche di letteratura (Whimbey e Lockhead's, 1991).

Come si osserva dai grafici sopra riportati, tutti i bambini, indipendentemente dalle difficoltà presentate, dal livello di partenza (che è basso per tutti e quattro i ragazzi) e dal fatto che abbiano o meno appreso tutti i livelli del *Curriculum*, hanno ottenuto miglioramenti significativi non solo se confrontati rispetto ai punteggi del pre-test e post-test, ma anche rispetto all'inizio e alla fine del punteggio conseguito in ogni livello.

I primi dati riguardanti l'efficacia del *Curriculum Tice* sembrano quindi incoraggianti; i partecipanti allo studio hanno avuto un significativo incremento della performance di risoluzione dei problemi aritmetici. Non si sono invece riscontrati miglioramenti nei livelli di QI come indicato da alcune, quindi sarà una variabile che escluderemo dai prossimi studi. Il comportamento dei bambini di fronte ai problemi operazionalizzato come precedentemente descritto sembra essere qualitativamente migliorato e abbiamo provato a misurarlo attraverso il numero di problemi letti ad alta voce in modo indipendente.

Ci sembra che la variabile più importante da considerare per le prossime ricerche sull'efficacia del *Curriculum* sia il numero di problemi svolti correttamente nel pre e nel post test. Il nostro primo campione di ricerca, però, risulta essere poco rappresentativo della realtà: infatti si tratta di bambini con difficoltà specifiche o ritardo mentale frequentanti un Centro di Apprendimento e di Ricerca per il potenziamento e il recupero di specifiche abilità. Il nostro obiettivo futuro è quello di testare l'efficacia del *Curriculum* in contesti ecologici come quello scolastico; inoltre, vogliamo utilizzarlo in un piccolo gruppo per testare la fattibilità dell'applicazione del Curriculum all'interno di una classe per proporre successivamente alle insegnanti di utilizzare il materiale in autonomia.

Studio 2: il *Curriculum Tice* utilizzato in un piccolo gruppo all'interno di una classe scolastica.

Dopo aver analizzato i risultati del primo studio applicato a bambini che si rivolgevano al Centro di Apprendimento, abbiamo voluto impostare una nuova ricerca per provare l'applicazione del *Curriculum* e la sua efficacia in un contesto di classe. Infatti la costruzione del *Curriculum Tice* per la risoluzione di problemi aritmetici ha avuto fin da principio l'obiettivo di fornire un materiale utile per le insegnanti da utilizzare sia in fase di potenziamento sia in fase di primo insegnamento. Un'ulteriore sfida era rappresentata dalla possibilità di applicare un *Curriculum*, che prevede una serie di risposte da parte degli studenti, all'interno di un gruppo; questo ha richiesto una riflessione sulle strategie più funzionali da utilizzare per sviluppare e favorire lo stesso numero di opportunità di risposta a tutti gli studenti del gruppo. Abbiamo quindi pianificato l'intervento con il *Curriculum Tice* all'interno di una classe scolastica.

Partecipanti e setting

I partecipanti allo studio sono bambini frequentanti una classe 3° di una scuola primaria di Piacenza. Sono stati selezionati 8 partecipanti con prestazione insufficiente al pre test dei problemi del *Curriculum* e 3 partecipanti con prestazione insufficiente non sono stati inseriti nel gruppo sperimentale ma seguivano le regolari lezioni sui problemi tenute dall'insegnante. Solo uno dei partecipanti era stato precedentemente segnalato per sospetto disturbo dell'apprendimento ed era in fase di valutazione. Gli altri studenti non presentavano diagnosi cliniche di alcun tipo.

I bambini lavoravano con il *Curriculum Tice* all'interno della classe in un piccolo gruppo condotto a turno dalle ricercatrici coinvolte nella ricerca che conoscevano il *Curriculum* e utilizzavano abitualmente presso il Centro strategie educative di stampo comportamentale come il rinforzo positivo e un alto tasso di approvazioni, come previsto anche dal copione per l'insegnante all'interno del *Curriculum*.

Disegno sperimentale

La ricerca è stata condotta utilizzando un disegno sperimentale a soggetto singolo con baseline multiple.

Variabile dipendente

Abbiamo deciso di misurare come unica variabile dipendente il numero di problemi svolti correttamente al pre e post test della prova criteriale costruita insieme al *Curriculum Tice*; abbiamo raccolto sia il dato di accuratezza (numero di problemi svolti correttamente) sia quello della velocità (tempo di esecuzione dell'intera prova).

Variabile indipendente

L'intervento è stato condotto mediante l'applicazione del *Curriculum Tice* per la risoluzione dei problemi aritmetici in tutti i 5 livelli.

Procedura

Il disegno di ricerca prevedeva la somministrazione iniziale della pre probe criteriale di risoluzione dei problemi. Dopo la costituzione del campione si iniziava il lavoro con i partecipanti fino al raggiungimento degli obiettivi per ogni livello. Al termine dell'applicazione del *Curriculum* è stata somministrata la post probe criteriale.

Materiale:

per la misurazione della competenza nella risoluzione dei problemi è stata somministrata la prova criteriale costruita insieme al Curriculum. Il trattamento è stato attuato seguendo tutti i 5 livelli del *Curriculum Tice* per la risoluzione dei problemi.

Metodo

Il criterio di inclusione per appartenere al gruppo sperimentale era una prestazione insufficiente al pre test criteriale di problemi aritmetici con somme e sottrazioni contenuto all'interno del *Curriculum Tice*.

Il lavoro di recupero e potenziamento è stato svolto con il gruppo di 8 bambini all'interno della classe in piccolo gruppo mentre gli altri studenti seguivano la tradizionale lezione dell'insegnante sulla risoluzione dei problemi aritmetici. L'applicazione del *Curriculum Tice* al gruppo è stata fatta prevedendo risposte corali (tutti i bambini rispondevano contemporaneamente alle domande del "copione" al cenno dello sperimentatore oppure fornivano brevi risposte scritte sul quaderno quando lo sperimentatore lo richiedeva. Era infatti molto importante seguire il protocollo dell'insegnante e contemporaneamente garantire lo stesso numero di opportunità di risposta a tutti i partecipanti. La scelta di utilizzare risposte

corali e scritte ha sempre consentito a tutti i bambini di rispondere. Nel caso in cui la risposta corale non fosse soddisfacente (ad esempio qualche bambino non aveva risposto) lo sperimentatore riproponeva la domanda e chiedeva ai bambini di rispondere coralmente. La potenza del lavoro all'interno di un gruppo ha spesso consentito ai bambini più insicuri di ascoltare prima la risposta dei compagni (che serviva come prompt) per poi emettere la risposta corretta in modo indipendente.

L'intervento si è svolto nei mesi da Marzo a Maggio 2012 per 2 volte/settimana da 1 ora.

Le giornate in cui ci siamo effettivamente incontrati con i bambini sono state 14, abbiamo svolto in tutto 70 problemi impiegando un tempo effettivo di 5 ore (circa 4 minuti/problema). È stato deciso di passare al livello successivo del Curriculum quando 7 bambini su 8 avevano raggiunto il 100% di accuratezza sul livello precedente.

Risultati

I risultati relativi al numero di problemi svolti correttamente alla pre e post probe criteriale di problemi aritmetici sono i seguenti:

<i>Bambini</i>	<i>Pre-test</i>	<i>Post-test</i>
1	6/11	10/11
2	4/11	10/11
3	5/11	9/11
4	6/11	9/11
5	6/11	7/11
6	6/11	7/11
7	5/11	7/11
8	2/11	7/11

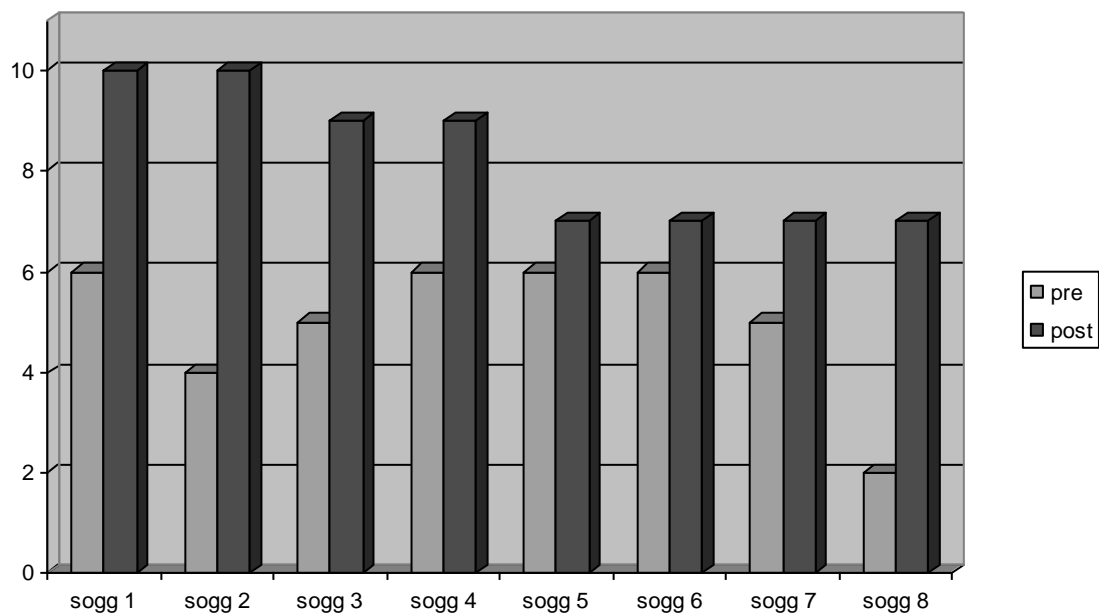


Grafico 13: numero di problemi corretti nel pre e nel post test del Curriculum.

Abbiamo inoltre potuto fare un confronti tra partecipanti grazie al disegno sperimentale a soggetto singolo con baseline multiple, confrontando bambini che hanno partecipato al gruppo di potenziamento e bambini che seguivano la normale lezione tenuta dall'insegnante. I bambini che non hanno partecipato all'intervento in piccolo gruppo hanno iniziato il training con il *Curriculum* da poco tempo, quindi non sono ancora disponibili i dati.

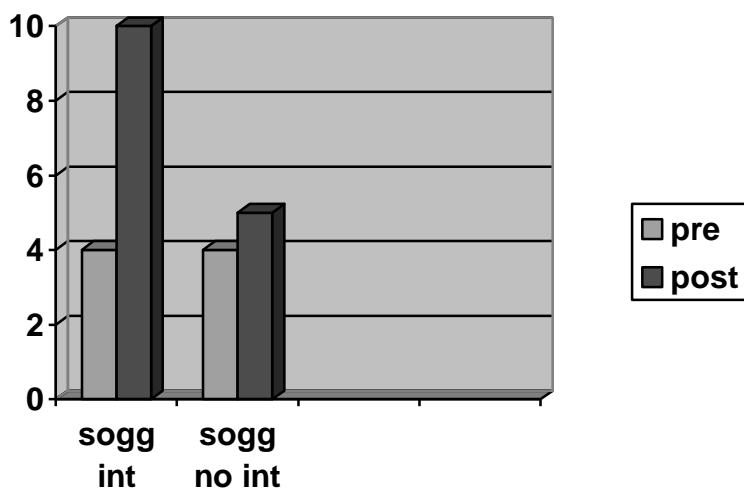


Grafico 14: confronto tra il numero di problemi svolti correttamente da un bambino con trattamento e uno con insegnamento tradizionale (baseline multiple)

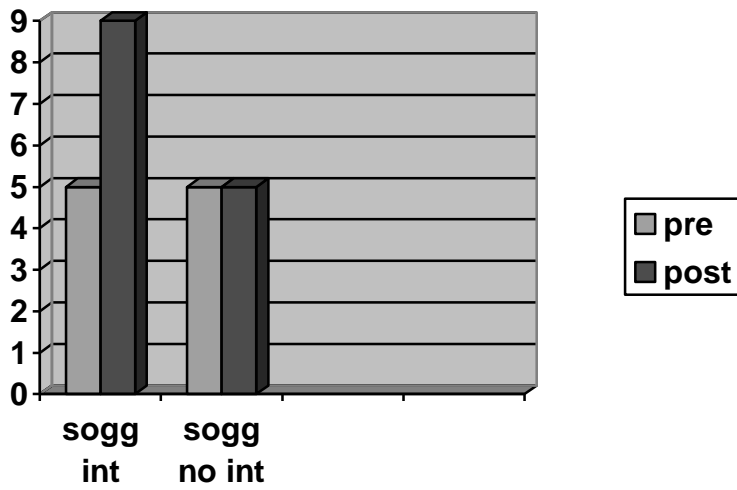


Grafico 15: confronto tra il numero di problemi svolti correttamente da un bambino con trattamento e uno con insegnamento tradizionale (baseline multiple)

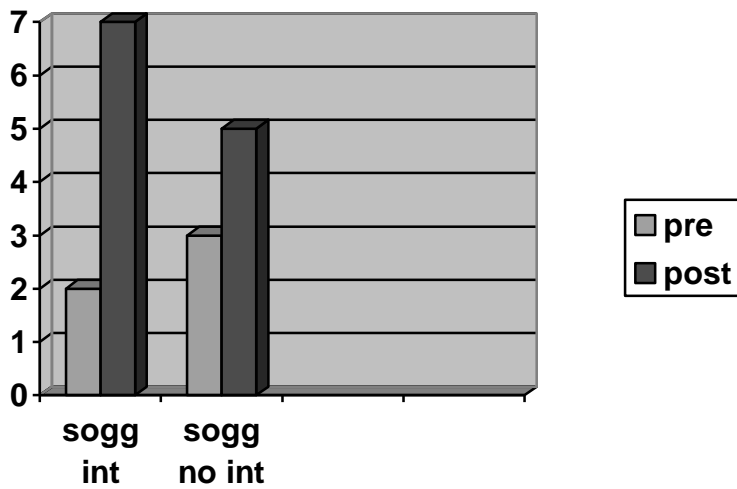


Grafico 16: confronto tra il numero di problemi svolti correttamente da un bambino con trattamento e uno con insegnamento tradizionale (baseline multiple)

Inoltre abbiamo voluto misurare il tempo di esecuzione della prova per misurare il livello di efficacia e di fluency dei bambini nella risoluzione dei problemi. In questa tabella riportiamo il rapporto tra il tempo di esecuzione dell'intera prova e il numero dei problemi corretti nel pre e nel post test.

