

Alma Mater Studiorum - Università di Bologna

Dottorato di Ricerca in Ingegneria Geotecnica
Università degli Studi di Parma
XXI Ciclo

**CALIBRAZIONE PROBABILISTICA
DI UN MODELLO DINAMICO DI
MOVIMENTI LENTI DI VERSANTE**

Autore:
Marco Ranalli

Advisor: **Prof. Guido Gottardi**, *Università di Bologna*

Co-Advisors: **Dr. Farrokh Nadim**, *International Centre for
Geohazards, Oslo*

Dr. Zenon Medina-Cetina, *Texas A&M
University, USA*

Tesi presentata per il titolo di Dottore di Ricerca all'Università di Parma

Gennaio 2009

*a Martina,
affinché conservi sempre
la virtù della curiosità.*

Ringraziamenti

Questo lavoro non sarebbe stato possibile senza il Prof. Guido Gottardi, che mi ha introdotto e fatto appassionare al mondo della Geotecnica e mi ha guidato e supportato lungo tutti questi anni di studio: grazie davvero.

Vorrei, inoltre, ringraziare il Dr. Farrokh Nadim per avermi dato la possibilità di trascorrere parte del periodo di dottorato presso l'*International Centre for Geohazards* di Oslo, mesi ricchissimi di esperienza e di conoscenza. Un ringraziamento sincero va al Dr. Zenon Medina-Cetina, che mi ha fatto conoscere l'affascinante mondo dell'“incertezza” e mi ha sempre spronato ed incoraggiato di fronte ad ogni difficoltà. È inutile dire che i suoi consigli ed insegnamenti sono stati fondamentali per la riuscita del lavoro.

Ringrazio anche tutti i miei colleghi, oramai amici, del Dipartimento di Geotecnica dell'Università di Bologna: Laura Tonni, Laura Govoni, Michela Marchi, Agnese Marcosanti e Luca Cavallari (più amico che collega), per l'aiuto e la disponibilità che mi hanno sempre mostrato.

Infine, vorrei ringraziare tutta la mia famiglia e tutti gli amici per la loro continua presenza e comprensione, in questi anni pieni di soddisfazioni ma anche di momenti difficili.

Un grazie di cuore a tutti!

Indice

Sommario	iii
Abstract	v
Introduzione	1
1 Il Rischio da Frane	5
1.1 L'analisi del rischio	8
1.1.1 Valutazione del rischio	11
1.1.2 Gestione e mitigazione del rischio	21
1.2 L'importanza della definizione dell'incertezza	25
2 Le Frane per <i>Creep</i>	31
2.1 I materiali viscosi	32
2.2 Analisi e modellazione delle frane a comportamento viscoso	36
2.2.1 Un modello analitico per movimenti gravitativi lenti	39
3 Il Problema Inverso	45
3.1 Formulazione matematica del problema inverso	46
3.2 Approccio deterministico al problema inverso	48
3.2.1 Il metodo di ottimizzazione P.S.O.	51
3.3 Approccio probabilistico al problema inverso	54
3.3.1 Il teorema di Bayes	57

3.3.2	L'integrazione della funzione a posteriori . . .	60
4	Caso di Studio: la Frana di Alverà	69
4.1	Inquadramento geologico-strutturale dell'area di Cortina d'Ampezzo	70
4.2	Caratterizzazione geologica e geotecnica della frana di Alverà	73
4.3	Il sistema di monitoraggio	77
4.3.1	Il <i>database</i> della strumentazione considerata .	82
5	Calibrazione del Modello	85
5.1	I parametri del modello ed i dati osservati	86
5.2	Analisi inversa deterministica	91
5.3	L'approccio "semi-probabilistico"	99
5.4	Analisi inversa probabilistica	115
5.4.1	Caso 1: matrice di covarianza dei residui non nota	122
5.4.2	Caso 2: matrice di covarianza dei residui nota	152
	Osservazioni conclusive	165
	Bibliografia	169

Sommario

Negli ultimi anni, la valutazione del rischio da frane ha assunto un significato ed un'importanza sempre maggiori. I movimenti di versante, sia in terra sia in roccia, sono, infatti, tra i maggiori pericoli naturali e rappresentano una seria minaccia per la popolazione e le proprietà, a causa soprattutto dell'influenza antropica sulle continue modifiche del territorio.

Questo scenario è tipico sia nelle zone alpine sia in quelle appenniniche del territorio italiano. Molte frane che avvengono in tali aree consistono in movimenti lenti, traslativi, piuttosto superficiali, che coinvolgono materiale fine, essenzialmente argilla. Il fattore scatenante principale è idrologico, per cui gli spostamenti sono connessi alle fluttuazioni del livello di falda.

Per studiare il comportamento di questa tipologia di frane, è stato messo a punto un modello dinamico-viscoso, capace di prevedere una misura di spostamento, a partire da un valore del livello piezometrico, e di restituire una stima dell'angolo di attrito mobilitato. Facendo uso di un affidabile e dettagliato *database* di monitoraggio, relativo alla frana di Alverà in località Cortina d'Ampezzo, è stata eseguita una calibrazione probabilistica del modello, attraverso un approccio di tipo Bayesiano. L'uso del metodo Monte Carlo nella costruzione delle catene di Markov ha permesso il campionamento della probabilità a posteriori, a partire da quella a priori e dalla funzione di verosimiglianza. La soluzione del problema inverso viene espressa, quindi, in forma di funzione di densità di probabilità per

ognuno dei parametri del modello, includendo la loro struttura di correlazione.

Un simile approccio rappresenta uno strumento di analisi più razionale per una futura gestione del rischio, in quanto permette da un lato la quantificazione delle incertezze legate alle previsioni del modello, dall'altro di considerare e di utilizzare l'informazione acquisita in una maniera più efficace.

Abstract

In recent years, landslide risk assessment has gained significant and ever increasing importance. In fact, soil and rock movements are natural threats that represent the major risk for both the population and infrastructure, particularly due to the anthropic influence on the continuous modifications of the territory.

This is a typical scenery in Italy, along both the Alpine and Apennine chain. Most landslides occurring in this area consist of slow shallow translational movements, which involve fine, essentially clay material. The main triggering factor is hydrologic, since the movements are usually strictly connected to ground water level fluctuations.

In order to study the behaviour of this type of landslides, a well-defined dynamic-viscous model, able to predict the displacements from groundwater level inputs and return a value of mobilised friction angle, was set up. Making use of well established and highly reliable monitoring database of Alverà landslide, located in Cortina d'Ampezzo (Dolomites, Italy), a probabilistic model calibration was performed, by means of the Bayesian approach. Starting from the prior and the likelihood, the use of Markov-Chain Monte Carlo method allowed to sample the posterior, given in the form of probability density function for each model parameter conditioned on site specific data, including their corresponding correlation structure.

Such approach represents a more rational tool for future risk management, as it enables to take into account the available information

in a more effective way and to quantify the uncertainty related to the predictions.

Introduzione

Le frane costituiscono un pericolo naturale molto frequente nel territorio italiano. Identificare e comprendere i fattori che ne causano il verificarsi, così come studiare e prevedere il loro comportamento e la loro evoluzione una volta innescate, è senza dubbio fondamentale per evitare o, comunque, ridurre i danni che esse possono arrecare alle proprietà o, peggio, alla popolazione. L'insieme delle fasi di studio del fenomeno franoso, di analisi delle possibili conseguenze e delle eventuali misure di intervento e di mitigazione, di pianificazione ed urbanizzazione del territorio, costituisce il processo di analisi e gestione del rischio. Tutti gli elementi che compaiono all'interno di tale processo devono essere definiti in termini probabilistici, in quanto è necessario caratterizzare e considerare l'incertezza insita in ogni fase di analisi.

Nella presente dissertazione si prenderà in considerazione una particolare tipologia di frana, molto diffusa in Italia sia lungo l'arco alpino che in quello appenninico: si tratta di movimenti di versante caratterizzati da scivolamenti traslativi o roto-traslativi, piuttosto superficiali, che coinvolgono in particolare terreni dalla granulometria fine, essenzialmente argille. La peculiarità principale è data dal fatto che tali materiali presentano proprietà di tipo viscoso. In conseguenza di tale caratteristica questi fenomeni franosi mostrano lenti e continui movimenti sotto il carico gravitazionale, strettamente connessi alle fluttuazioni del livello di falda e quindi di carattere periodico, che non evolvono in rotture catastrofiche nonostante il

fattore di sicurezza risulti minore di uno.