PARTECIPANTI	TEMPO/PROBLEMI CORRETTI PRE	TEMPO/PROBLEMI CORRETTI POST
1	80''	30''
2	165''	48''
3	120	33''
4	100''	33''
5	130''	68''
6	130''	34''
7	168''	42''
8	450''	42''

L'utilizzo del *Curriculum Tice* prevede un intenso ritmo di lezione, un alto numero di occasioni di risposta da fornire agli studenti e una frequenza elevata di feedback (in linea con i principi più funzionali delle tecniche comportamentali applicate all'educazione); abbiamo quindi misurato il numero di opportunità di risposta sia individuali sia collettive fornite dal ricercatore che utilizzava il *Curriculum* e quelle fornite dall'insegnante che parallelamente conduceva una lezione sulla risoluzione dei problemi. Ecco i risultati:

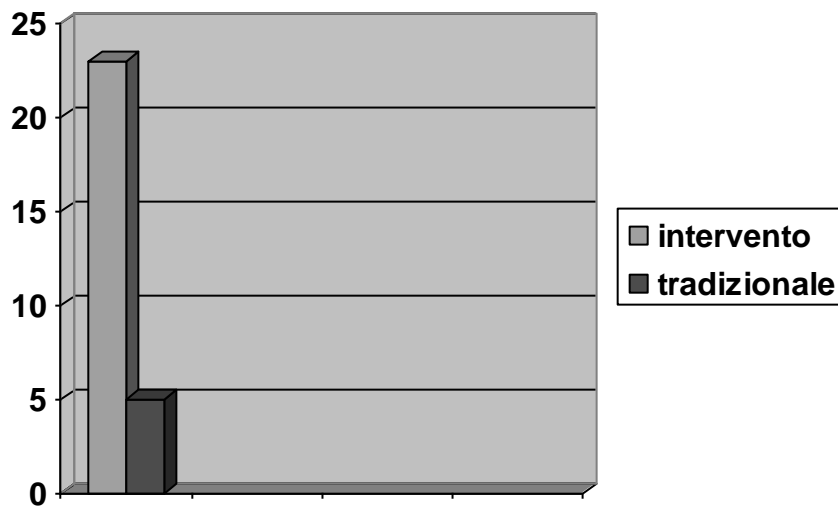


Grafico 17: media del numero di opportunità di risposta fornite dall'insegnante agli studenti nella due condizioni, l'intervento con il *Curriculum* e la lezione tradizionale in sessioni di osservazione da 5 minuti.

Discussione dei dati

I dati mostrano un incremento delle performance nella prova di risoluzione di problemi aritmetici per tutti i bambini; inoltre tutti passano da un livello di insufficienza al pre test (inferiore a 6) ad una prestazione sufficiente nel post test. Il confronto tra 3 bambini inseriti nel gruppo sperimentale e 3 bambini che, a parità di prestazione, seguivano la lezione tradizionale dell'insegnante (baseline mutiple) evidenzia un netto miglioramento rilevato esclusivamente nei bambini trattati con il *Curriculum Tice*.

Il tempo utilizzato dai partecipanti per risolvere i problemi diminuisce drasticamente, indice di una maggiore efficienza e fluency nel compito.

Possiamo inoltre affermare che il metodo proposto attraverso il *Curriculum Tice* mostra delle caratteristiche diverse dall'insegnamento tradizionale, prima tra tutte il coinvolgimento dei bambini misurato attraverso le opportunità di risposta sia individuali sia collettive fornite dall'insegnante.

L'utilizzo del *Curriculum* si è rivelato utile sia per bambini con difficoltà specifiche (DSA, ritardo mentale) sia per quegli studenti che mostrano semplicemente qualche difficoltà nell'affrontare i problemi (come molti dei bambini del gruppo con cui abbiamo lavorato).

L'utilizzo del *Curriculum* all'interno della classe prevedeva l'utilizzo dello strumento da parte di diversi ricercatori che, seppur formati, non avevano la stessa conoscenza del materiale; abbiamo quindi potuto rilevare come l'utilizzo del *Curriculum* da parte di partecipanti diversi è semplice, comodo, agile ed ugualmente efficace: infatti il nostro primario obiettivo era quello di costruire un materiale utilizzabile da persone diverse ma che garantisse lo stesso tipo di insegnamento. L'insegnante viene guidata dal copione del *Curriculum* nel fornire agli studenti un adeguato numero di opportunità di risposta, una guida nelle prime fasi di ogni livello e un giusto feedback per ogni risposta che, essendo guidata, dovrebbe essere quella corretta nel 100% dei casi (apprendimento senza errori).

Il *Curriculum*, contrariamente ad alcuni programmi di insegnamento e di recupero già presenti in commercio, valuta la propria efficacia considerando esclusivamente il numero di problemi corretti svolti dai bambini evitando di valutare le competenze che, seppur necessari prerequisiti per una corretta soluzione, spesso non garantiscono il successo dei bambini nella risoluzione del problema (ad esempio abilità di categorizzazione, pianificazione).

2.3 Conclusioni e prospettive future

La risoluzione di problemi aritmetici è sicuramente un'abilità complessa che comprende competenze scolastiche complesse; la psicologia del comportamento da sempre ha avuto la necessità di utilizzare un metodo di osservazione scientifico anche per lo studio delle variabili interne del ragionamento. La costruzione del *Curriculum Tice* ha avuto proprio l'intento di fornire un materiale utilizzabile dalle diverse professionalità coinvolte nell'insegnamento e nell'educazione, in modo uniforme e replicabile. Il *Curriculum* è un'integrazione tra le caratteristiche del TAPS che prevede la verbalizzazione del ragionamento sottostante alla risoluzione dei problemi e la proposta di un materiale costruito secondo una task analysis, con l'obiettivo di individuare i giusti passaggi per l'insegnamento dei problemi.

Rispetto al campione osservato e analizzando i risultati ottenuti possiamo affermare che l'applicazione del *Curriculum* incide positivamente soprattutto sul numero di problemi svolti correttamente. Inoltre l'insegnamento mediante questa strategia migliora il grado di coinvolgimento dei bambini (numero di risposte sia individuali che collettive) e quindi potrebbe essere impiegato a scuola per favorire un avvicinamento maggiormente piacevole dei bambini ai problemi aritmetici. In aggiunta, il *Curriculum* consente di esercitarsi su un

gran numero di problemi in poco tempo, elemento fondamentale per intensificare i ritmi delle lezioni scolastiche per massimizzare gli effetti dell'insegnamento da un lato e per offrire momenti di pausa dall'altro.

Nonostante l'esiguità del campione e il possibile miglioramento del disegno di ricerca, possiamo valutare positivamente queste prima esperienze di utilizzo del *Curriculum*, soprattutto perché è stato testato sia in un ambiente riabilitativo che prevede un rapporto insegnante-alunno uno a uno sia in un piccolo gruppo all'interno di una classe scolastica.

Questi risultati incoraggiano lo sviluppo di nuove ricerche o progetti futuri, quali:

- replicazioni dello studio con un campione più esteso e con bambini con diverse caratteristiche diagnostiche e di apprendimento;
- costruzione del *Curriculum Tice* anche per moltiplicazione e divisione;
- confronto dell'efficacia e dell'efficienza del Curriculum rispetto ad altri programmi educativi già in commercio per la risoluzione dei problemi;
- proporre l'utilizzo del *Curriculum* non solo in fase di riabilitazione ma anche durante l'insegnamento delle competenze nei primi due anni di scuola primaria
- favorire l'utilizzo del *Curriculum Tice* da parte delle insegnanti all'interno delle loro classi
- strutturare nuove ricerche con un controllo più stretto della variabili intervenienti.

Inoltre abbiamo proposto il Curriculum ad una casa editrice che sta valutando la possibilità di una pubblicazione pensata per raggiungere le insegnanti della scuola primaria proprio per proporre questo nuovo strumento come materiale utilizzato dalla scuola nella pratica di insegnamento quotidiana.

APPENDICE:

Curriculum Tice per la risoluzione dei problemi aritmetici, Copione per l'insegnante dei 5 livelli, primi esempi.

ESEMPIO 1 (livello 1 – addizione) :

Pamela ha adottato 4 gattini la scorsa settimana. Oggi ha trovato altri 3 gattini per strada e li ha portati a casa. Quanti gattini ha ora Pamela?

INSEGNATE DICE/FA

STUDENTE SENTE/DICE

Scrivi sulla lavagna:

Pamela ha adottato 4 gattini la scorsa settimana.
Oggi ha trovato altri 3 gattini per strada e
li ha portati a casa. Quanti gattini ha ora Pamela?

Chiedi ad uno studente di leggerlo ad alta voce.

Pamela ha adottato 4 gattini la scorsa settimana. Oggi ha trovato altri 3 gattini per strada e li ha portati a casa. Quanti gattini ha ora Pamela?

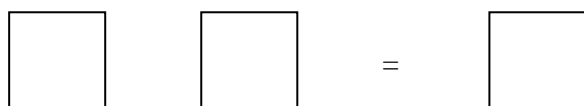
Questo problema è **come una storia**. In una storia, come nella vita reale, tutto accade secondo un ordine.

In un problema-storia dobbiamo capire con quale ordine avvengono i fatti. Dobbiamo trovare cosa accade all'**inizio**, nel **mezzo** e alla **fine**.

L'inizio della storia ci dice **con cosa partire**. La parte centrale dice **cosa accade dopo** e la fine ci dice **come si conclude**.

Quindi disegnerò 3 riquadri e metterò l'uguale prima dell'ultimo quadrato.

Disegna



Inizia con

Cosa accade

Finisce con

Ora siamo pronti per riempire i riquadri.
Vediamo. Cosa ci chiede di trovare il problema?

Quanti gattini ha ora Pamela?

È esatto. Ci chiede il numero di gattini che Pamela ha **alla fine** della storia.
Questo è quello che dobbiamo trovare.

Ok, vediamo cosa **fare** ora. Sappiamo con quanti

gattini **inizia**? Sappiamo quanti gattini ha Pamela **all'inizio** della storia?

Sì

Indica la frase dicendo:

Esatto. È scritto proprio qua, “Pamela ha adottato 4 gattini la scorsa settimana.” Quindi qual è il numero di gattini con il quale inizia?

4

Indica il primo riquadro dicendo:

Esatto, inizia con 4. Quindi quale numero devo scrivere nel primo riquadro?

4

Sì, 4.

Scrivi 4 nel primo riquadro:

$$\boxed{4} \quad \boxed{} = \boxed{}$$

Inizia con Cosa accade Finisce con

Sappiamo cosa accade **dopo** – cosa accade nel **mezzo** della storia?

Sì

Esatto, lo sappiamo

Indica la frase dicendo:

Il problema dice “ha trovato 3 gattini per strada... e li ha portati a casa”. Quanti gattini ha portato a casa Pamela?

3

Sì, ha portato a casa 3 gattini. Scrivo 3 nel riquadro centrale.

Scrivi 3 nel secondo riquadro:

$$\boxed{4} \quad \boxed{3} = \boxed{}$$

Inizia con Cosa accade Finisce con

Ora abbiamo bisogno dell'operazione. Vediamo.
Pamela aveva alcuni gattini ed ha portato a casa qualche gattino **in più**.

Si parla di **unire** gattini con altri gattini o di **separare** gattini da altri gattini?

Unire

Sì. Il problema parla di unire dei gattini con altri gattini.

Qual è il segno per l'addizione?

Il segno più

Esatto. Usiamo il segno più. Lo metto qui.

Scrivi + :

$$\boxed{4} + \boxed{3} = \boxed{}$$

Inizia con Cosa accade Finisce con

Perfetto. Conosciamo il numero di gattini con il quale finisce la storia?

No

Esatto. Non conosciamo il numero di gattini con il quale termina. Quindi metto una X nell'ultimo riquadro. X significa che non lo conosco.

Scrivi X:

$$\boxed{4} + \boxed{3} = \boxed{X}$$

Inizia con Cosa accade Finisce con

→ TALLY

Usa questo formato se lo studente non conosce

la famiglia dei numeri 3, 4, 7.

Ora possiamo risolvere il problema.

Sto per disegnare delle aste sotto ciascun riquadro che contiene un numero.

Indica il riquadro contenente il numero 4 dicendo:

Con quanti iniziamo?

4

Esatto, quindi disegno 4 aste.

Disegna 4 aste:

$$\boxed{4} + \boxed{3} = \boxed{X}$$

Inizia con Cosa accade Finisce con
||||

Indicando il numero centrale chiedi:

Quante aste dovrò disegnare qui?

3

Sì, 3.

Disegna 3 aste:

$$\boxed{4} + \boxed{3} = \boxed{X}$$

Inizia con Cosa accade Finisce con
|||| |||

Indica e scorri con le dita le aste sotto ai riquadri dicendo:

ora quello che dobbiamo fare è contare tutte le aste e trovare qual è il valore di X.

Indica la prima asta sotto il primo riquadro dicendo:

tutti pronti a contare le aste mano a mano che le indico. Partiamo dall' **1**. Pronti...

Indica la prima asta e continua con le successive.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

Quante sono?

7

Sì, 7. Quindi, quanto vale X?

7

Esatto, X vale 7. Scrivo 7 qui.

Cancella X e scrivi 7:

$$\boxed{4} + \boxed{3} = \boxed{7}$$

Inizia con
||||

Cosa accade
|||

Finisce con

Dovremmo aver concluso ma prima controlliamo l'operazione. Per favore leggete l'operazione.

$$4 + 3 = 7$$

L'operazione è corretta?

Sì

Sì, l'operazione è esatta. Quindi, quanti gattini ha ora Pamela?

7 gattini
(gli studenti devono dire numero)

Sì, ora Pamela ha 7 gattini.

ESEMPIO 2 (livello 1 – sottrazione) :

Tommaso ha un sacchetto con 9 cioccolatini. Ne da 4 a suo fratello. Quanti cioccolatini ha ora Tommaso?

INSEGNATE DICE/FA

STUDENTE SENTE/DICE

Scrivi sulla lavagna:

Tommaso ha un sacchetto con 9 cioccolatini.
Ne da 4 a suo fratello. Quanti cioccolatini ha ora Tommaso?

Chiedi ad uno studente di leggerlo ad alta voce.

Tommaso ha un sacchetto con 9 cioccolatini. Ne da 4 a suo fratello. Quanti cioccolatini ha ora Tommaso?

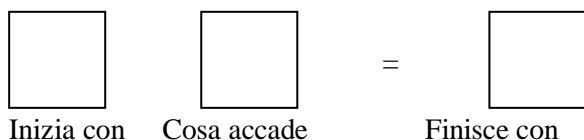
Questo problema è **come una storia**. In una storia, come nella vita reale, tutto accade secondo un ordine.

In un problema-storia dobbiamo capire con quale ordine avvengono i fatti. Dobbiamo trovare cosa accade all'**inizio**, nel **mezzo** e alla **fine**.

L'inizio della storia ci dice **con cosa partire**. La parte centrale dice **cosa accade dopo** e la fine ci dice **come si conclude**.

Quindi disegnerò 3 riquadri e metterò l'uguale prima dell'ultimo quadrato.

Disegna



Ora siamo pronti per riempire i riquadri. Vediamo. Cosa ci chiede di trovare il problema?

È esatto. Ci chiede il numero di cioccolatini che Tommaso ha **alla fine** della storia. Questo è quello che dobbiamo trovare.

Ok, vediamo cosa **fare** ora. Sappiamo con quanti cioccolatini **iniziamo**? Sappiamo quanti cioccolatini aveva Tommaso **all'inizio** della storia?

Indica la frase dicendo:

Esatto. È scritto proprio qua, "Tommaso ha un sacchetto con 9 cioccolatini." Quindi qual è il primo numero?

Indica il primo riquadro dicendo:

Esatto, inizia con 9. Quindi quale numero devo scrivere nel primo riquadro?

Quanti cioccolatini ha ora Tommaso?

Si

9

9

Sì, 9.

Scrivi 9 nel primo riquadro:

$$\boxed{9} \quad \boxed{} = \boxed{}$$

Inizia con Cosa accade Finisce con

Sappiamo cosa accade **dopo** – cosa accade nel **mezzo** della storia?