Lo studio di un simile comportamento non può essere affrontato mediante una classica analisi statica, ma richiede una modellazione del problema di tipo dinamico. Un approccio molto semplice è quello basato sui modelli analitici visco-dinamici, che tengono conto di un'ulteriore resistenza di natura viscosa offerta dal terreno e che permettono di fare previsioni in termini di spostamento, per assegnati livelli di falda. A tale scopo è necessario, ovviamente, calibrare i parametri caratteristici del modello: tale processo è noto come soluzione al problema inverso. Esso consiste nello stimare i valori dei parametri per i quali si generano delle previsioni che sono in buon accordo con le osservazioni, in modo da poterli utilizzare per fare delle ulteriori previsioni che vadano oltre i dati misurati. In questo contesto, il processo di calibrazione è di tipo deterministico, in quanto nessuna informazione di natura statistica è incorporata nella valutazione dei parametri.

In questo lavoro viene introdotto un approccio differente. Generalmente, le misurazioni di campo (come le misure piezometriche e di spostamento), i parametri caratteristici del terreno (come i parametri di resistenza e quelli viscosi), le caratteristiche geometriche del pendio, e così via, costituiscono delle sorgenti di incertezza che devono essere considerate nel processo di calibrazione. Questo implica che la soluzione al problema inverso richiede una formulazione di tipo probabilistico.

Una delle formulazioni probabilistiche più note è rappresentata dal paradigma di Bayes. Esso definisce la distribuzione di probabilità congiunta dei parametri del modello (probabilità a posteriori) come combinazione della loro informazione a priori (probabilità a priori) e della misura della prestazione del modello previsionale (funzione di verosimiglianza). La posteriori può essere interpretata come la probabilità di avere i parametri del modello una volta che è stato introdotto un aggiornamento sulle osservazioni.

La caratteristica significativa del processo di calibrazione proba-

bilistico risiede proprio nella descrizione finale dei parametri. Questa è data dalle loro funzioni di densità di probabilità marginali e dalla loro struttura di correlazione, in opposizione al classico approccio deterministico in cui la soluzione consiste in un *set* di valori attesi. Per ottenere ciò è necessario integrare la funzione a posteriori. A tale scopo bisogna definire una distribuzione di probabilità a priori ed una struttura di correlazione per i parametri del modello ed una matrice di covarianza per le osservazioni e le previsioni; in questo modo la probabilità a priori e la funzione di verosimiglianza possono essere formulate. A questo punto, l'integrazione della funzione a posteriori può essere eseguita attraverso metodi numerici, come le catene di Markov basate sul metodo Monte Carlo e sull'algoritmo Metropolis-Hastings. Questo approccio viene ampiamente utilizzato per la sua efficienza di campionamento computazionale.

La tesi risulta, quindi, così strutturata: nel primo capitolo viene illustrato l'intero processo di analisi e gestione del rischio da frane, specificando il contesto all'interno del quale si inserisce il presente lavoro. Nel secondo capitolo si discute delle caratteristiche dei movimenti lenti di versante di natura viscosa (detti anche frane per *creep*) e viene presentato un modello dinamico previsionale atto a riprodurre il comportamento di tali fenomeni franosi. Il terzo capitolo introduce il concetto di problema inverso ed analizza i diversi approcci per la sua risoluzione, illustrando una tecnica di ottimizzazione numerica per la soluzione deterministica e presentando gli elementi della formulazione Bayesiana per la soluzione probabilistica completa. Nel quarto capitolo, per poter illustrare l'applicabilità del metodo, viene presentato un caso di studio, relativamente ad una frana situata in prossimità di Cortina d'Ampezzo, Dolomiti, per la quale si dispone di frequenti ed accurate registrazioni di spostamenti e misure piezometriche. Il quinto capitolo mostra, quindi, i risultati della calibrazione del modello utilizzando i dati della frana precedentemente illustrata, presentando i vantaggi, in termini di completezza della soluzione, riscontrabili in un approccio probabilistico rispetto

ad una tradizionale analisi deterministica.

Capitolo 1

Il Rischio da Frane

Le frane rappresentano uno dei pericoli naturali (in inglese *geo-hazards*) più diffusi in Italia, nonché uno dei più dannosi per la popolazione e le proprietà. La maggior parte del territorio italiano, infatti, è costituito da zone collinari e montuose soggette a movimenti gravitativi di differenti tipi e dimensioni. I motivi che rendono tale territorio così propenso al verificarsi di fenomeni franosi sono sicuramente legati alle sue condizioni climatiche, geologiche e morfologiche. Sia la catena alpina quanto quella appenninica stanno attraversando, a tutt'oggi, una fase di sollevamento, per cui i processi geomorfologici si manifestano in una forma ancora molto intensa. La diversa distribuzione areale delle varie formazioni litologiche si riflette, poi, sulla differente distribuzione dei vari cinematismi con cui le frane si possono presentare [3].

Quasi ogni anno, in Italia, alcune persone rimangono vittime delle frane. Considerando il periodo temporale dal 1920 al 1999, solamente nel 1944 e nel 1995 non sono state registrate perdite di vita umana legate ad eventi franosi. Tra il 1990 ed il 1999, almeno 263 persone hanno perso la vita in seguito a movimenti gravitativi di massa, con una media di 26 morti all'anno [33] [34]. Catenacci [11] ha stimato almeno 2.447 vittime nel periodo 1945-1990.

Per questo motivo, e non solo, negli ultimi anni il settore dell'ana-

lisi e della gestione del rischio da frana sta assumendo un'importanza ed un interesse sempre maggiori, non solo da parte del mondo accademico ma anche da parte della comunità e delle amministrazioni locali. La ragione di tale interesse nasce, in primo luogo, dall'aumento della consapevolezza del significato socio-economico che un evento calamitoso può assumere e, in secondo luogo, dall'incremento della "pressione" che lo sviluppo e l'urbanizzazione esercitano sul territorio. Si è già accennato all'elevato numero dei fenomeni franosi in Italia, a causa delle condizioni orografiche e della conformazione geologica del paese, giovane ed in via di sollevamento. Tuttavia, ultimamente il pericolo da frane è stato fortemente condizionato dall'azione dell'uomo e dalle continue modifiche del territorio che hanno, da un lato, incrementato la frequenza di accadimento degli eventi franosi e, dall'altro, aumentato la presenza di beni e di persone nelle zone dove tali eventi sono possibili. Alla luce di ciò, un'opportuna valutazione del rischio, affrontata non solo a livello qualitativo, risulta di indubbia importanza nell'ambito di una razionale pianificazione del territorio e di un adeguato sviluppo urbanistico.

Prima di entrare nel dettaglio del processo di gestione razionale del rischio, è bene introdurre alcune definizioni. I primi concetti di pericolo e rischio sono dovuti a Varnes e IAEG (1984) [52], successivamente solo lievemente modificati da altri autori, come Einstein (1988) [25] e Fell (1994) [27]. Le definizioni comunemente usate nel campo dell'analisi del rischio sono:

- *Pericolosità (Hazard)*: probabilità di accadimento di una frana potenzialmente dannosa, in una certa area ed in un determinato periodo di tempo.
- *Elemento a rischio (Element at risk)*: popolazione, proprietà, attività economiche e così via, esposte a rischio in una determinata area.

- *Vulnerabilità (Vulnerability)*: grado di perdita di un elemento o di un insieme di elementi, provocato dal verificarsi di una frana di una certa magnitudo.
- *Rischio totale (Total risk)*: misura del numero o del valore atteso delle perdite e dei danni causati da un determinato fenomeno franoso.
- *Rischio specifico (Specific risk)*: grado atteso delle perdite e dei danni dovuti ad un particolare fenomeno gravitativo.
- *Rischio residuo (Residual risk)*: livello di rischio ancora presente a seguito di interventi di mitigazione del rischio stesso.

È ormai prassi comune valutare il rischio come il prodotto di tre fattori:

$$R = H \times E \times V = H \times C \quad (1.1)$$

dove H è la pericolosità, E esprime il valore dell'elemento a rischio, V rappresenta il suo grado di perdita, ovvero la sua vulnerabilità. Il prodotto tra E e V definisce le conseguenze C . Il rischio R esprime dunque il numero atteso di perdite di vite umane, di feriti, di danni a proprietà, di distruzione di attività economiche o di risorse naturali, dovuti ad un particolare evento dannoso, nel caso specifico le frane.

Il concetto di rischio presuppone che gli elementi appena citati vengano definiti in termini probabilistici. Risulta, quindi, fondamentale affrontare l'analisi del problema mediante un approccio di tipo probabilistico piuttosto che attraverso un più classico approccio di tipo deterministico. A tale proposito, è necessario definire l'incertezza insita in ogni elemento, nonché considerare la sua propagazione all'interno dell'intero processo decisionale.

1.1 L'analisi del rischio

L'analisi e la gestione del rischio in aree potenzialmente instabili richiede la considerazione di numerosi fattori e scenari. Per uno studio in tale direzione sono necessarie una considerevole conoscenza ed una esperienza nel campo per poter identificare i possibili differenti tipi di eventi franosi e valutarne i meccanismi di rottura che ne sono alla base e per quantificare, sia a livello spaziale che temporale, la probabilità che ogni tipologia di evento calamitoso possa verificarsi. Bisogna tenere presente, ad esempio, che molte frane sono la conseguenza di un evento naturale come una intensa precipitazione od un terremoto, per cui è necessario valutare il ruolo di tali agenti scatenanti nell'innescare di nuovi movimenti o nella riattivazione di masse franose già esistenti. La dimensione e la capacità distruttiva di una frana, infatti, possono essere correlate all'intensità e alla durata di ogni specifico fenomeno scatenante.

In generale, il rischio da frane può essere affrontato attraverso i seguenti passi:

1. identificazione di una potenziale frana e valutazione della probabilità di accadimento (stima qualitativa o quantitativa della frequenza);
2. valutazione del volume, della velocità e della distanza di viaggio della frana;
3. identificazione degli elementi a rischio (come le proprietà o la popolazione), valutazione della loro vulnerabilità quando esposti alla frana e stima della loro probabilità temporale (probabilità cioè che l'elemento a rischio, come ad esempio le persone od i veicoli, si trovi nell'area interessata dalla frana quando questa avviene);
4. valutazione del possibile valore delle perdite attese;

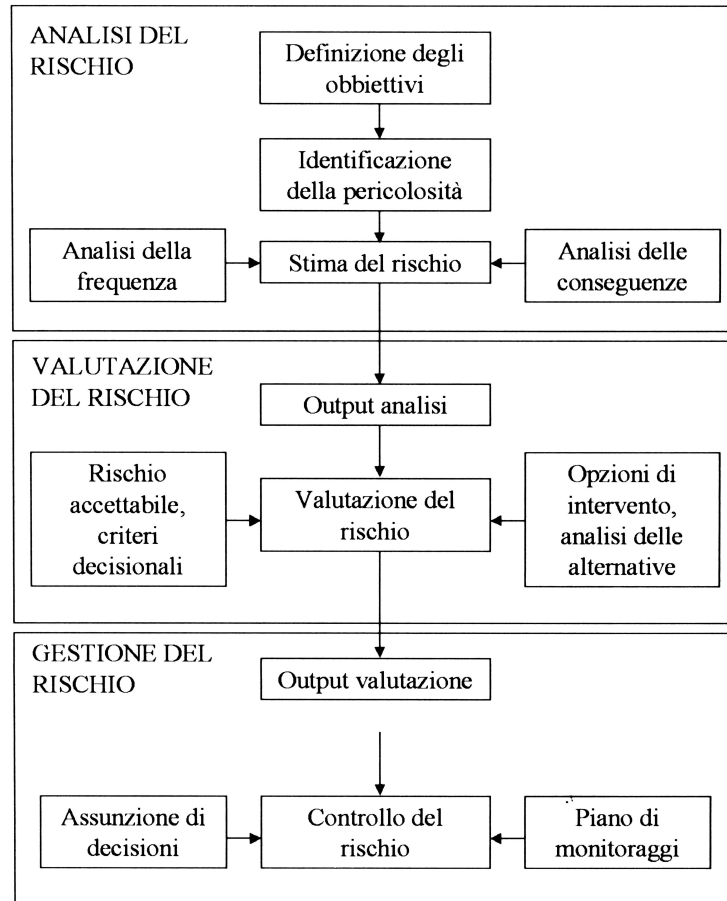


Figura 1.1 Fasi del processo decisionale nell'ambito di una gestione del rischio [3] [28].

5. stima del rischio (attraverso la 1.1) e confronto con i livelli di rischio tollerabile o accettabile;
6. strategie di gestione e trattamento del rischio.

Nel processo di analisi si possono distinguere tre fasi, come ben illustrato in figura 1.1. La prima, detta analisi del rischio (*risk analysis*), comprende l'identificazione del fenomeno naturale potenzialmente pericoloso e l'analisi della sua frequenza (*step 1*, spesso distin-

ta ed identificata come ulteriore fase di studio, col nome di analisi della pericolosità, in inglese *hazard analysis*), l'analisi delle conseguenze (*steps 2, 3 e 4*) e la loro combinazione per la stima del rischio. Il secondo passaggio è la valutazione del rischio (*risk assessment*), in cui quest'ultimo viene confrontato con i valori di rischio accettabili o tollerabili e vengono esaminate le possibili alternative ed opzioni di intervento (*step 5*). In ultima analisi c'è la fase di gestione del rischio (*risk management*), dove si assumono le decisioni sugli interventi da eseguire e sul piano di monitoraggio per il controllo del rischio.

Come si può vedere l'intero processo di analisi risulta essere molto complesso e richiede delle competenze multidisciplinari molto forti. La suddivisione di questa procedura in diverse fasi permette ai diversi tecnici ed esperti, coinvolti nello studio del rischio, di integrarsi e di ottenere la massima efficienza dall'analisi, sia in termini di tempo che di qualità del lavoro ottenuto.

La valutazione del rischio frane può essere affrontata in maniera qualitativa o quantitativa. La scelta più appropriata dipende dall'accuratezza del risultato desiderata e dalla natura del problema; inoltre, essa dovrebbe essere compatibile con la qualità e la quantità dei dati disponibili. In genere, per aree di grande estensione (cioè a livello regionale o nazionale), dove la qualità e la quantità dei dati può essere piuttosto scarsa, un'analisi di tipo qualitativo risulta essere più idonea; al contrario, nel caso di pendii specifici (cioè a livello locale) che si prestano ad un'analisi convenzionale all'equilibrio limite, una dettagliata valutazione del rischio dovrebbe essere eseguita.

Qualunque sia la scala di investigazione, l'analisi del rischio comporta comunque delle incertezze che, in via diretta o indiretta, devono essere prese in considerazione. Nella maggior parte dei casi di analisi di un pendio l'incertezza è associata ai parametri geotecnici, ai modelli geotecnici ed alla frequenza, intensità e durata degli agenti scatenanti. L'importanza delle differenti incertezze dipende dalla dimensione e dalla rilevanza del progetto come pure dall'estensione e

dalla qualità delle indagini e delle prove di laboratorio. Un'altra sorgente di incertezza è la variabilità temporale di parametri importanti come la pressione interstiziale dell'acqua all'interno di un pendio a differenti profondità e specialmente lungo la potenziale superficie di scorrimento. A queste si aggiungono gli effetti delle incertezze sistematiche che sono la conseguenza del limitato numero di sondaggi e del fatto che nessun metodo di misura risulta perfetto. L'importanza della valutazione e della gestione di tali incertezze sarà discussa in questo capitolo più avanti.

1.1.1 Valutazione del rischio

Da un punto di vista quantitativo, il rischio può essere stimato attraverso la relazione generale 1.1. Le linee guida della *Australian Geomechanics Society* sulla gestione del rischio frane distinguono, in realtà, tra rischio per le proprietà e rischio per la vita umana [1].