Sì

Esatto, lo sappiamo

Indica la frase dicendo:

Il problema dice “ne da 4 a suo fratello”. Quanti cioccolatini ha dato Tommaso nel mezzo della storia?

4

Sì, ha dato 4 cioccolatini. Scrivo 4 nel riquadro centrale.

Scrivi 4 nel secondo riquadro:

$$\boxed{9} \quad \boxed{4} = \boxed{}$$

Inizia con Cosa accade Finisce con

Ora abbiamo bisogno dell'operazione. Vediamo. Tommaso aveva dei cioccolatini e poi ne da alcuni a suo fratello.

Si parla di **prendere** qualche cioccolatino **in più** o di **darne** alcuni? Si tratta di unire o separare?

Separare

Sì, separare. Tommaso ha iniziato con 9 cioccolatini e poi ne ha dati via alcuni. I problemi nei quali si separa sono problemi con sottrazione.

Qual è il segno per la sottrazione?

Il segno meno

Esatto. Usiamo il segno meno. Lo metto qui.

Scrivi - :

$$\boxed{9} - \boxed{4} = \boxed{}$$

Inizia con Cosa accade Finisce con

Perfetto. Conosciamo il numero di cioccolatini con il cui finisce la storia?

No

Esatto. Non conosciamo il numero di cioccolatini con il quale termina. Quindi metto una X nell'ultimo riquadro. X significa che non lo conosco.

Scrivi X:

$$\boxed{9} - \boxed{4} = \boxed{X}$$

Inizia con Cosa accade Finisce con

→ TALLY

Usa questo formato se lo studente non conosce la famiglia dei numeri 4, 5, 9.

Ora possiamo risolvere il problema.

Sto per disegnare delle aste sotto ciascun riquadro che contiene un numero.

Indica il riquadro contenente il numero 9 dicendo:

Con quanti iniziamo?

9

Esatto, quindi disegno 9 aste.

Disegna 9 aste:

$$\boxed{9} - \boxed{4} = \boxed{X}$$

Inizia con Cosa accade Finisce con
|||||||

Indicando il riquadro centrale chiedi:

A quale numero di aste fa riferimento il riquadro?

4

Sì, 4.

Indica il segno meno dicendo:

attenzione, sto sottraendo 4, quindi quante aste devo togliere?

4

Sì tolgo 4 aste perché è meno 4.

Indica l'ultima asta dicendo:

tutti pronti a contare le aste che tolgo.
Quando ne ho tolte 4 dite stop. Prontiii

Togli 4 aste:

$$\boxed{9} - \boxed{4} = \boxed{X}$$

Inizia con Cosa accade Finisce con
|||||+ + +

1, 2, 3, 4, Stop

Bene. Abbiamo tolto 4.

Indica e scorri con le dita le aste sotto ai riquadri dicendo:

ora posso trovare il valore di X. Quello che devo fare è contare quante ne ho lasciate.

Indica la prima asta dicendo:

tutti pronti a contare le aste mano a mano che le indico. Partiamo dall' **1**. Pronti...

Indica la prima asta e continua con le successive.

1, 2, 3, 4, 5.

Quante sono?

5

Sì, 5. Quindi, quanto vale X?

5

Esatto, X vale 5. Scrivo 5 qui.

Cancella X e scrivi 5:

$$\boxed{9} - \boxed{4} = \boxed{5}$$

Inizia con

||||

Cosa accade

|||

Finisce con

Dovremmo aver concluso ma prima controlliamo l'operazione. Per favore leggete l'operazione.

$$9 - 4 = 5$$

L'operazione è corretta?

Sì

Sì, l'operazione è esatta. Quindi, quanti cioccolatini ha ora Tommaso?

5 cioccolatini
(gli studenti devono dire numero)

Sì, ora Tommaso ha 5 cioccolatini.

ESEMPIO 3 (livello 1 – addizione) :

Ieri Daniele ha ricevuto 2 euro per aver sistemato il giardino. Oggi ha ricevuto 7 euro per aver lavato l'auto del papà. Quanti soldi ha ora Daniele?

INSEGNATE DICE/FA

STUDENTE SENTE/DICE

Scrivi sulla lavagna:

Ieri Daniele ha ricevuto 2 euro per aver sistemato il giardino. Oggi ha ricevuto 7 euro per aver lavato l'auto del papà. Quanti soldi ha ora Daniele?

Chiedi ad uno studente di leggerlo ad alta voce.

Ieri Daniele ha ricevuto 2 euro per aver sistemato il giardino. Oggi ha

ricevuto 7 euro per aver lavato l'auto del papà. Quanti soldi ha ora Daniele?

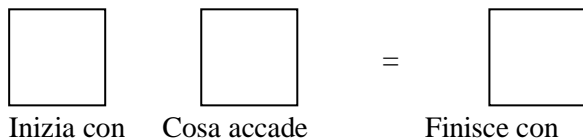
Questo problema/storia ha un inizio, una parte centrale ed una fine. Ricordate, l'inizio della storia ci dice con cosa partiamo, la parte centrale cosa accade dopo e la fine con cosa finiamo. Quindi, quanti riquadri disegnerò?

3

Esatto. E dove metterò il segno uguale?

Prima dell'ultimo riquadro

Disegna:



Ora siamo pronti per riempire i riquadri. Vediamo. Cosa ci chiede di trovare il problema?

Quanti soldi ha ora Daniele?

È esatto. Ci chiede quanti soldi ha ora Daniele. Quindi ci chiede il numero con il quale inizia, cosa accade nel mezzo o il numero con il quale termina?

Il numero con il quale termina

Sì, ci chiede di trovare il numero di euro con il quale termina, i soldi che ha Daniele alla fine della storia.

Vediamo cosa conosciamo. Sappiamo con quale Numero inizia? Sappiamo quanti euro riceve All'inizio della storia?

Sì

Indica la frase dicendo:

Esatto. È scritto proprio qua, "Teri Daniele ha ricevuto 2 euro per aver sistemato il giardino." Quindi quale numero devo scrivere nel primo Riquadro, quello che ci dice con quanto inizia Daniele?

2

Scrivi 2 nel primo riquadro:

$$\boxed{2} \quad \boxed{} = \boxed{}$$

Inizia con Cosa accade Finisce con

Ora sappiamo cosa accade nel mezzo della storia?

Sì

Esatto, lo sappiamo il problema dice “Oggi ha ricevuto 7 euro per aver lavato l’auto del papà”.
Che numero scrivo nel riquadro centrale?

7

Esatto, 7.

Scrivi 7 nel secondo riquadro:

$$\boxed{2} \quad \boxed{7} = \boxed{}$$

Inizia con Cosa accade Finisce con

Ora abbiamo bisogno dell’operazione. Vediamo.
Daniele aveva alcuni euro e ne ha ricevuti altri **in più**. Si parla di unire o di separare?

Unire

Sì. I problemi che parlano di ottenere una quantità in più di qualcosa riguardano l’unire.

Qual è il segno per l’addizione?

Il segno più

Esatto. Usiamo il segno più. Lo metto qui.

Scrivi + :

$$\boxed{2} + \boxed{7} = \boxed{}$$

Inizia con Cosa accade Finisce con

Perfetto. Conosciamo quanti euro ha alla fine Daniele?

No

Esatto. Non conosciamo il numero di gattini con il quale termina. Quindi metto una X nell'ultimo riquadro. X significa che non lo conosco.

Scrivi X:

$$\boxed{2} + \boxed{7} = \boxed{X}$$

Inizia con Cosa accade Finisce con

→ TALLY

Usa questo formato se lo studente non conosce la famiglia dei numeri 2, 7, 9.

Ora possiamo risolvere il problema.

Sto per disegnare delle aste sotto ciascun riquadro che contiene un numero.

Indica il riquadro contenente il numero 4 dicendo:

Con quanti iniziamo?

2

Esatto, quindi disegno 2 aste.

Disegna 4 aste:

$$\boxed{2} + \boxed{7} = \boxed{X}$$

Inizia con Cosa accade Finisce con

||

Indicando il numero centrale chiedi:

Quante aste dovrò disegnare qui?

7

Sì, 7.

Disegna 7 aste:

$$\boxed{2} + \boxed{7} = \boxed{X}$$

Inizia con Cosa accade Finisce con
|| |||||

Indica e scorri con le dita le aste sotto ai riquadri dicendo:

ora quello che dobbiamo fare è contare tutte le aste e trovare qual è il valore di X.

Indica la prima asta sotto il primo riquadro dicendo:

tutti pronti a contare le aste mano a mano che le indico. Partiamo dall' 1. Pronti...

Indica la prima asta e continua con le successive.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Quante sono?

9

Sì, 9. Quindi, quanto vale X?

9

Esatto, X vale 9. Scrivo 9 qui.

Cancello X e scrivo 9:

$$\boxed{2} + \boxed{7} = \boxed{9}$$

Inizia con Cosa accade Finisce con
|| |||||

Dovremmo aver concluso ma prima controlliamo l'operazione. Per favore leggete l'operazione.

$2 + 7 = 9$

L'operazione è corretta?

Sì

Sì, l'operazione è esatta. Quindi, quanti euro ha ora Daniele?

9 euro
(gli studenti devono dire numero)

Sì, ora Daniele ha 9 euro.

ESEMPIO 4 (livello 1 – sottrazione) :

Carlo ha messo 8 fogli di carta sul tavolo. 2 sono volati via. Quanti fogli ci sono ancora sul tavolo?

INSEGNATE DICE/FA

STUDENTE SENTE/DICE

Scrivi sulla lavagna:

Carlo ha messo 8 fogli di carta sul tavolo.
2 sono volati via. Quanti fogli ci sono ancora sul tavolo?

Chiedi ad uno studente di leggerlo ad alta voce.

Carlo ha messo 8 fogli di carta sul tavolo. 2 sono volati via. Quanti fogli ci sono ancora sul tavolo?

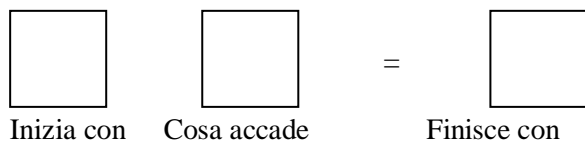
Questo problema/storia ha un inizio, una parte centrale ed una fine. Ricordate, l'inizio della storia ci dice con cosa partiamo, la parte centrale cosa accade dopo e la fine con cosa finiamo. Quindi, quanti riquadri disegnerò?

3

Esatto. E dove metterò il segno uguale?

Prima dell'ultimo riquadro

Disegna:



Ora siamo pronti per riempire i riquadri.
Vediamo. Cosa ci chiede di trovare il problema?

Esatto. Quindi ci sta chiedendo il numero iniziale, quello che ci dice cosa accade dopo o quello finale?

Quanti fogli ci sono ancora sul tavolo?

Sì, ci chiede di trovare il numero di fogli con il quale termina.

Il numero con il quale termina

Vediamo cosa conosciamo. Sappiamo con quale numero inizia? Sappiamo quanti fogli ci sono sul tavolo all'inizio della storia?

Sì

Indica la frase dicendo:

Esatto. È scritto proprio qua, "Carlo ha messo 8 fogli di carta sul tavolo". Quale numero devo scrivere nel primo riquadro?

8

Esatto, 8.

Scrivi 8 nel primo riquadro:



Inizia con Cosa accade Finisce con

Ora sappiamo cosa accade nel mezzo della storia?

Sì

Esatto, lo sappiamo il problema dice "2 sono volati via". Quindi quale numero scrivo nel riquadro centrale?

2

Esatto, 2.

Scrivi 2 nel secondo riquadro:



Inizia con Cosa accade Finisce con

Ora abbiamo bisogno dell'operazione. Vediamo. C'erano alcuni fogli sul tavolo, poi alcuni sono volati via. Si parla di unire o di separare?

Separare

Sì. Il problema riguarda il separare. Qual è il segno per la separazione?

Il segno meno

Esatto. Usiamo il segno meno. Lo metto qui.

Scrivi - :

$$\boxed{8} - \boxed{2} = \boxed{}$$

Inizia con Cosa accade Finisce con

Perfetto. Sappiamo il numero con il quale finisce?

No

Esatto. Non conosciamo il numero di fogli rimasti sul tavolo. Quindi metto una X nell'ultimo riquadro.

Scrivi X:

$$\boxed{8} - \boxed{2} = \boxed{X}$$

Inizia con Cosa accade Finisce con

→ TALLY

Usa questo formato se lo studente non conosce la famiglia dei numeri 2, 6, 8..

Ora possiamo risolvere il problema.

Sto per disegnare delle aste sotto il riquadro contenente il numero con il quale inizia il problema

Indica il riquadro contenente il numero 8 dicendo:

Con quanti iniziamo?

8

Esatto, quindi disegno 8 aste.

Disegna 8 aste:

$$\boxed{8} - \boxed{2} = \boxed{X}$$

Inizia con Cosa accade Finisce con
|||||||

Indicando il numero centrale chiedi:

A quale numero di aste fa riferimento il riquadro?

2

Sì, 2.

Indica il segno meno dicendo:

attenzione, sto sottraendo 2, quindi quante
aste devo togliere?

2

Sì tolgo 2 aste perché è meno 2.

Indica l'ultima asta dicendo:

tutti pronti a contare le aste che tolgo.
Quando ne ho tolte 2 dite stop. Prontiii

Togli 2 aste:

$$\boxed{8} - \boxed{2} = \boxed{X}$$

Inizia con Cosa accade Finisce con
|||||H

1, 2, Stop

Bene. Abbiamo tolto 2.

*Indica e scorri con le dita le aste sotto ai riquadri
dicendo:*

ora posso trovare il valore di X. Quello che devo
fare è contare quante ne ho lasciate.

Indica la prima asta dicendo:

tutti pronti a contare le aste mano a mano che le

indico. Partiamo dall' 1. Pronti...

Indica la prima asta e continua con le successive.

1, 2, 3, 4, 5, 6.

Quante sono?

6

Sì, 6. Quindi, quanto vale X?

6

Esatto, X vale 6. Scrivo 6 qui.

Cancella X e scrivi 6:

$$\boxed{8} - \boxed{2} = \boxed{6}$$

Inizia con

Cosa accade

Finisce con

|||||H

Dovremmo aver concluso ma prima controlliamo l'operazione. Per favore leggete l'operazione.

$8 - 2 = 6$

L'operazione è corretta?

Sì

Sì, l'operazione è esatta. Quindi, quanti fogli sono rimasti sul tavolo?

6 fogli
(gli studenti devono dire numero)

Sì, ora sul tavolo ci sono 6 fogli.

PROTOCOLLO DELL'INSEGNANTE PROBLEMI
Livello 2 - ADDIZIONE E SOTTRAZIONE
 $9+x=12$ e $12-x=3$

Parte 1. MODELLO

ESEMPIO 1 (livello 2 – addizione) :

Pamela ha 4 euro. Poi la mamma le dà altri euro. Ora Pamela ha 7 euro. Quanti euro le ha dato la madre di Pamela?

INSEGNANTE DICE/FA

STUDENTE SENTE/DICE

Scrivi sulla lavagna:

Pamela ha 4 euro. Poi la mamma le dà altri euro.
Ora Pamela ha 7 euro.
Quanti euro le ha dato la madre di Pamela?