Per i beni, il rischio viene così calcolato:

$$R_{prop} = P_H \times P_{S|H} \times V_{Prop|S} \times E \quad (1.2)$$

dove R_{prop} è il rischio, inteso come perdita annuale del valore della proprietà; P_H è la probabilità annuale di accadimento dell'evento franoso; $P_{S|H}$ è la probabilità di impatto spaziale della frana con la proprietà (considerando il *runout*) e, ad esempio per i veicoli, la probabilità temporale; $V_{Prop|S}$ è la vulnerabilità del bene all'impatto spaziale, intesa come proporzione di perdita di valore della proprietà; E è l'elemento a rischio, ovvero il valore del bene.

Per quanto riguarda la perdita di vita umana, il rischio individuale viene calcolato come:

$$R_{DI} = P_H \times P_{S|H} \times P_{T|S} \times V_{D|T} \quad (1.3)$$

dove R_{DI} è il rischio, inteso come probabilità annuale di perdita di vita di un individuo; P_H è sempre la probabilità annuale di accadimento dell'evento franoso; $P_{S|H}$ è la probabilità di impatto spaziale

della frana (considerando il *runout*) con una costruzione che preveda la presenza di persone (ad esempio una casa), dato l'evento; $P_{T|S}$ è la probabilità temporale che la costruzione sia occupata dall'individuo, dato l'impatto spaziale; $V_{D|T}$ è la vulnerabilità dell'individuo, cioè la probabilità per la persona di perdere la vita dato l'impatto.

Un'analisi del rischio completa prevede l'esame di tutti i possibili scenari di pericolo per il sito oggetto di studio (ad esempio tutti i possibili tipi di movimento) e la considerazione di tutti gli elementi a rischio. Il rischio totale, sia per le proprietà quanto per la vita umana, è dato semplicemente dalla somma dei rischi valutati singolarmente, cioè per ogni evento franoso per ogni elemento.

La stima numerica del rischio totale così ottenuta deve essere confrontata con un valore soglia, per poter definire se tale situazione di pericolo risulti accettabile o meno. Si può immaginare la complessità di una simile scelta; tra le diverse cause vi sono la diversa natura degli elementi esposti al rischio in una determinata area e la difficoltà di definire un valore accettabile anche per la perdita di vite umane. A questo proposito alcune indicazioni sono state suggerite da Fell [27], che ha proposto una soglia di "rischio specifico accettabile" (cioè riferito ad un singolo elemento a rischio, in questo caso ad un singolo individuo) da popolazioni non consapevoli (rischio involontario) compresa tra 10^{-5} e 10^{-6} per anno. Va detto che in molte aree franose l'esposizione al rischio, più o meno consapevole, da parte della popolazione è di alcuni ordini di grandezza superiore [3].

La distinzione tra rischio "accettabile" e rischio "non accettabile" non è in realtà così netta. Esiste un'area intermedia in cui il rischio risulta essere "tollerabile". Il rischio accettato è quello che la società desidera raggiungere, il rischio tollerato è quello con cui la società è disposta a convivere, anche se preferirebbe che fosse più basso. L'area di tollerabilità del rischio viene denominata in letteratura col termine di ALARP (acronimo di *as low as reasonably practicable*). La decisione sull'accettabilità o la tollerabilità del rischio, sia per la

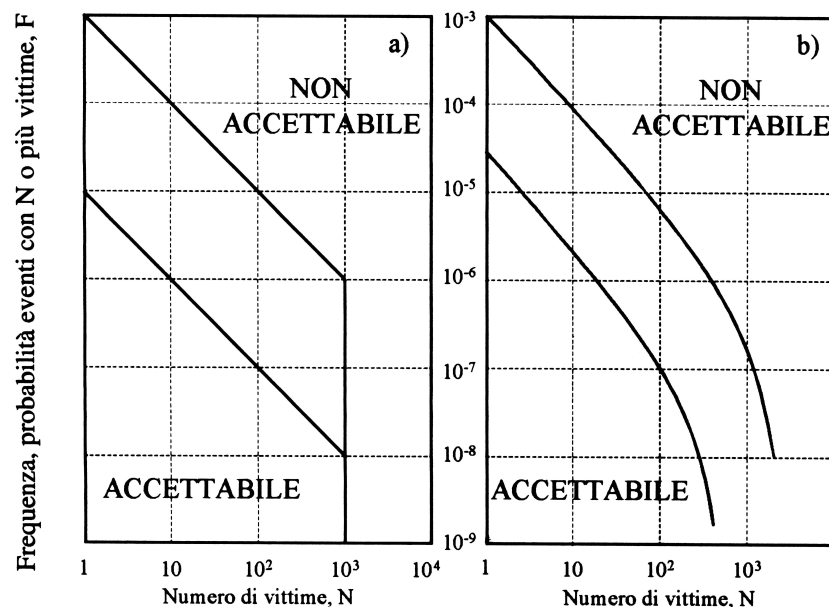


Figura 1.2 Diagramma Frequenza - Numero di vittime, con le soglie limite ed obiettivo che identificano le zone di rischio accettabile, rischio non accettabile e rischio tollerabile (ALARP). La figura a) rappresenta il criterio usato dal Governo di Hong Kong, la figura b) quello usato dalla Commissione Nazionale Australiana per dighe (ANCOLD) [3].

perdita di beni quanto per la perdita di vite umane, deve comunque essere presa dal cliente, dal proprietario o dall'ente regolatore.

Generalmente, il rischio viene rappresentato graficamente mediante un diagramma $F-N$, in cui F è la frequenza annuale di un evento e N è il numero di vittime ad esso associate, entrambi in scala logaritmica (cfr. figura 1.2). In un grafico di questo tipo la zona ALARP è delimitata superiormente ed inferiormente da due rette, definite rispettivamente soglia "limite" e soglia "obiettivo". Esse identificano tre zone: la zona di rischio accettabile, quella di rischio tollerabile e quella di rischio non accettabile. Naturalmente, tali linee mostrano un andamento decrescente della frequenza di accadimento con l'aumentare del numero di vittime. Si nota che, oltre un certo numero di vittime, il rischio è da considerarsi sempre

non accettabile, qualunque sia la probabilità che si verifichi l'evento disastroso.

Si è appena visto come la stima del rischio coinvolga l'integrazione dell'analisi della frequenza e delle conseguenze. Essa consiste, quindi, nell'analisi dei rapporti che intercorrono tra i vari fattori di vulnerabilità del territorio e le diverse forme di pericolosità possibili. Spesso, però, è difficile giungere ad una stima quantitativa del rischio per la difficoltà della parametrizzazione, in termini probabilistici, della pericolosità e della vulnerabilità e, in termini monetari, degli elementi a rischio.

Andremo ora ad analizzare, più nel dettaglio, i due elementi principali che contribuiscono alla definizione del rischio.

Analisi della pericolosità

La valutazione della pericolosità da frana di una certa area è sicuramente la fase di studio più difficile e di maggiore sforzo dell'intero processo di analisi e gestione del rischio. Essa prevede, innanzitutto, l'identificazione del luogo e del cinematismo col quale l'evento franoso può verificarsi. Questi due fattori, infatti, concorrono a definire la suscettibilità di tale zona, ovvero il grado di predisposizione di un territorio ad un evento pericoloso, in funzione sia delle sue caratteristiche geologiche, morfologiche e strutturali sia di quelle antropiche. Successivamente, per ogni singolo fenomeno se ne valuta la frequenza e la previsione spaziale, ovvero la probabilità che la frana, una volta innescata, si propaghi fino ad una determinata distanza.