Chiedi ad uno studente di leggerlo ad alta voce.

Pamela ha 4 euro. Poi la mamma le dà altri euro. Ora Pamela ha 7 euro. Quanti euro le ha dato la madre di Pamela?

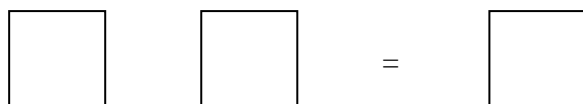
Questo problema **è come una storia**. In una storia, come nella vita reale, tutto accade secondo un ordine.

In un problema-storia dobbiamo capire con quale ordine avvengono i fatti. Dobbiamo trovare cosa accade all'**inizio**, nel **mezzo** e alla **fine**.

L'inizio della storia ci dice **con che cosa cominciamo**. La parte centrale dice **cosa accade dopo** e la fine ci dice **come si conclude**.

Quindi disegnerò 3 riquadri e metterò l'uguale prima dell'ultimo quadrato.

Disegna:



Inizia con

Cosa accade

Finisce con

Ora siamo pronti per riempire i riquadri.
Vediamo. Cosa ci chiede di trovare il problema?

Quanti euro ha dato la madre a Pamela?

È esatto. Ci chiede “quanti euro ha dato la madre a Pamela”. Ci chiede il numero che indica **cosa accade** nella **parte centrale** della storia.
Questo è quello che dobbiamo trovare.

Ok, vediamo cosa **fare** ora. Sappiamo con quanti euro **inizia**? Sappiamo quanti euro ha Pamela **all’inizio** della storia? Sì.

Indica la frase dicendo:

Esatto. È scritto proprio qua, “Pamela ha 4 euro.”
Quindi qual è il numero di euro con il quale inizia? 4.

Indica il primo riquadro dicendo:

Esatto, inizia con 4. Quindi quale numero devo scrivere nel primo riquadro? 4.

Sì, 4.

Scrivi 4 nel primo riquadro:



Inizia con Cosa accade Finisce con

Sappiamo cosa accade **dopo** – cosa accade nel **mezzo** della storia? No.

Esatto, non lo sappiamo!

Indica la frase dicendo:

Il problema dice “la sua mamma le ha dato qualche altro euro”. Quindi metterò una x nel riquadro
Cosa accade. X significa “non lo so”.
Scrivi x nel riquadro centrale come mostrato:

$$\boxed{4} \quad \boxed{X} \quad = \quad \boxed{}$$

Inizia con Cosa accade Finisce con

Ora abbiamo bisogno del segno. Vediamo.
Pamela aveva alcuni euro e poi la mamma le ha dato qualche altro euro.

Si parla di **unire** gli euro con altri euro o di **separare** gli euro da altri euro?

Unire.

Sì. Il problema parla di unire degli euro con altri euro.
I problemi in cui si parla di unire sono i problemi in cui si utilizza l'addizione.

Qual è il segno per l'addizione?

Il segno più.

Esatto. Usiamo il segno più. Lo metto qui.

Scrivi + :

$$\boxed{4} \quad + \quad \boxed{X} \quad = \quad \boxed{}$$

Inizia con Cosa accade Finisce con

Perfetto. Conosciamo il numero di euro con il quale Pamela arriva alla fine della storia?

Sì.

Esatto. Conosciamo il numero di euro con il quale arriva alla fine.
Con quanti euro Pamela arriva alla fine?

7.

Sì, 7. Quindi scrivo 7 nell'ultimo riquadro.
Il riquadro che dice con quanti **finisce**.

Scrivi 7:

$$\boxed{4} + \boxed{X} = \boxed{7}$$

Inizia con Cosa accade Finisce con

→ TALLY

Usa questo formato se lo studente non conosce la famiglia dei numeri 3, 4, 7.

Ora possiamo risolvere il problema.

Sto per disegnare delle aste per trovare il valore della x.

Indica il riquadro contenente il numero 4 dicendo:

Con quanti iniziamo?

4.

Esatto, quindi disegno 4 aste.

Disegna 4 aste:

$$\boxed{4} + \boxed{X} = \boxed{7}$$

Inizia con Cosa accade Finisce con
 ||||

Indicando il numero centrale chiedi:

C'è un numero qui che mi dice quante aste dovrò disegnare?

No.

Esatto. Non c'è. Quindi andrò all'ultimo riquadro. Conosco l'ultimo numero? So con quanto finisce Pamela?

Sì.

Esatto, lo so! Con quanto finisce Pamela?

7.

Indica l'ultimo riquadro dicendo:

Sì, lei finisce con 7 euro.

Indica la parte sinistra dell'equazione (la parte con 4+x) dicendo:

Quindi ho bisogno in tutto di 7 aste a sinistra dell'uguale.

Indica e conta le aste sotto i riquadri fermandoti sotto il riquadro centrale:

Ora ciò che dobbiamo fare per terminare è disegnare le aste sotto questo riquadro per trovare quanto vale la X. Tutti pronti a contare le aste man mano che le disegno. Ricordati di dire stop quando arrivo a 7.

Ho già 4 aste da questa parte, quindi comincerò a disegnare dalla quinta.

Scorri sotto le 4 aste dicendo quattro ..., poi inizia a disegnare quando dici 5. Fermati a 7.

Pronti.....quattro...

Quattro....5, 6,7, stop.

Disegna 3 aste mentre tu e lo studente dite "5, 6, 7":

$$\boxed{4} + \boxed{X} = \boxed{7}$$

Inizia con	Cosa accade	Finisce con

Benissimo!! Ora contiamo quante aste ho disegnato. Iniziamo da **uno**. Prontiii.....

Indica la prima asta e continua con le successive.

1, 2, 3.

Quante sono?

3.

Sì, 3. Quindi, quanto vale X?

3.

Esatto, X vale 3. Scrivo 3 qui.

Cancella X e scrivi 3:

$$\boxed{4} + \boxed{3} = \boxed{7}$$

Inizia con
||||

Cosa accade
|||

Finisce con

Dovremmo aver concluso ma prima controlliamo l'operazione. Per favore leggete l'operazione.

$$4 + 3 = 7$$

L'operazione è corretta?

Sì.

Sì, l'operazione è esatta. Quindi, quanti euro ha dato la madre a Pamela? Non dimenticare l'etichetta.

3 euro
(gli studenti devono dire numero e etichetta).

Sì, la mamma di Pamela le ha dato 3 euro.

ESEMPIO 2 (LIVELLO 2 – Sottrazione) :

Ed ha raccolto 10 mele. Uno scoiattolo si avvicina e gli porta via alcune delle mele. Ora a Ed sono rimaste solo 8 mele. Quante mele gli ha rubato lo scoiattolo?

INSEGNANTE DICE/FA

STUDENTE SENTE/DICE

Scrivi sulla lavagna:

Ed ha raccolto 10 mele. Uno scoiattolo si avvicina e gli porta via alcune delle mele. Ora a Ed sono rimaste solo 8 mele. Quante mele gli ha rubato lo scoiattolo?

Chiedi ad uno studente di leggerlo ad alta voce.

Ed ha raccolto 10 mele. Uno scoiattolo si avvicina e gli porta via alcune delle mele. Ora a Ed sono rimaste solo 8 mele. Quante mele gli ha rubato lo scoiattolo?

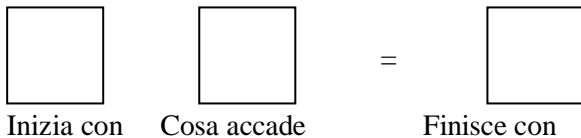
Questo problema è **come una storia**. In una storia, come nella vita reale, tutto accade secondo un ordine.

In un problema-storia dobbiamo capire con quale ordine avvengono i fatti. Dobbiamo trovare cosa accade all'**inizio**, nel **mezzo** e alla **fine**.

L'inizio della storia ci dice **con che cosa cominciamo**. La parte centrale dice **cosa accade dopo** e la fine ci dice **come si conclude**.

Quindi disegnerò 3 riquadri e metterò l'uguale prima dell'ultimo quadrato.

Disegna:



Ora siamo pronti per riempire i riquadri. Vediamo. Cosa ci chiede di trovare il problema?

Quante mele gli ha rubato lo scoiattolo?

È esatto. Ci chiede “quante mele gli ha rubato lo scoiattolo”. Ci chiede il numero che indica **cosa accade** nella **parte centrale** della storia. Questo è quello che dobbiamo trovare.

Ok, vediamo cosa **dobbiamo sapere**. Sappiamo quante mele aveva **all'inizio** della storia? Con quante mele **ha cominciato**?

Sì.

Indica la frase dicendo:

Esatto. È scritto proprio qua, “Ed ha raccolto 10 mele.” Quindi qual è il numero di mele con il quale **inizia**?

10.

Indica il primo riquadro dicendo:

Esatto, inizia con 10. Quindi quale numero devo scrivere nel primo riquadro?

10.

Sì, 10.

Scrivi 10 nel primo riquadro:

$$\boxed{10} \quad \boxed{} = \boxed{}$$

Inizia con Cosa accade Finisce con

Sappiamo cosa accade **dopo** nella storia?

No.

Esatto, non lo sappiamo!

Indica la frase dicendo:

Il problema dice “Uno scoiattolo si avvicina e gli porta via alcune delle mele”. Ma non dice quante mele ha Ed. Quindi metterò una x nel riquadro Cosa accade. X significa “non lo so”.

Scrivi x nel riquadro centrale come mostrato:

$$\boxed{10} \quad \boxed{x} = \boxed{}$$

Inizia con Cosa accade Finisce con

Ora abbiamo bisogno del segno. Vediamo.

Ed aveva delle mele, poi è arrivato uno scoiattolo e gli ha portato via alcune delle mele.

Si parla di **unire** mele con altre mele o di **separare** mele da altre mele?

Separare.

Sì, il problema parla di separare mele da altre mele. Ed ha cominciato con 10 mele, poi è arrivato uno scoiattolo e gli ha portato via alcune delle mele. I problemi che parlano di separare sono problemi

in cui si utilizza la sottrazione.

Qual è il segno per la sottrazione?

Il segno meno.

Esatto. Usiamo il segno meno. Lo metto qui.

Scrivi - :

$$\boxed{10} - \boxed{x} = \boxed{}$$

Inizia con Cosa accade Finisce con

Perfetto. Conosciamo il numero di mele con il quale Ed arriva alla fine?

Sì.

Esatto. Con quante mele Ed arriva alla fine?

8.

Sì, 8. Quindi scrivo 8 nell'ultimo riquadro.
Il riquadro che dice con quanto **finisce**.

Scrivi 8:

$$\boxed{10} - \boxed{x} = \boxed{8}$$

Inizia con Cosa accade Finisce con

→ TALLY

Usa questo formato se lo studente non conosce la famiglia dei numeri 2,8,10.

Ora possiamo risolvere il problema.

Sto per disegnare delle aste per trovare il valore della x.

Indica il riquadro contenente il numero 10 dicendo:

Con quanto iniziamo?

10.

Esatto, quindi disegno 10 aste.

Disegna 10 aste:

$$\boxed{10} - \boxed{X} = \boxed{8}$$

Inizia con Cosa accade Finisce con
||||||||||

Indicando il numero centrale chiedi:

C'è un numero qui che mi dice quante aste dovrò disegnare?

No.

Esatto. Non c'è. Quindi andrò all'ultimo riquadro. Conosco l'ultimo numero? So con quanto Ed arriva alla fine?

Sì.

Esatto, lo so! Con quanto arriva Ed alla fine?

8.

Indica l'ultimo riquadro dicendo:

Sì, lui arriva alla fine con 8 mele..

Indica la parte sinistra dell'equazione (la parte con 10+x) e cerchi 8 aste dicendo:

Quindi ho bisogno di 8 aste in tutto a sinistra dell'uguale, quindi devo cerchiare 8 aste per sapere quante me ne servono.

Cerchia 8 aste:

$$\boxed{10} - \boxed{X} = \boxed{8}$$

Inizia con Cosa accade Finisce con



Indica ed evidenzia le aste **non cerchiato** sotto il primo riquadro:

Ora ciò che dobbiamo fare è eliminare le aste sotto questo riquadro per trovare il valore della X.
Tutti pronti a contare mentre elimino le aste.

Elimina le 2 aste:

$$\boxed{10} - \boxed{X} = \boxed{8}$$

Inizia con Cosa accade Finisce con



Pronti.....

1, 2.

Bene. Quindi quante aste ho eliminato?

2.

Sì, 2. Abbiamo sottratto proprio 2. Quindi quanto vale la X?

2.

Sì, 2.

Cancella la X e scrivi 2:

$$\boxed{10} - \boxed{2} = \boxed{8}$$

Inizia con Cosa accade Finisce con



Dovremmo aver concluso ma prima controlliamo l'operazione. Leggi l'operazione.

$$10 - 2 = 8$$

L'operazione è corretta?

Sì.

Sì, l'operazione è esatta. Quindi, quante mele ha preso lo scoiattolo?

2 mele

(gli studenti devono dire numero e etichetta).

Sì, lo scoiattolo ha preso 2 mele.

ESEMPIO 3 (LIVELLO 2 – addizione) :

Lo scorso mese Tobia ha piantato 1 piantina di caffè nel suo cortile. Questo mese Tobia ha piantato altre piantine. Ora ci sono 5 piantine di caffè nel cortile. Quante piantine di caffè ha piantato Tobia questo mese?

INSEGNATE DICE/FA

STUDENTE SENTE/DICE

Scrivi sulla lavagna:

Lo scorso mese Tobia ha piantato 1 piantina di caffè nel suo cortile. Questo mese Tobia ha piantato altre piantine. Ora ci sono 5 piantine di caffè nel cortile. Quante piantine di caffè ha piantato Tobia questo mese?

Chiedi ad uno studente di leggerlo ad alta voce.

Lo scorso mese Tobia ha piantato 1 piantina di caffè nel suo cortile. Questo mese Tobia ha piantato altre piantine. Ora ci sono 5 piantine di caffè nel cortile. Quante piantine di caffè ha piantato Tobia questo mese?

Questo problema è **come una storia**. In una storia, come nella vita reale, tutto accade secondo un ordine.

In un problema-storia dobbiamo capire con quale ordine avvengono i fatti. Dobbiamo trovare cosa accade all'**inizio**, nel **mezzo** e alla **fine**.

L'inizio della storia ci dice **con che cosa cominciamo**. La parte centrale dice **cosa accade dopo** e la fine ci dice **come si conclude**.

Quindi disegnerò 3 riquadri e metterò l'uguale prima dell'ultimo quadrato.

Disegna:



Inizia con Cosa accade Finisce con

Ora siamo pronti per riempire i riquadri.
Vediamo. Cosa ci chiede di trovare il problema?

Quante piantine di caffè ha piantato
Tobia questo mese?

È esatto. Ci chiede “quante piantine di caffè ha
piantato Tobia questo mese”. Ci chiede il numero
che indica con quanto comincia, cosa accade nel mezzo
o il numero col quale finisce?

Cosa accade nel mezzo.

Sì , ci chiede di trovare il numero di piantine di caffè che
Tobia ha piantato nel mezzo della storia.
E’ questo che abbiamo bisogno di trovare.

Ok, vediamo cosa fare ora. Sappiamo con che numero
comincia? Sappiamo quante piantine di caffè Tobia aveva
all’inizio della storia?

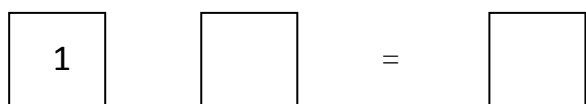
Sì.

Indica la frase dicendo:

Esatto. È scritto proprio qua, “lo scorso mese Tobia ha piantato
1 piantina di caffè nel suo cortile.”
Quindi qual è il numero che devo scrivere nel primo riquadro,
il riquadro che indica con quanto inizia Tobia?

1.

Scrivi 1 nel primo riquadro:



Inizia con Cosa accade Finisce con

Sappiamo cosa accade nel **mezzo** della storia?

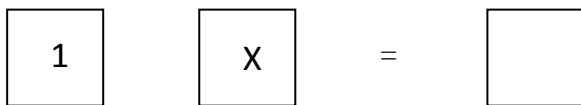
No.

Esatto, non lo sappiamo!

Indica la frase dicendo:

Il problema dice “questo mese Tobia ha piantato altre piantine”. Ma non c’è scritto quante piantine Tobia ha piantato. Quindi metterò una X nel riquadro “Cosa Accade”. X significa “non lo so”.

Scrivi x nel riquadro centrale come mostrato:



Inizia con Cosa accade Finisce con

Ora abbiamo bisogno del segno. Vediamo.
Tobia aveva qualche piantina di caffè e poi durante questo mese Tobia ne ha piantate delle altre.

In questo problema si parla di **unire** piantine con altre piantine o di **separare** piantine da altre piantine?
Unire o separare?

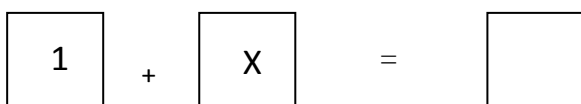
Unire.

Sì, unire. I problemi in cui si parla di ottenere qualcosa in più sono i problemi in cui si utilizza l’addizione.
Qual è il segno per l’addizione?

Il segno più.

Esatto. Usiamo il segno più. Lo metto qui.

Scrivi + :



Inizia con Cosa accade Finisce con

Perfetto. Conosciamo il numero di piantine col quale Tobia arriva alla fine della storia?

Sì.

Esatto. Con quante piantine Tobia arriva alla fine?

5.

Sì, arriva alla fine con 5. Quindi scrivo 5 nell'ultimo riquadro.

Scrivi 5:

$$\boxed{1} + \boxed{X} = \boxed{5}$$

Inizia con Cosa accade Finisce con

→ TALLY

Usa questo formato se lo studente non conosce la famiglia dei numeri 1, 4, 5.

Ora possiamo risolvere il problema.

Sto per disegnare delle aste sotto ciascun riquadro che contiene un numero.

Indica il riquadro contenente il numero 1 dicendo:

Con quanti iniziamo?

1.

Esatto, quindi disegno 1 asta.

Disegna 1 asta:

$$\boxed{1} + \boxed{X} = \boxed{5}$$

Inizia con Cosa accade Finisce con
|

Indicando il numero centrale chiedi:

C'è un numero qui che mi dice quante aste dovrò disegnare?

No.

Esatto. Non c'è. Quindi andrò all'ultimo riquadro.

Conosco l'ultimo numero? So con quanto finisce Tobia?

Sì.

Esatto, lo so! Con quanto finisce Tobia?

5.

Indica l'ultimo riquadro dicendo:

Sì, lui finisce con 5 piantine di caffè.

Indica la parte sinistra dell'equazione (la parte con $1+X$) dicendo:

Quindi ho bisogno in tutto di 5 aste a sinistra dell'uguale.

Indica e conta le aste sotto i riquadri fermandoti sotto il riquadro centrale:

Ora ciò che dobbiamo fare per terminare è disegnare le aste sotto questo riquadro per trovare quanto vale la X. Tutti pronti a contare le aste man mano che le disegno. Ricordati di dire stop quando arrivo a 5.

Ho già 1 asta da questa parte, quindi comincerò a disegnare dalla 2.

Scorri sotto l'asta 1 dicendo uno..., poi inizia a disegnare quando dici 2. Fermati a 5.

Pronti.....**uno**...

Uno....2,3,4,5, stop.

Disegna 4 aste mentre tu e lo studente dite "2,3,4,5":

$$\boxed{1} + \boxed{X} = \boxed{5}$$

Inizia con

|

Cosa accade

||||

Finisce con

Benissimo!! Ora contiamo quante aste ho disegnato. Iniziamo da **uno**. Prontiii.....

Indica la prima asta e continua con le successive.

1, 2, 3, 4.

Quante sono?

4.

Sì, 4. Quindi, quanto vale X?

4.

Esatto, X vale 4. Scrivo 4 qui.

Cancella X e scrivi 4:

$$\boxed{1} + \boxed{4} = \boxed{5}$$

Inizia con

|

Cosa accade

||||

Finisce con

Dovremmo aver concluso ma prima controlliamo l'operazione. Per favore leggete l'operazione.

$$1 + 4 = 5$$

L'operazione è corretta?

Sì.

Sì, l'operazione è esatta. Quindi, quante piantine di caffè ha piantato Tobia questo mese?
Non dimenticare l'etichetta.

4 piantine di caffè
(gli studenti devono dire numero e etichetta).

Sì, Tobia ha piantato 4 piantine di caffè.

ESEMPIO 4 (LIVELLO 2 – Sottrazione) :

Flora ha cucinato 9 torte al cioccolato da vendere al mercato. Lei ha venduto la maggior parte delle torte al mercato. Flora è tornata a casa con solo 3 torte al cioccolato. Quante torte al cioccolato Flora ha venduto al mercato?

INSEGNANTE DICE/FA

STUDENTE SENTE/DICE

Scrivi sulla lavagna:

Flora ha cucinato 9 torte al cioccolato da vendere al mercato. Lei ha venduto la maggior parte delle torte al mercato. Flora è tornata a casa con solo 3 torte al cioccolato. Quante torte al cioccolato Flora ha venduto al mercato?

Chiedi ad uno studente di leggerlo ad alta voce.

Flora ha cucinato 9 torte al cioccolato da vendere al mercato. Lei ha venduto la maggior parte delle torte al mercato. Flora è tornata a casa con solo 3 torte al cioccolato. Quante torte al cioccolato Flora ha venduto al mercato?

Questo problema è **come una storia**. In una storia, come nella vita reale, tutto accade secondo un ordine.

In un problema-storia dobbiamo capire con quale ordine avvengono i fatti. Dobbiamo trovare cosa accade all'**inizio**, nel **mezzo** e alla **fine**.

L'inizio della storia ci dice **con che cosa cominciamo**. La parte centrale dice **cosa accade dopo** e la fine ci dice **come si conclude**.

Quindi disegnerò 3 riquadri e metterò l'uguale prima dell'ultimo quadrato.

Disegna:



Inizia con

Cosa accade

Finisce con

Ora siamo pronti per riempire i riquadri.
Vediamo. Cosa ci chiede di trovare il problema?

Quante torte al cioccolato Flora ha venduto al mercato?

È esatto. Ci chiede “quante torte al cioccolato Flora

ha venduto al mercato”. Ci chiede il numero che indica **cosa accade** nella **parte centrale** della storia. Questo è quello che dobbiamo trovare.

Ok, vediamo cosa **dobbiamo sapere**. Sappiamo quanto aveva **all’inizio** della storia?

Con quante torte **ha cominciato**?

Sì.

Indica la frase dicendo:

Esatto. È scritto proprio qua, “Flora ha cucinato 9 torte al cioccolato da vendere al mercato.”

Quindi qual è il numero di torte con il quale **inizia**?

9.

Indica il primo riquadro dicendo:

Esatto. Quindi quale numero devo scrivere nel primo riquadro?

9.

Sì, 9.

Scrivi 9 nel primo riquadro:

$$\boxed{9} \quad \boxed{} = \boxed{}$$

Inizia con

Cosa accade

Finisce con

Sappiamo cosa accade **dopo** nella storia?

No.

Esatto, non lo sappiamo!

Indica la frase dicendo:

Il problema dice “lei ha venduto la maggior parte delle torte al cioccolato al mercato”. Ma non dice quante torte ha venduto Flora. Quindi metterò una X nel riquadro Cosa accade. X significa “non lo so”.

Scrivi x nel riquadro centrale come mostrato:

$$\boxed{9} \quad \boxed{X} = \boxed{}$$

Inizia con

Cosa accade

Finisce con

Ora abbiamo bisogno del segno. Vediamo.
Flora aveva delle torte al cioccolato, poi lei ha venduto la maggior parte delle torte al mercato.

Si parla di **unire** torte con altre torte o di **separare** torte da altre torte? Unire o separare?

Separare.

Sì, il problema parla di separare. Flora è partita con 9 torte, poi ha venduto la maggior parte delle torte al mercato. Questo problema parla di separare.

Qual è il segno che si usa per separare?

Il segno meno.

Esatto. I problemi che parlano di separare sono problemi in cui si usa la sottrazione. Mettiamo qui il segno meno.

Scrivi - :

$$\boxed{9} - \boxed{x} = \boxed{}$$

Inizia con Cosa accade Finisce con

Perfetto. Conosciamo il numero di mele con il quale lei arriva alla fine?

Sì.

Esatto. Con quante torte Flora arriva alla fine?

3.

Sì, 3. Quindi scrivo 3 nell'ultimo riquadro.
Il riquadro che dice con quanto **finisce**.

Scrivi 8 nell'ultimo riquadro:

$$\boxed{9} - \boxed{x} = \boxed{3}$$

Inizia con Cosa accade Finisce con

→ TALLY

Usa questo formato se lo studente non conosce la famiglia dei numeri 3,6,9.

Ora possiamo risolvere il problema.

Sto per disegnare delle aste per trovare il valore della x.

Indica il riquadro contenente il numero 9 dicendo:

Con quanto iniziamo?

9.

Esatto, quindi disegno 9 aste.

Disegna 9 aste:

$$\boxed{9} - \boxed{x} = \boxed{3}$$

Inizia con Cosa accade Finisce con
|||||||

Indicando il numero centrale chiedi:

C'è un numero qui che mi dice quante aste dovrò disegnare?

No.

Esatto. Non c'è. Quindi andrò all'ultimo riquadro. Conosco l'ultimo numero? So con quanto Flora arriva alla fine?

Sì.

Esatto, lo so! Con quanto arriva Flora alla fine?

3.

Indica l'ultimo riquadro dicendo:

Sì, lei arriva alla fine con 3 mele.

Indica la parte sinistra dell'equazione (la parte con $9+x$) e **cerchia 3** aste dicendo:

Quindi ho bisogno di 3 aste in tutto a sinistra dell'uguale, quindi devo cerchiare 3 aste per sapere quante me ne servono.

Cerchia 3 aste:

$$\boxed{9} - \boxed{X} = \boxed{3}$$

Inizia con $\boxed{||}$ Cosa accade $|||||$ Finisce con

*Indica ed evidenzia le aste **non cerchiare** sotto il primo riquadro:*

Ora ciò che dobbiamo fare è eliminare le aste sotto questo riquadro per trovare il valore della X. Tutti pronti a contare mentre elimino le aste.

***Elimina** le 6 aste:*

$$\boxed{9} - \boxed{X} = \boxed{3}$$

Inizia con $\boxed{||}$ Cosa accade $|||||$ Finisce con

Pronti.....

1, 2, 3, 4, 5, 6.

Bene. Quindi quante aste ho eliminato?

6.

Sì, 6. Abbiamo sottratto proprio 6. Quindi quanto vale la X?

6.

Sì, 6.

*Cancella la X e scrivi **6**:*

$$\boxed{9} - \boxed{6} = \boxed{3}$$

Inizia con $\boxed{||}$ Cosa accade $|||||$ Finisce con

Dovremmo aver concluso ma prima controlliamo l'operazione. Leggi l'operazione.

$$9 - 6 = 3.$$

L'operazione è corretta?

Sì.

Sì, l'operazione è esatta. Quindi, quante torte al cioccolato ha venduto Flora al mercato?

6 torte al cioccolato
(gli studenti devono dire numero e etichetta).

Sì, Flora ha venduto 6 torte al cioccolato.

**PROTOCOLLO DELL'INSEGNANTE PROBLEMI
LIVELLO 3 - ADDIZIONE**

Esempio: $n+3=12$

Parte 1. Modelli di ragionamento ad alta voce

ESEMPIO 1:

Betty ha fatto alcune vasche in piscina al mattino. Poi ha fatto altre 3 vasche dopo pranzo. In totale ha fatto 12 vasche. Quante vasche ha fatto Betty al mattino?

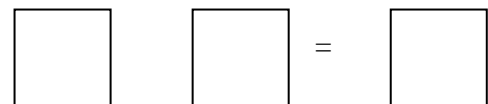
INSEGNANTE DICE/FA

STUDENTE SENTE/DICE

Chiedere ad uno studente di leggere il problema ad alta voce.

Betty ha fatto alcune vasche in piscina al mattino. Poi ha fatto altre 3 vasche dopo pranzo. In totale ha fatto 12 vasche. Quante vasche ha fatto Betty al mattino?

Questo è un problema-storia con un inizio, una parte centrale e una fine. Quindi disegnerò dei riquadri e metterò l'uguale. Dimmi come devo fare.



Numero di partenza

Numero aggiunto

Numero totale

Disegnare quello che dice lo studente.

Ora siamo pronti per iniziare a riempire i riquadri. Vediamo. Cosa ci chiede il problema?

Quante vasche ha fatto Betty al mattino?

Sì. Abbiamo bisogno di trovare proprio questo. Vediamo cosa conosciamo. Conosciamo il numero di partenza? Conosciamo quante vasche ha fatto Betty in piscina all'inizio della storia?

No.

Giusto, non sappiamo con quante vasche ha iniziato Betty. Cosa potrò scrivere nel primo riquadro?

n.

Giusto! Non conosciamo il numero, quindi scriviamo n.

Scrivere n nel primo riquadro:

n	=	
Numero di partenza		Numero aggiunto

Ora, conosciamo il numero aggiunto? Sappiamo quante vasche ha fatto Betty nella parte centrale della storia?

Sì.

Qual è il numero aggiunto?

3.

Esatto. Il problema dice “poi ha fatto altre 3 vasche dopo pranzo”. Quindi, 3 è il numero aggiunto.

Scrivere 3 nel secondo riquadro:

n	=	3	=	
Numero di partenza		Numero aggiunto		Numero totale

Ora abbiamo bisogno del segno. Vediamo... Betty ha fatto qualche vasca in piscina al mattino e poi qualche altra nel pomeriggio. E' un problema in cui bisogna unire o separare?

Unire.

Sì, in questo problema c'è bisogno di unire. Qual è il segno per unire?

Il segno più.

Giusto, dobbiamo usare il segno più. Lo metto proprio qui.

Scrivere + come mostrato:

$$\boxed{n} + \boxed{3} = \boxed{}$$

Numero di
partenza

Numero
aggiunto

Numero
totale

Giusto. Conosciamo il numero totale alla fine della storia?

Sì.

Ok, qual è il numero totale?

12.

Giusto. Il problema dice: "In totale ha fatto 12 vasche".
Dove dovrei mettere il 12?

Nel terzo riquadro. L'ultimo.