Nel determinare la probabilità che un movimento di massa si attivi è fondamentale considerare le condizioni che causano tale situazione di instabilità. Queste possono essere raggruppate in due categorie: la prima comprende le cosiddette "variabili preparatorie", come la geologia, l'inclinazione e l'aspetto del pendio, l'altezza, la copertura vegetale, le proprietà geotecniche del terreno, cioè quei fattori che predispongono il pendio all'instabilità e lo rendono su-

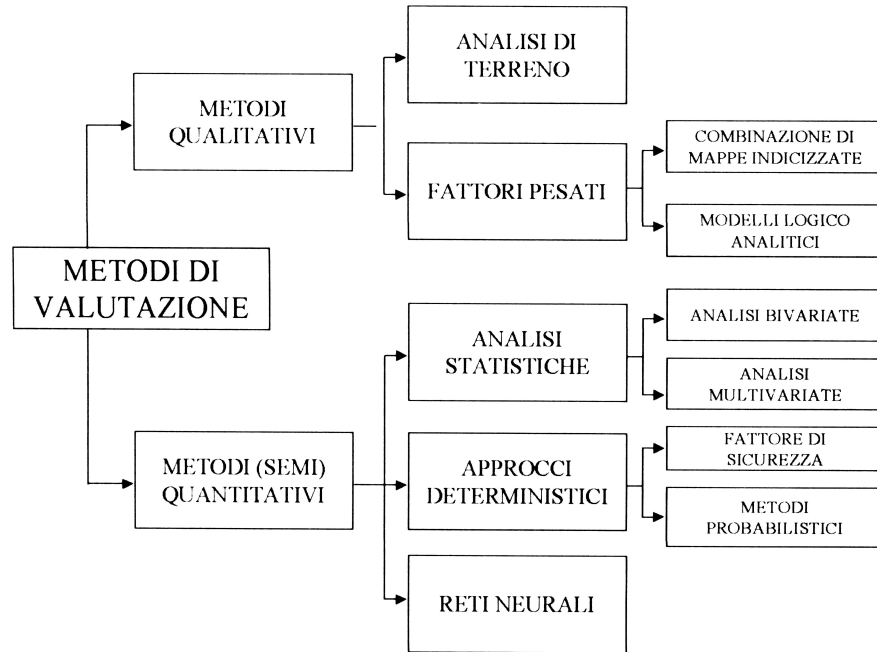


Figura 1.3 Schema delle metodologie per la valutazione del pericolo da frana [3] [2].

scettibile a rottura, senza però innescarla; la seconda categoria sono le “variabili scatenanti”, come le precipitazioni intense ed i terremoti, che portano il pendio da una condizione di stabilità marginale ad uno stato di instabilità, innescando la rottura. La probabilità di accadimento dipenderà, ovviamente, da entrambi i tipi di variabili.

L’analisi della frequenza può essere eseguita ricorrendo a metodi qualitativi o quantitativi, a seconda di come i fattori preparatori e scatenanti vengono considerati e messi in relazione con l’effetto. Un esempio delle possibili metodologie è riassunto nello schema di figura 1.3.

Un approccio qualitativo molto semplice per lo studio del pericolo da frane è il metodo basato sugli inventari. In questi *databases* vengono identificate, per ogni frana relativa ad una determinata area, lo stato di attività, il tipo dominante di movimento, la direzione

principale del movimento, lo spessore del materiale coinvolto nello scivolamento, le date note dei suoi periodi di attività. Dalle informazioni così raccolte si possono ricavare delle statistiche riguardanti la frequenza, la tipologia ed il luogo di diversi eventi franosi. Le mappe di inventario permettono di tracciare le isoplete o l'andamento della densità delle frane e possono essere utilizzate, quindi, come forma semplice ed iniziale di mappe di pericolo.

Un altro metodo tra quelli qualitativi è l'approccio basato sull'esperienza e l'osservazione di campo. Esso consiste nell'estendere al sito di interesse, per analogia, considerazioni estrapolate dall'esame di aree geograficamente distinte ma simili per assetto geologico, geomorfologico e climatico. Si distinguono, quindi, due fasi: analisi ed estrapolazione. Nella prima sono esaminati tutti i fattori che possono influenzare la stabilità, sia quelli permanenti (come la topografia, la geologia, l'idrologia) sia quelli temporanei (come il clima, l'uso antropico del territorio). Nella seconda fase tutte queste informazioni vengono estrapolate e ricondotte all'area di studio avente condizioni fisiche simili; è possibile così generare una zonazione abbastanza qualitativa del grado di pericolosità.

Un approccio simile a quest'ultimo, ma un po' più rigoroso, è quello basato sulla sovrapposizione o combinazione di mappe indicizzate o parametrizzate. Anche in questa metodologia si definiscono alcuni fattori caratteristici del grado di stabilità di un pendio e ad ognuno di essi si assegna, basandosi sull'esperienza, un certo valore pesato, proporzionale al relativo contributo atteso nel generare la rottura. L'analisi, quindi, prevede di suddividere ogni parametro in un certo numero di classi rilevanti, attribuendo ad ognuna di esse un certo peso; successivamente, si assegnano dei valori pesati per ognuno dei parametri considerati; infine, si sovrappongono le mappe così indicizzate e pesate e si ottiene la mappa finale mostrante le classi di pericolo. La metodologia appena descritta, pur restituendo un risultato di tipo numerico, si colloca comunque tra i metodi di tipo qualitativo, in quanto rimane la soggettività dei pesi da attribuire

alle varie classi dei parametri presi in considerazione.

Un possibile approccio che permette di superare la soggettività insita nei metodi sopra illustrati è rappresentato dall'analisi statistica dei parametri ritenuti discriminanti nell'innescare dei fenomeni franosi. Essa consiste nel confrontare la distribuzione spaziale delle frane con i fattori considerati. Nel caso di analisi statistica bivariata, ogni parametro individuale è comparato con la mappa delle frane. In particolare, il primo passo è quello di selezionare e mappare i parametri significanti e di classificarli all'interno di gruppi rilevanti; successivamente, si esegue la mappatura dei movimenti gravitativi e si sovrappone la mappa delle frane ottenuta con quella relativa ad ogni singolo parametro; per ognuno di questi, quindi, si attribuisce un peso ad ogni classe, sulla base della densità dei dissesti in esse riscontrata; si assegnano, poi, dei valori pesati alle varie mappe dei parametri e, alla fine, si esegue la loro sovrapposizione e si valuta il valore finale di pericolo o di suscettibilità di ogni unità territoriale identificata. Questo tipo di approccio rientra nei metodi quantitativi di valutazione della pericolosità, sebbene esista, comunque, un certo grado di soggettività nella definizione dei pesi.

Nell'analisi statistica multivariata, inizialmente viene eseguita una ripartizione dell'area oggetto di studio in celle elementari. Anche in questo caso vengono poi identificati i fattori più importanti, relativi alle caratteristiche delle frane (tipologia, dimensioni, grado di attività) e del territorio (litologia, uso del suolo), creando così delle mappe di *input*; un aspetto delicato di questa fase è la trasformazione dei parametri nominali in dati numerici. Successivamente, a partire dalla mappa delle frane, per ogni cella territoriale si identifica la percentuale delle aree affette da movimenti di versante e la si classifica in unità stabile o instabile; allo stesso modo, combinando le mappe dei parametri con quella delle celle elementari si crea una grande matrice di assenza/presenza relativamente ad una certa classe di un dato parametro, all'interno di ogni unità territoriale. La matrice ottenuta viene quindi analizzata utilizzando un'analisi stati-

stica multivariata, di tipo regressivo o discriminante. Per ultimo, le celle territoriali vengono ricodificate sulla base dei risultati raggiunti nella precedente fase e, dopo una verifica su un'are test, vengono redatte le carte di pericolosità o di suscettibilità.

I metodi fin qui discussi sono idonei e di facile utilizzo per studi di analisi di frequenza e pericolosità su un'ampia scala. A livello locale, cioè per siti specifici, un metodo quantitativo più rigoroso è quello basato sui modelli geotecnici. L'approccio entrato nella prassi ingegneristica per la valutazione della stabilità è quello del calcolo del fattore di sicurezza FS , che richiede la definizione di un appropriato modello di analisi e la stima dei dati geometrici del problema (inclinazione del pendio, profondità della superficie di rottura, e così via), dei parametri di resistenza del terreno (coesione ed angolo di attrito interno) e delle condizioni idrauliche (pressioni interstiziali). In realtà, l'analisi del rischio richiede una formulazione del fattore di sicurezza in termini probabilistici. In letteratura esistono diversi metodi di analisi (come il metodo FOSM, il metodo FORM & SORM, il metodo Monte Carlo) che propagano l'incertezza insita nei parametri di *input* del modello nel risultato finale, ovvero nella valutazione del fattore di sicurezza, permettendo la stima della probabilità di rottura di un versante p_f o, in maniera del tutto analoga, del suo indice di affidabilità β :

$$p_f = P[FS < 1] \qquad \beta = \frac{\mu_{FS} - 1}{\sigma_{FS}} \qquad (1.4)$$

Per poter calcolare la probabilità di rottura è necessario ipotizzare, o comunque conoscere, la distribuzione di probabilità di FS . Per questo motivo, spesso si preferisce fare riferimento all'indice di affidabilità, anche per una sua accezione positiva, al contrario del significato negativo insito nella probabilità di collasso.

Analisi delle conseguenze

La fase di analisi delle conseguenze prevede l'identificazione degli elementi a rischio, quali i beni e le attività presenti in una determinata area esposta ad un dato fenomeno franoso, e la definizione della loro vulnerabilità. Tra le possibili componenti soggette al pericolo frane si possono distinguere [1]:

- le proprietà, che possono essere suddivise in porzioni relative al pericolo che viene considerato;
- le persone, che vivono, lavorano o possono passare del tempo nell'area esposta alla frana;
- i servizi, come ad esempio la fornitura d'acqua o di energia elettrica;
- le strade e le strutture di comunicazione in genere;
- i veicoli presenti sulle strade, suddivisi in categorie (auto, autocarri, autobus).

Per ogni elemento a rischio è importante valutare l'esposizione E_s , ovvero la modalità con cui esso interagisce con l'evento franoso. L'esposizione dipende, quindi, non solo dalle caratteristiche proprie dell'elemento ma anche dall'intensità dell'interazione frana-elemento. Come suggerito da Aleotti [3], essa può essere definita nel seguente modo:

$$E_s = p_x(E) \times p_t(E) \quad (1.5)$$

che esprime la probabilità che l'elemento E si trovi nel punto x (p_x è la probabilità spaziale) al tempo t (p_t è la probabilità temporale). E_s è, quindi, funzione della mobilità dell'elemento: per le componenti in continuo movimento, come le auto, i treni, le persone a piedi, le persone presenti in un edificio od in una abitazione, la sua valutazione è molto complessa, mentre per gli elementi immobili l'esposizione

in un determinato punto è sempre uguale ad 1, in quanto non hanno la possibilità di sottrarsi all'evento.

Ovviamente anche il fattore E , come tutte le altre componenti che concorrono ad esprimere il rischio, deve essere espresso in termini numerici. A seconda della tipologia di elemento la quantificazione di E può essere di tipo discreto (come nel caso di persone o edifici) o espressa per unità di superficie (come nel caso di terreni). In ogni caso, il valore degli elementi a rischio è dato dalla somma dei valori di ogni singolo componente. Quando è possibile, E viene espresso in termini monetari; per la valutazione della vita umana, invece, si preferisce evitare, per ovvi motivi, la quantificazione monetaria, prediligendo l'utilizzo di una scala relativa, attribuendo ai morti, ai feriti ed ai senzatetto un costo relativo.

Infine, un ultimo aspetto da considerare riguarda la vulnerabilità dell'elemento a rischio, che indica l'attitudine di una determinata "componente ambientale" (popolazione umana, edifici, servizi, infrastrutture) a sopportare gli effetti di un evento pericoloso, in funzione della sua intensità. La vulnerabilità V esprime il grado di perdita di un dato elemento o di una serie di elementi, risultante dal verificarsi di un fenomeno di una data magnitudo, espresso in una scala da zero (nessun danno) ad uno (distruzione totale). Anche la valutazione della vulnerabilità, come nel caso della pericolosità, può essere determinata mediante metodi quantitativi o qualitativi. In ogni caso, sono diversi i fattori che devono essere presi in considerazione nella stima di V [3]:

- l'intensità del fenomeno franoso, in quanto più la frana è intensa maggiore è la sua distruttività e maggiore risulta, quindi, la vulnerabilità dell'elemento;
- le caratteristiche strutturali dell'elemento, come i materiali, la resistenza agli urti, l'elasticità, la durezza, e così via;

- la posizione dell'elemento rispetto al fenomeno, in quanto tale fattore geometrico influenza le modalità di impatto della frana con l'elemento stesso;
- la presenza di protezioni, incluse le sue caratteristiche generali, come la qualità costruttiva e progettuale.

Generalmente si tende a distinguere tra la vulnerabilità riferita ai beni e quella riferita alla vita umana. La prima viene espressa come percentuale del valore economico che può essere perso dal verificarsi dell'evento franoso ed il danno economico viene distinto in danni ai beni materiali (edifici, infrastrutture), che possono essere strutturali, funzionale od estetici, e danni alle attività (ad esempio interruzione di viabilità o di comunicazioni in genere). La seconda viene espressa, invece, dalla probabilità di avere morti, feriti o senzatetto.

Il prodotto della vulnerabilità per il valore indica, quindi, le conseguenze derivanti all'uomo, in termini sia di perdite di vite umane sia di danni materiali agli edifici, alle infrastrutture ed al sistema produttivo, in seguito al verificarsi di un evento pericoloso.

1.1.2 Gestione e mitigazione del rischio

Si è visto come la valutazione del rischio consista nell'analisi dei rapporti che intercorrono tra i vari fattori di vulnerabilità del territorio e le diverse forme di pericolosità possibili. Spesso, però, è difficile giungere ad una stima quantitativa del rischio per la difficoltà della parametrizzazione, in termini probabilistici, della pericolosità e della vulnerabilità e, in termini monetari, degli elementi a rischio. Alla fine della procedura di valutazione del rischio, i clienti privati o gli enti pubblici si trovano a decidere se accettarlo oppure se intervenire con delle misure di mitigazione. Il trattamento del rischio rappresenta l'ultima fase del lungo processo di gestione ed analisi del rischio e fornisce la metodologia per la sua riduzione e controllo.

Una lista delle possibili opzioni di intervento è la seguente [1]:

- *Accettare il rischio*: richiede che il rischio sia considerato essere all'interno del *range* di valori accettabili o tollerabili (cfr. paragrafo 1.1.1).
- *Evitare il rischio*: richiede l'abbandono del progetto, ricercando un sito o una forma di sviluppo alternativa, in modo tale che il rischio diventi accettabile o tollerabile.
- *Ridurre la pericolosità*: richiede misure di stabilizzazione della frana, come la riprofilatura del pendio, i drenaggi, gli ancoraggi, e così via. Dopo l'applicazione di tali interventi il rischio dovrebbe diventare accettabile o tollerabile.
- *Ridurre le conseguenze*: consiste nell'intraprendere misure di difesa per gli elementi a rischio, nel migliorare il comportamento dell'evento pericoloso o nel trasferire lo sviluppo dell'opera in una zona più favorevole, per raggiungere un valore del rischio accettabile o tollerabile.
- *Installare sistemi di monitoraggio e di allarme*: l'installazione di sistemi di monitoraggio e di allarme può essere usata per gestire il rischio su base provvisoria o permanente. Questi possono essere visti come altri strumenti di riduzione delle conseguenze.
- *Trasferire il rischio*: si richiede ad un'altra autorità di accettare il rischio o di compensarlo mediante, ad esempio, un'assicurazione.
- *Rimandare la decisione*: se c'è sufficiente incertezza può non essere appropriato prendere una decisione sulla base dei dati disponibili. Si richiedono, allora, ulteriori indagini o monitoraggio per fornire dati aggiuntivi per una migliore valutazione del rischio ed una idonea scelta degli interventi di mitigazione. Questa situazione risulta essere temporanea, per cui durante

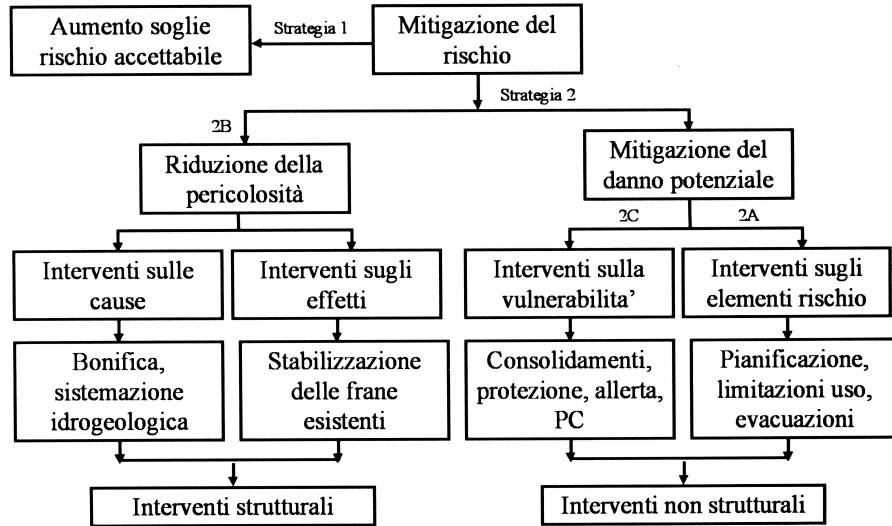


Figura 1.4 Schema di possibili strategie per la mitigazione del rischio da frana [3] [10].

gli ulteriori lavori di indagine il rischio viene accettato, anche se in realtà non risulta né accettabile né tollerabile.