Scrivere 12 come mostrato:

$$\boxed{n} + \boxed{3} = \boxed{12}$$

Numero di
partenza

Numero
aggiunto

Numero
totale

Ora possiamo risolvere il problema. Che numero manca
da questa famiglia di numeri?

9.

Bene. Quindi quanto vale n?

9.

Giusto, n vale 9.

Cancellare n e scrivere 9:

$$\boxed{9} + \boxed{3} = \boxed{12}$$

Numero di
partenza

Numero
aggiunto

Numero
totale

Penso che abbiamo finito, ma controlliamo l'operazione.
Pronti a leggere l'operazione.

$9+3=12$.

L'operazione è giusta?

Sì.

Sì, l'operazione è giusta. Quindi quante vasche ha fatto Betty al mattino?

9 vasche (lo studente deve dire numero ed etichetta).

Sì, Betty ha fatto 9 vasche al mattino.

PROTOCOLLO DELL'INSEGNANTE PROBLEMI LIVELLO 3 - SOTTRAZIONE

Esempio: $n-3=9$

Parte 1. Modelli di ragionamento ad alta voce

ESEMPIO 1:

Oggi Luca ha catturato delle lucertole. 4 lucertole sono scappate via. Ora Luca ha 5 lucertole. Quante lucertole ha catturato oggi Luca?

INSEGNANTE DICE/FA

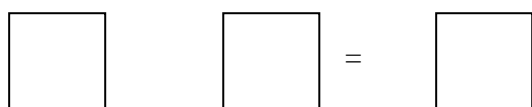
STUDENTE SENTE/DICE

Chiedere ad uno studente di leggere il problema ad alta voce.

Questo è un problema-storia con un inizio, una parte centrale e una fine. Cosa dovrò disegnare?

3 riquadri, e mettere un uguale prima dell'ultimo riquadro.

Disegna quello che dice lo studente.



Numero di
partenza

Numero
da sottrarre

Numero
che rimane

Ora siamo pronti per iniziare a riempire i riquadri. Vediamo. Cosa ci chiede il problema?

Quante lucertole ha catturato oggi Luca?

Sì. Quindi qual è il numero di partenza? Conosciamo quante lucertole aveva Luca all'inizio della storia?

No.

Giusto, non sappiamo con quante lucertole è partito Luca. Cosa potrò scrivere nel primo riquadro?

n.

Giusto! Non conosciamo il numero, quindi scriviamo n.

Scrivere n nel primo riquadro:

n			=	
Numero di partenza		Numero da sottrarre		Numero che rimane

Ora, conosciamo il numero da sottrarre? Sappiamo quante lucertole scappano via nella parte centrale della storia?

Sì.

Qual è il numero da sottrarre?

4.

Esatto. Il problema dice “4 lucertole sono scappate via”. Quindi, 4 è il numero da sottrarre.

Scrivere 4 nel secondo riquadro:

n		4	=	
Numero di partenza		Numero da sottrarre		Numero che rimane

Ora abbiamo bisogno del segno. Vediamo. Luca ha catturato delle lucertole, poi alcune sono scappate via. E' un problema in cui bisogna unire o separare?

Separare.

Sì, in questo problema c'è bisogno di separare. Qual è il segno per separare?

Il segno meno.

Giusto, dobbiamo usare il segno meno. Lo metto proprio qui.

Scrivere - come mostrato:

n	-	4	=	
Numero di partenza		Numero da sottrarre		Numero che rimane

Giusto. Conosciamo il numero di lucertole rimaste alla fine della storia?

Sì.

Ok, qual è il numero che rimane?

5.

Giusto. Il problema dice: “Ora Luca ha 5 lucertole”. Dove dovrei mettere il 5? Lo sai?

Nel terzo riquadro. L'ultimo.

Scrivere 5 come mostrato:

$$\begin{array}{ccc} \boxed{n} & - & \boxed{4} & = & \boxed{5} \\ \text{Numero di} & & \text{Numero} & & \text{Numero} \\ \text{partenza} & & \text{da sottrarre} & & \text{che rimane} \end{array}$$

Ora possiamo risolvere il problema. Che numero manca da questa famiglia di numeri?

9.

Bene. Quindi quanto vale n?

9.

Giusto, n vale 9.

Cancellare n e scrivere 9:

$$\begin{array}{ccc} \boxed{9} & - & \boxed{4} & = & \boxed{5} \\ \text{Numero di} & & \text{Numero} & & \text{Numero} \\ \text{partenza} & & \text{da sottrarre} & & \text{che rimane} \end{array}$$

Penso che abbiamo finito, ma controlliamo l'operazione. Pronti a leggere l'operazione.

9-4=5.

L'operazione è giusta?

Sì.

Sì, l'operazione è giusta. Quindi quante lucertole ha catturato Luca?

9 lucertole (lo studente deve dire numero ed etichetta).

Sì, Luca ha catturato 9 lucertole.

**PROTOCOLLO DELL'INSEGNANTE PROBLEMI
LIVELLO 4 – CLASSIFICAZIONE ADDIZIONE
Esempio: $9+3=n$**

Parte 1. Modelli di ragionamento ad alta voce

ESEMPIO 1:

Marco ha preso 3 immagini di persone e 7 immagini di animali. Quante immagini ha preso Marco in tutto?

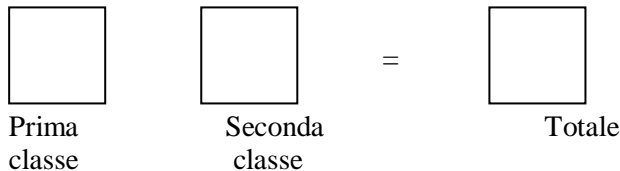
INSEGNANTE DICE/FA

STUDENTE SENTE/DICE

Chiedere ad uno studente di leggere il problema ad alta voce.

Questo è un problema che riguarda le **classi**. Ci parla di due classi di immagini: immagini di persone e immagini di animali. Noi useremo tre riquadri per risolvere il problema.

Disegnare il seguente :



Ora siamo pronti per iniziare a riempire i riquadri. Vediamo. Cosa ci chiede il problema?

Quante immagini ha preso Marco in tutto?

Giusto. Abbiamo bisogno di trovare il numero totale delle immagini. Vediamo cosa conosciamo. Quali classi di immagini ha preso Marco?

Persone e animali.

Giusto, ha preso immagini di persone e animali. Quale classe di immagini appare per prima nel problema?

Persone.

Giusto, persone. Quindi quella delle persone è la prima classe. Sappiamo quante immagini ci sono nella prima classe?

Sì.

Quante immagini ci sono nella prima classe?

3.

Bene. E' scritto proprio qui. "3 immagini di persone".
Quindi 3 è il **numero della prima classe**.

Scrivere 3 nel primo riquadro:

<div style="border: 1px solid black; width: 40px; height: 40px; display: flex; align-items: center; justify-content: center; margin: 0 auto;">3</div>	=	<div style="border: 1px solid black; width: 40px; height: 40px; display: flex; align-items: center; justify-content: center; margin: 0 auto;"></div>
Prima classe		Seconda classe

Ora, qual è la seconda classe di immagini? Persone o animali?

Animali.

Giusto. Sappiamo quante immagini ci sono nella seconda classe?

Sì.

Quante?

7.

Sì. Il problema dice "7 immagini di animali". Quindi, **il numero della seconda classe è 7**.

Scrivere 7 nel secondo riquadro:

<div style="border: 1px solid black; width: 40px; height: 40px; display: flex; align-items: center; justify-content: center; margin: 0 auto;">3</div>	=	<div style="border: 1px solid black; width: 40px; height: 40px; display: flex; align-items: center; justify-content: center; margin: 0 auto;">7</div>	=	<div style="border: 1px solid black; width: 40px; height: 40px; display: flex; align-items: center; justify-content: center; margin: 0 auto;"></div>
Prima classe		Seconda classe		Totale

Ora abbiamo bisogno del segno. Vediamo. Marco ha preso immagini di persone e immagini di animali. Il problema ci chiede quante immagini ha preso in tutto. E' un problema in cui bisogna unire o separare?

Unire.

Sì, in questo problema c'è bisogno di unire. Qual è il segno per unire?

Il segno più.

Giusto, dobbiamo usare il segno più.

Scrivere + come mostrato:

3	+	7	=	
Prima classe		Seconda classe		Totale

Giusto. Conosciamo il numero totale delle immagini?

No.

Giusto, non lo sappiamo. Quindi cosa dovrei scrivere nel riquadro per il totale?

n.

Scrivere n come mostrato:

3	+	7	=	n
Prima classe		Seconda classe		Totale

Ora possiamo risolvere il problema. Che numero manca da questa famiglia di numeri?

10.

Bene. Quindi quanto vale n?

10.

Cancellare n e scrivere 10:

3	+	7	=	10
Prima classe		Seconda classe		Totale

Controlliamo l'operazione. Pronti a leggere l'operazione.

7+3=10.

L'operazione è giusta?

Sì.

Quindi quante immagini Marco ha preso in totale?

10 immagini (lo studente deve dire numero ed etichetta).

Giusto, Marco ha preso 10 immagini.

PROTOCOLLO DELL'INSEGNANTE PROBLEMI
Livello 4 – CLASSIFICAZIONE SOTTRAZIONE
Esempio: $9+n=12$

Parte 1. Modelli di ragionamento ad alta voce

ESEMPIO 1:

Luana ha comprato 9 pastelli. 6 dei pastelli erano rossi. I restanti erano verdi. Quanti dei pastelli di Luana erano verdi?

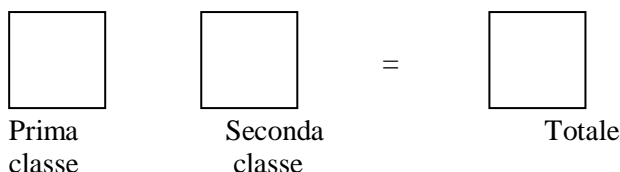
INSEGNANTE DICE/FA

STUDENTE SENTE/DICE

Chiedere ad uno studente di leggere il problema ad alta voce.

Questo è un problema che riguarda le **classi**. Ci parla di due classi di pastelli: rossi e verdi.
Noi useremo tre riquadri per risolvere il problema.

Disegnare il seguente :



Ora siamo pronti per iniziare a riempire i riquadri.
Vediamo. Cosa ci chiede il problema?

Quanti dei pastelli di Luana erano verdi?

Giusto. Quali classi di pastelli ha comprato Luana?

Rossi e verdi.

Giusto, rossi e verdi. Quale classe di pastelli appare per prima nel problema?

Rossi.

Esatto. Quindi quella dei pastelli rossi è la prima classe.
Sappiamo quanti pastelli ci sono nella prima classe?

Sì.

Quanti pastelli ci sono nella prima classe?

6.

Bene. E' scritto proprio qui. "6 dei pastelli erano rossi".
Quindi 6 è il **numero della prima classe**.

Scrivere 6 nel primo riquadro:

<div style="border: 1px solid black; width: 40px; height: 40px; display: flex; align-items: center; justify-content: center;">6</div>		=		<div style="border: 1px solid black; width: 40px; height: 40px;"></div>
Prima classe			Seconda classe	Totale

Ora, qual è la seconda classe di pastelli?

Verdi.

Giusto. Sappiamo quanti ce ne sono nella seconda classe?

No.

Quindi cosa dobbiamo scrivere nel riquadro della seconda classe?

n.

Scrivere n nel secondo riquadro:

<div style="border: 1px solid black; width: 40px; height: 40px; display: flex; align-items: center; justify-content: center;">6</div>		=		<div style="border: 1px solid black; width: 40px; height: 40px;"></div>
Prima classe			Seconda classe	Totale

Ora abbiamo bisogno del segno. Vediamo. Luana ha comprato alcuni pastelli rossi e alcuni pastelli verdi. E' un problema in cui bisogna unire o separare?

Unire.

Sì, in questo problema c'è bisogno di unire. Qual è il segno per unire?

Il segno più.

Giusto, dobbiamo usare il segno più.

Scrivere + come mostrato:

<div style="border: 1px solid black; width: 40px; height: 40px; display: flex; align-items: center; justify-content: center;">6</div>	+	<div style="border: 1px solid black; width: 40px; height: 40px; display: flex; align-items: center; justify-content: center;">n</div>		=		<div style="border: 1px solid black; width: 40px; height: 40px;"></div>
Prima classe		Seconda classe				Totale

Giusto. Conosciamo il numero totale dei pastelli?

Yes.

Qual è il numero totale dei pastelli?

9.

Scrivere n come mostrato:

$$\begin{array}{ccc} \boxed{6} & + & \boxed{n} & = & \boxed{9} \\ \text{Prima} & & \text{Seconda} & & \text{Totale} \\ \text{classe} & & \text{classe} & & \end{array}$$

Ora possiamo risolvere il problema. Che numero manca da questa famiglia di numeri?

3.

Bene. Quindi quanto vale n?

3.

Cancellare n e scrivere 3:

$$\begin{array}{ccc} \boxed{6} & + & \boxed{3} & = & \boxed{9} \\ \text{Prima} & & \text{Seconda} & & \text{Totale} \\ \text{classe} & & \text{classe} & & \end{array}$$

Ok, ora abbiamo l'operazione. Pronti a leggere l'operazione.

6+3=9.

L'operazione è giusta?

Sì.

Quindi quanti dei pastelli di Luana sono verdi?

3 pastelli (lo studente deve dire numero ed etichetta).

Giusto, 3 dei pastelli di Luana sono verdi.

PROTOCOLLO DELL'INSEGNANTE
PROBLEMI
LIVELLO 5 – CONFRONTO TROVARE IL GRUPPO MAGGIORE
Esempio: $n-9=3$

Parte 1. Modelli di ragionamento ad alta voce

ESEMPIO 1:

Giovanni ha 9 mele. Ha 3 arance in più delle mele. Quante arance ha Giovanni?

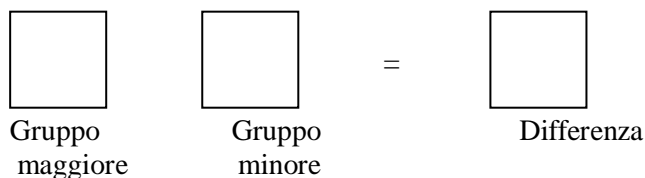
INSEGNANTE DICE/FA

STUDENTE SENTE/DICE

Chiedere ad uno studente di leggere il problema ad alta voce.

Questo è un problema in cui vengono confrontati due gruppi di cose: mele e arance. Disegnerò tre riquadri.

Disegnare il seguente :



Ora siamo pronti per iniziare a riempire i riquadri.

Vediamo. Cosa ci chiede il problema?

Quante arance ha Giovanni?

Giusto. Abbiamo bisogno di trovare il numero di arance. Giovanni ha più arance o più mele?

Più arance.

Giusto, ha più arance che mele. Quindi se ci sono più arance, le arance sono il gruppo maggiore o minore?

Il gruppo maggiore.

Sì, le arance sono il gruppo maggiore perché ci sono più arance. Quindi il problema ci chiede la grandezza del gruppo maggiore.

Io non so la grandezza del gruppo maggiore. Quindi cosa scriverò nel primo riquadro?

n.

Scrivere n nel primo riquadro:

n	=	
Gruppo maggiore		Gruppo minore

Vediamo cosa sappiamo. Qual è il gruppo minore?
Le arance o le mele?