La scelta delle opzioni appena citate van presa prendendo in considerazione i loro relativi costi e benefici, in modo da identificare la soluzione o l'insieme delle soluzioni più efficace.

Tutte le opzioni di mitigazione del rischio che prevedono interventi diretti agiscono nei confronti della pericolosità, della vulnerabilità o del valore degli elementi a rischio (cfr. figura 1.4). Le diverse strategie possono essere sostanzialmente raggruppate in tre categorie: controllo della pianificazione, soluzioni ingegneristiche e sistemi di monitoraggio e allarme. La prima interviene direttamente sugli elementi a rischio, la seconda sulla riduzione della probabilità di rottura o di impatto spaziale della frana oppure sulla vulnerabilità degli elementi a rischio, la terza anch'essa sulla vulnerabilità degli elementi, mediante piani di evacuazione durante l'avanzamento del fenomeno pericoloso.

Gli interventi basati sulla pianificazione del territorio sono, generalmente, la via più efficace ed economica di riduzione delle perdite da frane. Essa può essere realizzata rimuovendo o convertendo lo sviluppo esistente oppure scoraggiando o regolando i nuovi sviluppi previsti in aree instabili. Ad esempio, le aree soggette a franamento possono essere usate come spazi aperti e ricreativi, mentre possono essere proibiti usi del territorio ed operazioni che potrebbero causare movimenti di massa o potrebbero risultare vulnerabili a rottura.

Le soluzioni di tipo ingegneristico risultano, invece, le strategie più dirette e costose per ridurre il rischio da frana. In tale ambito si distinguono due generali approcci: uno consiste nell'applicazione di metodi di consolidamento del versante instabile, l'altro nel controllare il movimento della frana. Per quanto riguarda il primo, le misure di intervento più comuni sono la modifica della geometria del pendio, i sistemi di drenaggio superficiale e profondo, le strutture di contenimento, l'introduzione di elementi di rinforzo all'interno del pendio. Queste misure di intervento sono perfette come strumento di gestione di un sito specifico, sempre se, ovviamente, correttamente progettate e costruite. L'aspetto negativo nel loro uso è costituito dall'elevato costo, per cui esse vengono spesso utilizzate in presenza di alte densità di popolazione e di alti valori delle proprietà. Una strategia alternativa di mitigazione del rischio frana, che costituisce il secondo tipo di approccio, consiste nel controllare il movimento del detrito in frana, così da ridurre l'impatto spaziale sulle proprietà poste a valle. Tale fine può essere ottenuto attraverso l'installazione di argini o strutture di deviazione che incanalano il detrito di frana dentro predeterminate aree di deposizione, oppure mediante strutture di difesa (costituite generalmente da serie di set di pali di calcestruzzo, connessi tra di loro da elementi trasversali rigidi o catene) o muri di contenimento atti ad assorbire l'energia cinetica del corpo in frana, resistendo e/o deviando gli impatti.

Infine, i pendii potenzialmente instabili possono essere monitorati in modo tale che la popolazione a rischio possa essere avvisata

ed, eventualmente, evacuata. I sistemi di monitoraggio e di allarme risultano essere una buona alternativa nella riduzione del rischio nel caso di frane di grossa magnitudo, per le quali i metodi di stabilizzazione e le soluzioni ingegneristiche risultano non solo impraticabili, ma anche vantaggiose da un punto di vista dei costi, in relazione alle proprietà a rischio. Questa strategia di mitigazione si basa sulla misura o previsione di alcuni possibili fattori scatenanti (come una forte pioggia o l'accelerazione di picco di un sisma), oppure direttamente sul monitoraggio dell'effetto, come gli spostamenti della frana. Quando questi fattori superano un valore soglia viene lanciato l'allarme; ovviamente, deve essere stato previsto un piano di evacuazione. Un tipico monitoraggio misura: l'entità, la velocità, la posizione e la direzione delle deformazioni, sia quelle superficiali sia quelle all'interno della massa in movimento; le pressioni dell'acqua, i livelli di falda ed i parametri idro-meteorologici; le accelerazioni sismiche, se necessario. Sulla base dei dati di monitoraggio è possibile, quindi, valutare il comportamento globale di una frana.

La scelta tra le opzioni disponibili dipende dalle preferenze di chi prende le decisioni (sia esso un privato od un ente pubblico), una volta aver considerato tutte le possibili combinazioni di ogni intervento. Il criterio di scelta più utilizzato è quello basato su un'analisi costo-benefici. Esso richiede l'identificazione e la quantificazione di tutte le desiderate ed indesiderate conseguenze di una particolare misura di mitigazione. A tale scopo, è opportuno misurare il costo del rischio, attraverso un valore di tipo monetario.

1.2 L'importanza della definizione dell'incertezza

L'approccio probabilistico al processo di gestione del rischio risulta essere cruciale quando si vuole valutare, sia ad un livello quantitativo che qualitativo, la pericolosità e le conseguenze di un de-

terminato evento calamitoso per la salute e la vita delle persone, per l'ambiente, per le infrastrutture, per le attività economiche. Nel campo dell'instabilità dei versanti, le sorgenti di incertezza possono essere identificate in tre classi principali:

- Incertezze legate ai parametri geotecnici, a loro volta classificabili in:
 - incertezza epistemica
 - incertezza aleatoria.
- Incertezze associate ai modelli geotecnici.
- Incertezze legate all'intensità, alla frequenza ed alla durata dei fattori scatenanti.

Le prime due categorie di incertezza sono particolarmente sentite in ambito geotecnico, in quanto i terreni e le rocce, proprio per i loro processi di formazione e di alterazione, sono sicuramente tra i materiali più variabili e di più difficile modellazione nel settore dell'Ingegneria Civile. È ben noto, infatti, che all'interno di un deposito di terreno, proprietà quali la permeabilità, la compressibilità, la resistenza a taglio, possono mostrare delle variazioni significative, anche quando ci si trova all'interno di strati nominalmente omogenei. D'altronde, in ogni campagna di indagini il volume di terreno investigato e campionato costituisce generalmente una frazione molto piccola del volume totale di terreno effettivamente interessato e le valutazioni del comportamento globale devono necessariamente essere fatte sulla base di limitate, spesso carenti, informazioni.

Tale grado di aleatorietà presenta due componenti principali. La prima è la cosiddetta incertezza epistemica, dovuta ad una "cattiva" conoscenza del materiale; essa comprende gli errori dovuti ad un campionamento limitato, all'imprecisione degli strumenti e degli operatori, ai modelli adottati per la trasformazione dei parametri misurati nelle grandezze fisico-meccaniche da stimare, e così via. La

seconda componente è detta incertezza aleatoria ed è dovuta alla variabilità spaziale naturale, quindi intrinseca, del terreno, per cui le proprietà fisico-meccaniche variano più o meno sensibilmente da un punto ad un altro. Questo tipo di incertezza non può essere ridotta, mentre quella epistemica può essere diminuita con campagne di indagine e prove adeguate per quantità e qualità (ad esempio incrementando il numero di prove, migliorando i metodi di misurazione), ma non può essere eliminata.

Inoltre, a causa della complessità dei materiali geologici, è importante tenere conto anche della difficoltà di modellare correttamente il comportamento dei terreni. Per molti problemi sono necessarie delle semplificazioni e delle assunzioni concettuali nella definizione dei modelli geotecnici, che spesso si rivelano obbligate ma allo stesso tempo efficaci, soprattutto nella pratica progettuale. La caratterizzazione del loro grado di affidabilità, comunque, risulta essere, in determinati contesti di analisi, indispensabile.