Le mele.

Giusto. Le mele sono il gruppo minore perché ci sono meno mele che arance. Conosciamo la grandezza del gruppo minore?

Sì.

Qual è la grandezza del gruppo minore?

9.

Sì. Il problema dice "Giovanni ha 9 mele". Dove dovrei scrivere 9?

Nel secondo riquadro.

Scrivere 9 nel secondo riquadro:

n	=	9
Gruppo maggiore		Gruppo minore

Conosciamo la differenza tra i due gruppi? Sappiamo quante arance ci sono in più delle mele?

Sì.

Qual è la differenza?

3.

Giusto, il problema dice: "Ha 3 arance in più delle mele". Quindi 3 è la differenza tra i due gruppi.

Scrivere 3 come mostrato:

n	=	9
Gruppo maggiore		Gruppo minore

Troviamo la differenza tra i due gruppi confrontando i due gruppi.
Guarda l'equazione nei riquadri. Quali due riquadri dobbiamo confrontare?

Il primo e il secondo: n e 9.

Il problema riguarda il confronto. Il segno per il confronto è il segno meno. Qual è il segno per il confronto?

Il segno meno.

Sì, il segno per il confronto è il segno meno.

Scrivere - come mostrato:

$$\boxed{n} - \boxed{9} = \boxed{3}$$

Gruppo maggiore Gruppo minore Differenza

Ora possiamo risolvere il problema. Che numero manca da questa famiglia di numeri?

12.

E' corretto. Quindi quanto vale n?

12.

Cancellare n e scrivere 10:

$$\boxed{3} - \boxed{7} = \boxed{10}$$

Gruppo maggiore Gruppo minore Differenza

Penso che abbiamo finito, ma controlliamo l'operazione.
Pronti a leggere l'operazione.

12-9=3.

L'operazione è giusta?

Sì.

Sì, l'operazione è giusta. Quindi quante arance ha Giovanni?

12 arance (lo studente deve dire numero ed etichetta).

Giusto, ha 12 arance.

PROTOCOLLO DELL'INSEGNANTE
PROBLEMI
Livello 5 – CONFRONTO TROVARE IL GRUPPO MINORE
Esempio: 12-n=3

Parte 1. Modelli di ragionamento ad alta voce

ESEMPIO 1:

Sandro ha visto 8 cavalli. Ha visto 2 cavalli in più delle mucche. Quante mucche ha visto Sandro?

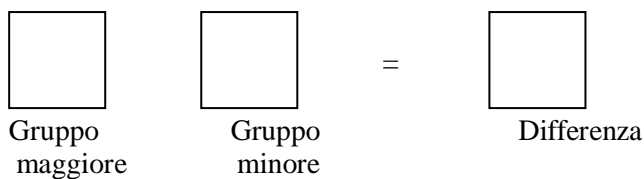
INSEGNANTE DICE/FA

STUDENTE SENTE/DICE

Chiedere ad uno studente di leggere il problema ad alta voce.

Questo è un problema in cui vengono confrontati due gruppi di cose: cavalli e mucche. Disegnerò tre riquadri.

Disegnare il seguente :



Ora siamo pronti per iniziare a riempire i riquadri.

Vediamo. Cosa mi chiede di trovare il problema?

Quante mucche ha visto Sandro.

Giusto, quante mucche ha visto Sandro. Le mucche sono il gruppo maggiore o minore? Guarda con attenzione.

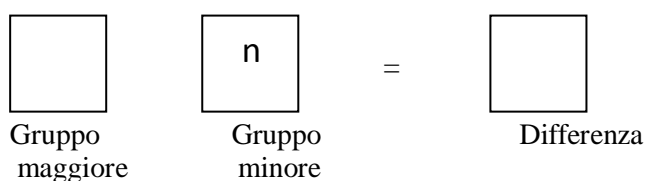
Il gruppo minore.

Sì, le mucche sono il gruppo minore perché Sandro ha visto meno mucche. Quindi il problema mi chiede **la grandezza del gruppo minore**.

Io non so la grandezza del gruppo minore. Quindi cosa scriverò nel riquadro del gruppo minore?

n.

Scrivere n nel secondo riquadro:



Vediamo cosa sappiamo. Qual è il gruppo maggiore?
Le mucche o i cavalli?

I cavalli.

Giusto. I cavalli sono il gruppo maggiore perché ci sono più cavalli. Conosciamo la grandezza del gruppo maggiore?

Sì.

Qual è la grandezza del gruppo maggiore?

8.

Sì. Il problema dice “Sandro ha visto 8 cavalli”. Dove dovrei scrivere 8?

Nel primo riquadro.

Scrivere 8 nel primo riquadro:

8	=	
Gruppo maggiore		Differenza

Conosciamo la differenza tra la grandezza del gruppo maggiore e la grandezza del gruppo minore? Sappiamo quanti cavalli ci sono in più delle mucche?

Sì.

Qual è la differenza?

2.

Giusto, il problema dice: “Ha visto 2 cavalli in più delle mucche”. Quindi 2 è **la differenza tra i due gruppi**.

Scrivere 2 come mostrato:

8	=	2
Gruppo maggiore		Differenza

Ora abbiamo bisogno del segno. Vediamo. Il problema parla di unire, separare o confrontare?

Confrontare.

Giusto, il problema riguarda il confronto. Il segno per il confronto è il segno meno. Qual è il segno per il confronto?

Il segno meno.

Sì, il segno per il confronto è il segno meno.

Scrivere - come mostrato:

$$\boxed{8} - \boxed{n} = \boxed{2}$$

Gruppo maggiore Gruppo minore Differenza

Ora possiamo risolvere il problema. Che numero manca da questa famiglia di numeri?

6.

E' corretto. Quindi quanto vale n?

6.

Cancellare n e scrivere 6:

$$\boxed{8} - \boxed{6} = \boxed{2}$$

Gruppo maggiore Gruppo minore Differenza

Penso che abbiamo finito, ma controlliamo l'operazione. Pronti a leggere l'operazione.

8-6=2.

L'operazione è giusta?

Sì.

Sì, l'operazione è giusta. Quindi quante mucche ha visto Sandro?

6 mucche (lo studente deve dire numero ed etichetta).

Giusto, ha visto 6 mucche.

PRETEST
PROBLEMI CON ADDIZIONI E SOTTRAZIONI

1. Nel recinto ci sono 2 cavalli. Altri 5 entrano nel recinto. Quanti cavalli ci sono nel recinto?

Soluzione: _____

2. Domenica la pianta di rose aveva alcuni fiori sbocciati. Lunedì 3 fiori cadono. Ora sono rimasti 7 fiori. Quanti fiori c'erano sulla pianta Domenica?

Soluzione: _____

3. Alice durante le vacanze estive legge 13 libri. Al ritorno a scuola ne ha dovuti leggere altri. Se ne ha letti in tutto 25, quanti ne ha letti a scuola?

Soluzione: _____

4. Maria ha 5 cuccioli. 2 di questi sono maschi. Quante sono le femmine?

Soluzione: _____

5. Luca ha una collezione di francobolli. Oggi suo fratello gliene regala 5. Ora Luca possiede 9 francobolli. Quanti francobolli aveva all'inizio Luca?

Soluzione: _____

6. Sul tavolo ci sono 3 cucchiaini. Ci sono 2 cucchiaini in più rispetto alle forchette. Quante forchette ci sono sul tavolo?

Soluzione: _____

7. Giorgio ha 5 CD nello zaino ed altri 18 a casa. Quanti CD possiede in tutto?

Soluzione: _____

8. Mattia ha 7 figurine. Le regala tutte a parte 3. Quante figurine ha regalato?

Soluzione: _____

9. Alberto ha 3 cani. Egli ha 6 gatti in più rispetto ai cani. Quanti gatti ha Alberto?

Soluzione: _____

10. Qualcuno ha rotto 4 dei 10 bicchieri sul tavolo. Quanti sono i bicchieri non rotti?

Soluzione: _____

11. Nella fattoria di Mario ci sono 8 cavalli. Ci sono 2 cavalli in meno rispetto alle mucche. Quante sono le mucche?

Soluzione: _____

BIBLIOGRAFIA

- Allen B. A., & Armour Thomas E. (1992). Construct validation of metacognition. *The Journal of Psychology*, 127, 203-211.
- Andronis, P. T., Layng, T. V. J. & Goldiamond, I. (1997). Contingency adduction of “symbolic aggression” by pigeons. *The Analysis of Verbal Behavior*, 14, 5–17.
- Anstrom, T. (2003). *Supporting students in mathematics through the use of manipulatives*. Center for Implementing Technology in Education.
- Antonietti A. & Angelini C. (2002). *La soluzione di problemi: le principali prospettive*. Erickson portale internet.
- Barnes -Holmes , D., Barnes -Holmes , Y. & Cullinan , V. (2001). Relational frame theory and Skinner’s Verbal Behavior. *The Behavior Analyst*, 23, 69–84.
- Bellorini F. , Cornoldi C. & Passolunghi M. C. (2006), Deficit di memoria di lavoro nelle difficoltà di apprendimento del calcolo. *Difficoltà in matematica*, 2, 175-195.
- Berardi-Coletta, B., Buyer, L. S., Dominowski, R. L., & Rellinger, E. R. (1995). Metacognition and problem solving: A process-oriented approach. *Journal of Experimental Psychology*, 21, 205-223.
- Berger D. E. & Wilde J. M. (1987). A task analysis of algebra word problem, in D. E. Berger, K. Pezdek e W. P. Bamks, *Applications of cognitive psychology: problem solving, education and computing*. Hillsdale: Erlbaum
- Berk L. E.(1994). Why children talk to themselves, *Scientific American*, 271, 78-83.
- Berlyne D. E. (1978), *Struttura e orientamento del pensiero*. Firenze: Giunti.
- Binder, C. (1996). Behavioral fluency: Evolution of a new paradigm. *The Behavior Analyst*, 19, 163–197.
- Boekaerts M. (1999). Metacognitive experiences and motivational state as aspects of self-awareness: review and discussion. *European Journal of Psychology of Education*, 14, 571-584.
- Bottge, B. A., Ruenda, R, Grant, T. S., Stephens, A. C. & Laroque, P. T. (2010). Anchoring problem solving and computation instruction in Context-Rich Learning environments. *Exceptional Children*, Vol. 76, No.4 pp. 417-437.
- Brown A. (1978). Knowing when, where and how to remember: a problem of metacognition, in R. Glaser, *Advances in instructional psychology*. Hillsdale: Erlbaum.
- Bull R. & Sherif G. (2001), Executive functioning as a predictor of children’s mathematics ability: inhibition, switching and working memory. *Developmental neuropsychology*, 19, 273-293.

- Bull R. , Johnston R. S. & Roy J. A. (1999), Exploring the role of visual spatial sketch pad and central executive in children's arithmetical skills: views from cognition and developmental neuropsychology. *Developmental neuropsychology*, 15, 421-442.
- Carnine, D. (1997). Instructional design in mathematics for students with learning disabilities. *Journal of Learning Disabilities*, 30, 130–141.
- Carnine, D., Jones, E. & Dixon, R. (1994). Mathematics: Educational tools for diverse learners. *School Psychology Review*, 23, 406–427.
- Catania A. C. (1992). *Learning*. New York: Prentice – Hall.
- Catania, A. C. (1980). Autoclitic processes and the structure of behavior. *Behaviorism*, 51, 175–186.
- Catania, A. C., & Cerutti, D. T. (1986). Some nonverbal properties of verbal behavior. In T. Thompson & M. D. Zeiler (Eds.), *Analysis and integration of behavioral units*, 185–211, Hillsdale: Erlbaum.
- Chi, M. T., De Leeuw, N., Chiu, M., & LaVanher, C. (1994). Eliciting self explanations improves understanding. *Cognitive Science*, 18, 439-477.
- D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I. & Marazzani I. (2004). “Esercizi anticipati” e “zona di sviluppo prossimale”: comportamento strategico e linguaggio comunicativo in attività di problem solving. *La matematica e la sua didattica*, 2, 71-95.
- Davis G. A. (1973). *Psychology of problem solving*. New York: Basic Books.
- Doyle, K. M. (2005) Mathematical problem solving: A need for literacy. In Bryer, Fiona and Bartlett, Brendan and Roebuck, Dick, Eds. *Proceedings Stimulating the "Action" as participants in participatory research 2*, 39-45, Australia: Surfers Paradise.
- Duncker, K. (1969). *La psicologia del pensiero produttivo*, Firenze: Giunti-Barbera.
- Epstein, R. (1985). The spontaneous interconnection of three repertoires. *The Psychological Record*, 35, 131–143.
- Epstein, R. (1987). The spontaneous interconnection of four repertoires of behavior in a pigeon (Columbalivia). *Journal of Comparative Psychology*, 101, 197–201.
- Flaherty, E. G. (1975). The thinking aloud technique and problem solving ability. *Journal of Educational Research*, 68, 223-225.
- Flavell J. H. (1976). Metacognitive aspects of problem solving. In Resnick L. B. *The nature of intelligence*, Hillsdale: Erlbaum.
- Fonteyn M. E. , Kuipers B. & Grobe S. J. (1993). A description of think aloud method and protocol analysis, *Qualitative Health Research*, 3, 430-441.

Fuchs, L. S & Fuchs, D. (2002). Mathematical problem solving profiles of students with mathematics disabilities and without comorbid reading disabilities. *Journal of learning disabilities*, 35, 563-573.

Garcia T. & Pintrich P. R. (1994) Regulating motivation and cognition in the classroom: the role of self.schemes and self-regulatory strategies. In D. Schunk e B. J. Zimmermann, *Self-regulation of learning and performance: issues and educational applications*, 127-153, Hillsdale: Erlbaum.

Geary, D. C. (2004). Mathematics and learning disabilities. *Journal of learning disabilities*, 37, 4-15.

Gleason, M., Carnine, D. & Valia, N. (1991). Cumulative versus rapid introduction of new information. *Exceptional Children*, 57, 353–358.

Goldstein, H., & Moussetis, L. (1989). Generalized language learning by children with severe mental retardation: Effects of peers' expressive modeling. *Journal of Applied Behavior Analysis*, 22, 245–259.

Greer , R. D., & Keohane , D. D. (2005). The evolution of verbal behavior in children. Behavioral Development Bulletin, *Journal of Speech and Language Pathology: Applied Behavior Analysis*, 1, 31–47.

Greer , R. D., & Ross , D. E. (2008). *Verbal behavior analysis: Inducing and expanding complex communication in children severe language delays*. Boston: Allyn & Bacon.

Greer D. & Speckman J. M. (2009). The Integration of Speaker and Listener Responses: A Theory of Verbal Development. *The Psychological Record*, 59, 449–488.

Hanich, L. B., Jordan, N. C., Kaplan, D. & Dick, J. (2001). Performance across different areas of mathematical cognition in children with learning difficulties. *Journal of educational Psychology*, 93, 615-626.

Harper, G. F., Mallette, B., Maheady, L., Bentley, A. E., & Moore, J. (1995). Retention and treatment failure in classwide peer tutoring: Implications for further research. *Journal of Behavioral Education*, 5, 399–414.

Helwig, R., Rozek-Tedesco, M. A., Tindal, G., Heath, B., & Almond, P. J. (1999). Reading as an access to mathematics problem solving on multiple-choice tests for sixth-grade students. *Journal of Educational Research*, 93, 113-125.

Henjes, L. M. (2007). *The use of think-aloud strategies to solve word problems*. Math in Hinsley D. , Hayes J. R. & Simon H. , (1977), From word to equations: meaning and representation in algebra word problems, in P. A. Carpenter e M. A. Just, *Cognitive process in comprehension*, Hillsdale: Erlbaum.

Hogan, K. (1999). Thinking aloud together: A test of an intervention to foster students' collaborative scientific reasoning. *Journal of Research in Science Teaching*, 36, 1085-1109.

Holt P. (2008). What is a problem? Theoretical conceptions and methodological approaches to the study of problem solving. *European Journal of Behavior Analysis*, 9, 157-172.

- Horne, P. J., & Lowe, C. F. (1996). On the origins of Naming and other symbolic behavior. *Journal of the Experimental Analysis of Behavior*, 65, 185–241.
- Imperio, M. (2008). *Il think aloud protocol come strumento per indagare il processo mentale della traduzione*. Scuole Civiche di Milano. Fondazione di partecipazione Dipartimento Lingue.
- Johnson D. M. (1955). *The Psychology of Thought and Judgement*, New York: Harper and Row.
- Johnson, K., & Street, E. S. (2004). *The Morningside Model of Generative Instruction. What it means to leave No child behind*. Cambridge Center for Behavioral Studies.
- Johnson, K. R., & Layng, T. V. J. (1992). Breaking the structuralist barrier: Literacy and numeracy with fluency. *American Psychologist*, 47, 1475– 1490.
- Johnson, K. R., & Layng, T. V. J. (1994). The Morningside model of generative instruction. In R. Gardner, D. Sainato, J. O. Cooper, T. E. Heron, W. L. Heward, J. W. Eshleman, & T. A. Grossi (Eds.), *Behavior analysis in education: Focus on measurably superior instruction*. Pacific Grove: Brooks/Cole.
- Johnson, S. D., & Chung, S. P. (1999). The effect of thinking aloud pair problem solving on the troubleshooting ability of aviation technician students. *Journal of Industrial Teacher Education*, 37, 1-18.
- Jordan, N. C. & Hanich, L. B. (2000). Mathematical thinking in second grade children with different forms of learning disabilities. *Journal of learning disabilities*, 33, 567-578.
- Kahney, H. (1993). *Problem solving: current issues*. Buckingham: Open University Press.
- Kanisza G. (1973). Il problem solving nella psicologia della Gestalt, in Mosconi G. e D'Urso (a cura di), *La soluzione di problemi*, Firenze: Giunti.
- Klinge, W. E., & Reed, B. W. (1984). An examination of an incremental approach to mathematics. *Phi Delta Kappan*, 65.
- Larkin J. , Mc Dermott J. , Simon D. P. & Simon H. A. (1980) Expert and novice performance in solving physic problem. *Science*, 208, 1335-1342.
- Leader, L. F. & Middleton, J. A. (2004). Promoting critical-thinking dispositions by using problem solving in middle school mathematics. *Research in Middle Level Education*, 28, 55-71.
- LeBlanc, M. D., & WeberRussell, S. (1996). Text integration and mathematical connections: A computer model of arithmetic word problem solving. *Cognitive Science*, 20, 357-407.
- Lesh, R., & Doerr, H. M. (2003). Foundations of a models and modeling perspective on mathematics teaching, learning and problem solving. In R. Lesh & H. M. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching*, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

- Levingston H. B. , Neef N. A. & Cihon T. M. (2009), The effects of teaching precurent behaviors on children's solution of multiplication and division word problems. *Journal of Applied Behavior Analysis*, 42, 361-367.
- Lin, A., Podell, D. M., & Tournaki-Reid, N. (1994). CAI and the development of automaticity in mathematics skills in students with and without mild mental disabilities. *Computers in the Schools*, 11, 43–58.
- Littlefield Cook, J. L., & Rieser, J. J. (2005). Finding the critical facts: Children's visual scan patterns when solving story problems that contain irrelevant information. *Journal of Educational Psychology*, 97, 224-234.
- Lodhi , S., & Greer , R. D. (1989). The speaker as listener. *Journal of the Experimental Analysis of Behavior*, 51, 353–360.
- Lucangeli D. , & Cornoldi C. (1997) Mathematics and metacognition: what is the nature of relationship? *Mathematical Cognition*, 3, 121-139
- Lucangeli D. , & Passolunghi M. C. (1995). *Psicologia dell'apprendimento matematico*, Torino: Utet.
- Lucangeli D. , Caccio L. , Salerni C. & Cornoldi C. (1997). Atteggiamento meta cognitivo e problem solving. *Studi di psicologia dell'educazione*, 15, 37-60.
- Lucangeli D. , Cornoldi C. & Tellarini M. (1998). Metacognition and learning disabilities in mathematics. In T. E. Scruggs e M. A. Mastropieri, *Advances in learning and behavioral disabilities*, Greenwich: JAI Press, , 219-244.
- Lucangeli D. , Cornoldi C. & Tessari F. (1991). Bambini con disturbi di apprendimento in lettura e matematica: aspetti comuni e specificità nei deficit cognitivi e di conoscenza metacognitiva. *Psichiatria dell'infanzia e dell'adolescenza*, 58, 629-642.
- Lucangeli, D., Tressoldi, P. E., & Cendron, M. (1998). Cognitive and metacognitive abilities involved in the solution of Mathematical Word Problems: Validation of a comprehensive model. *Contemporary Educational Psychology*, 23, 257-275.
- Lurija A. R. & Tsetkova L. S. (1967). *Les troubles de la resolution des problems*. Paris: Gauthier-Villars.
- Mace C. , Neef N. A. , Shade D. & Mauro B. C. (1996). Effects of problem difficulty and reinforcer quality on time allocated to concurrent arithmetic problems. *Journal of Applied Behavior Analysis*, 29, 11-24.
- MacGregor, J. (1990). Collaborative learning: Shared inquiry as a process of reform, In Svinicki, M. D. (Ed.), *The changing face of college teaching*, *New Directions for Teaching and Learning*, 42.
- Masui C. & De Corte E. (1999). Enhancing learning and problem solving skills: orienting and self-judging, two powerful and trainable learning tools. *Learning and Instruction*, 9, 517-542.
- Mayer R. E. (1983). *Thinking, problem solving, cognition*. New York: Freeman and Company.

- Mayer R. E. (1987). Learnable aspects of problem solving: some examples, in D. E. Berger, K. Pezdek e W. P. Banks, *Applications of cognitive psychology: problem solving, education and computing*, Hillsdale: Erlbaum.
- Mayer R. E. (1998). Cognitive, metacognitive and motivational aspects of problem solving. *Instructional Science*, 26, 49-63.
- Mayer R. E. , Larkin J. H. & Kadane J. , (1984). A cognitive analysis of mathematical problem solving ability, in R. Sternberg, *Advances in the psychology of human intelligence*, Hillsdale: Erlbaum.
- Mayer, R. E. (2004). Teaching of subject matter. *Annual Review of Psychology*, 55, 715-744.
- Mayfield K. H. & Chase P. N. (2002). The effects of cumulative practice on mathematics problem solving. *Journal of Applied Behavior Analysis*, 35, 105-123.
- McGinnis, J. C., Friman, P. C. & Caryon, W. D. (1999). The effect of token rewards on “intrinsic” motivation for doing math. *Journal of Applied Behavior Analysis*, 32, 357-379.
- Melchiori, L. E., de Souza, D. G., & De Rose, J. C. (2000). Reading, equivalence, and recombination of units: A replication with students with different learning histories. *Journal of Applied Behavior Analysis*, 33, 97–100.
- Middle Institute Partnership Action Research Project Report. University of Nebraska-Lincoln.
- Montague M. & Applegate B. (1993). Middle school students’ mathematical problem solving: an analysis of think-aloud protocols. *Learning Disability Quarterly*, 16.
- Montague M. (1998). Research on metacognition in special education. In T. E. Scruggs e M. A. Mastropieri, *Advances in learning and behavioral disabilities*, JAI Press, Greenwich, 151-183
- Mowrer O. H. (1947). On the dual nature of learning: a re-interpretation of “conditioning” and “problem solving”. *Harvard Educational Review*, 17, 102-148.
- Mueller, M. M., Olmi, D. J., & Saunders, K. J. (2000). Recombinative generalization of within syllable units in prereading children. *Journal of Applied Behavior Analysis*, 33, 515–531.
- Neef N. A. , Nelles D. E. , Iwata B. A. & Page T. J. (2003). Analysis of precurrent skills in solving mathematics story problems. *Journal of Applied Behavior Analysis*, 36, 21-33.
- Newell A. & Simon H. A. (1972). *Human problem solving*. Englewood Cliffs: Prentice Hall.
- Parmar, R. S., Cawley, J. F. & Frazita, R. R. (1996). Word problem solving by students with and without mild disabilities. *Exceptional Children*, Vol, 62, No. 5, pp. 415-429.
- Passolunghi M. C. & Cornoldi C. (2000). Working memory and cognitive abilities in children with specific difficulties in arithmetic word problem solving. *Advances in learning and behavioral disabilities*, 14, 155-178.

- Passolunghi M. C. & Cornoldi C. (2007). Disturbi nella soluzione dei problemi, in Cornoldi C. *Difficoltà e disturbi dell'apprendimento*, Bologna: Il Mulino.
- Passolunghi M. C. & Pazzaglia F. (2004). Individual differences in memory updating in relation to arithmetic problem solving. *Learning and individual differences*, 14, 257-269.
- Passolunghi M. C. & Pazzaglia F. (2005). A comparison of updating processes in children good or poor in arithmetic word problem solving. *Learning and individual differences*, 15, 348-367.
- Passolunghi M. C. (1999). Influenza dell'abilità di pianificazione nella risoluzione dei problemi. *Età Evolutiva*, 62, 81-87.
- Passolunghi M. C. (2003). Memoria, metacognizione e soluzione dei problemi, in O. Albanese, *Metacognizione e apprendimento*, Milano: Franco Angeli.
- Passolunghi M. C. (2006). Working memory and mathematical disability, in T. Packiam Alloway e S. Gathercole, *Working memory and neurodevelopmental condition*, Hove: Psychology Press.
- Passolunghi M. C. (2006b). Memoria di lavoro: influenza dei processi inibitori e di updating sull'abilità di calcolo e soluzione dei problemi. *Età Evolutiva*, 83, 78-89.
- Passolunghi M. C. , Cornoldi C. & De Liberto S. (1999). Working memory and inhibition of irrelevant information in poor problem solvers. *Memory and cognition*, 27, 779-790.
- Passolunghi M. C. , Lonciari I. & Cornoldi C. (1996). Abilità di pianificazione, comprensione, metacognizione e risoluzione di problemi aritmetici di tipo verbale. *Età Evolutiva*, 51, 36-48.
- Passolunghi, M. C., Cornoldi, C., & De Liberto, S. (1999). Working memory and intrusions of irrelevant information in a group of specific poor problem solvers. *Memory & Cognition*, 27, 779-790.
- Polya G. (1957). *How to solve it*. Princeton University.
- Radford J. K. & Burton A. (1974). *Thinking: its nature and development*. Chichester: John Wiley and Sons.
- Robbins J. K. (1996). *Taps for teachers*. Seattle: Robbins/Layng Associates.
- Robbins J. K. (2004). Problem solving, reasoning and analytical thinking within the Morningside Model, in K. Johnson e E. M. Street, *The Morningside Model of Generative Instruction*, Cambridge: Cambridge Center of Behavioral Studies.
- Robbins, J. K. (1996). *Taps for teachers*. Seattle: Robbins / Layng Associates.
- Robbins, J. K. (2006). Problem solving, reasoning, and analytical thinking within the Morningside Model , in K. Johnson e E. M. Street, *The Morningside Model of Generative Instruction*, Cambridge: Cambridge Center of Behavioral Studies.
- Saxon, J. (1982,). Incremental development: A breakthrough in mathematics. *Phi Delta Kappan*, 63, 482-484.

- Semenza, C., Miceli, L., & Girelli, L., (1997). A deficit for arithmetical procedures: lack of knowledge or lack of monitoring? *Cortex*, 33, 483-498.
- Short E. J. , Schatschneider C. , Cuddy C. L. , Evans S. W. , Dellick D. M. & Basili L. A. (2004). The effect of thinking aloud on the problem solving performance of bright, average, learning disabled and developmentally handicapped students. *Contemporary Educational Psychology*, 16, 139-153.
- Simons P. R. J. (1996). Metacognition. In E. De Corte e F. E. Weinert, *International encyclopedia of developmental and instructional psychology*, Oxford, UK: Elsevier science.
- Skinner B. F. (1957). *Verbal Behavior*. Prentice-Hall: Enlewood Cliffs.
- Skinner B. F. (1969). *Contingencies of reinforcement: a theoretical analysis*. New York: Appleton Century Crofts.
- Skinner, B. F. (1957). *Verbal behavior*. Englewood Cliffs, Nj: Prentice Hall.
- Skinner, B. F. (1966). An operant analysis of problem solving. In B. Kleinmuntz, *Problem Solving: research, methods and theory*, New York: John Wiley.
- Skinner, B. F. (1968). *The technology of teaching*. New York: Appleton Century Crofts.
- Slavin, R. E. (1995). *Cooperative learning: Theory, research, and practice*. Boston: Allyn & Bacon.
- Stice, J. E. (2000). *Teaching problem solving*. New York: Holt & Company.
- Streifel, S., Bryan, K. S., & Aikins, D. A. (1974). Transfer of stimulus control from motor to verbal stimuli. *Journal of Applied Behavior Analysis*, 7, 123–135.
- Swanson H. L. & Sachse-Lee C. (2001). Mathematical problem solving and working memory in children with learning disabilities: not executive and phonological processes are important. *Journal of experimental child psychology*, 79, 299-321.
- Swanson H. L. (1990). Influence of metacognitive Knowledge and aptitude on problem solving, *Journal of Educational Psychology*, 82, 306-314.
- Temple, C. M. (1991). Procedural dyscalculia and number fact dyscalculia. Double dissociation in developmental dyscalculia. *Cognitive Neuropsychology*, 8, 155-176.
- Vermunt J. D. (1996). Metacognitive, cognitive and affective aspects of learning styles and strategies: a phenomenographic analysis, *Higher education*, 31, 25-50.
- Vygotskij, L.S. (1987). *Il processo cognitivo*. Torino: Boringhieri.
- Whalen, C., Schuster, J. W., & Hemmeter, M. L. (1996). The use of unrelated instructive feedback when teaching in a small group instructional arrangement. *Education and Training in Mental Retardation and Developmental Disabilities*, 31, 188– 201.
- Whimbey A. & Lockhead's J. (1991). *Problem solving and comprehension*. Hillsdale: Lawrence Erlbaum.

Wood, D. K, Frank, A. R. & Eacker, D. P. (1998). Teaching multiplication facts to students with learning disabilities. *Journal of Applied Behavior Analysis*, 31, 323-338.

Zentall, S. S., & Ferkis, M. A. (1993). Mathematical problem solving for youth with ADHD, with and without learning disabilities. *Learning Disabilities Quarterly*, 16, 6-18.