Infine, i fattori scatenanti le frane sono, per loro natura, soggetti ad un elevato grado di incertezza. Una sorgente di aleatorietà può essere la variabilità temporale di alcuni parametri importanti di innesco frane, come ad esempio la pressione interstiziale all'interno di un pendio, per non parlare dell'enorme grado di incertezza nello stimare la frequenza temporale e l'intensità di un sisma.

Da quanto appena detto si può apprezzare l'enorme difficoltà nel prevedere accuratamente l'eventuale instabilità di un pendio. Per tale motivo, la migliore procedura da seguire risulta essere una sistematica valutazione del pericolo, del rischio e dell'affidabilità, attraverso metodologie di analisi rigorose che permettano di considerare e di quantificare le incertezze. Con riferimento allo schema di figura 1.5, si osserva come, all'interno di un intero processo di gestione del rischio, le fonti di incertezza siano molteplici: essa è presente nella valutazione della probabilità e della modalità di verificarsi del pericolo, nella stima delle conseguenze, nel calcolo del rischio, negli effetti e nella gestione degli interventi di mitigazione.

Con il presente lavoro si vuole dare un contributo alla definizione e alla quantificazione delle incertezze nella fase di analisi della pericolosità (*step* 3 di figura 1.5), relativamente ai movimenti lenti di versante. Questo tipo di fenomeno franoso è molto diffuso nel territorio italiano, per cui, nell'ambito di una pianificazione territoriale basata su una gestione razionale del rischio, sono richiesti uno studio ed una caratterizzazione adeguata ed affidabile. A tale proposito è stato messo a punto un modello dinamico atto a simulare il comportamento di questi movimenti, una volta che ne siano stati definiti i parametri caratteristici. La determinazione dei parametri di un modello avviene, generalmente, attraverso un processo di calibrazione, a partire da alcuni dati osservati; in questo modo il modello è capace di fare delle previsioni che vadano oltre i dati misurati, una volta che siano stati assegnati i parametri di *input*. Allo scopo di introdurre tale analisi all'interno del processo di gestione del rischio e di definirne, quindi, il grado di affidabilità, si è eseguita una calibrazione del modello di tipo probabilistico, il cui risultato consiste nella stima delle incertezze insite nei parametri del modello e, di conseguenza, nelle previsioni. Inoltre, mediante tale procedura è possibile combinare le due sorgenti principali di informazione: quella basata sulla conoscenza a priori del fenomeno e quella ricavabile da nuove osservazioni (cfr. figura 1.5).

Il modello previsionale utilizzato verrà illustrato nel capitolo 2, mentre le tecniche di analisi probabilistiche e la loro applicazione al caso di studio delle frane lente saranno discusse, rispettivamente, nei Capitoli 3 e 5.

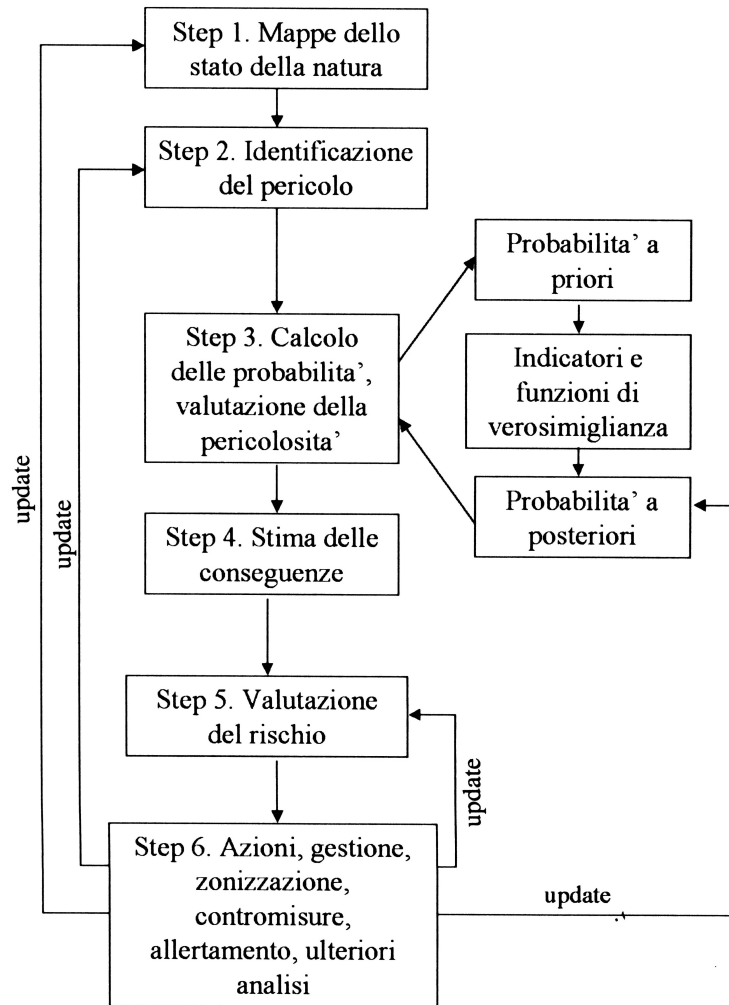


Figura 1.5 Diagramma di flusso del processo di analisi e gestione del rischio frane [3] [26].

Capitolo 2

Le Frane per *Creep*

Le frane sono un fenomeno naturale molto frequente in Italia. Esse presentano una grande eterogeneità per quanto riguarda le caratteristiche geomorfologiche e cinematiche. Si va da frane in roccia come crolli o ribaltamenti, a frane in terra come scorrimenti roto-traslativi, più o meno superficiali, e colamenti, a frane che coinvolgono materiale detritico misto a fluido, come i *debris flows*. Spesso tali tipi di movimenti si combinano dando luogo a fenomeni franosi più complessi.

Una tipologia di frana molto diffusa nel territorio italiano, sia nelle zone alpine quanto in quelle appenniniche, è costituita dalle frane di *creep*, in cui il materiale, ovvero il terreno, presenta proprietà di tipo viscoso. Esse sono generalmente caratterizzate da scivolamenti traslativi o roto-traslativi, piuttosto superficiali, che coinvolgono in particolare terreni dalla granulometria fine, essenzialmente argille. Le velocità sono molto basse, dell'ordine di qualche centimetro all'anno, per cui questo tipo di frane vengono identificate, secondo la classificazione di Cruden e Varnes (1996), come movimenti estremamente o molto lenti.

Nonostante molto raramente le frane di *creep* evolvono in rotture catastrofiche, sotto circostanze particolarmente sfavorevoli che provocano repentine ed elevate accelerazioni, esse possono comun-

que causare effetti dannosi alle infrastrutture, come strade ed edifici, poste nelle loro vicinanze e, solo di rado, perdite di vita umana. È necessario, quindi, sviluppare delle procedure avanzate di analisi e di previsione del comportamento dei pendii di *creep*, da inserire in un ambito più ampio di analisi, gestione e mitigazione del rischio da frane.

Nel presente capitolo, dopo una breve introduzione sulle proprietà dei materiali viscosi, verranno descritte le caratteristiche ed i modelli di analisi disponibili in letteratura per questa tipologia di fenomeno gravitativo, con particolare riferimento al modello dinamico di natura viscosa qui adottato, che nasce da un precedente studio di Gottardi e Butterfield [32] [8] (2001) e nel presente lavoro modificato e sviluppato.

2.1 I materiali viscosi

La viscosità è una misura della resistenza di un fluido, o più in generale di un materiale, quando esso viene deformato in seguito all'applicazione di uno sforzo di taglio o di estensione. In altre parole, la viscosità descrive la resistenza interna di un materiale a fluire. Lo studio di tale proprietà viene solitamente denominato col termine reologia.

In generale, si può affermare che in ogni flusso gli strati si muovono con differenti velocità e la viscosità deriva dalla tensione tangenziale tra gli strati che si oppone ad ogni forza applicata. La prima formulazione matematica di questo principio è dovuta a Newton, il quale ipotizzò, per un flusso uniforme, parallelo e rettilineo, che lo sforzo tangenziale τ tra gli strati fosse proporzionale al gradiente della velocità, in direzione perpendicolare agli strati (cfr. figura 2.1), secondo la seguente relazione:

$$\tau = \eta \frac{\partial u}{\partial y} \quad (2.1)$$

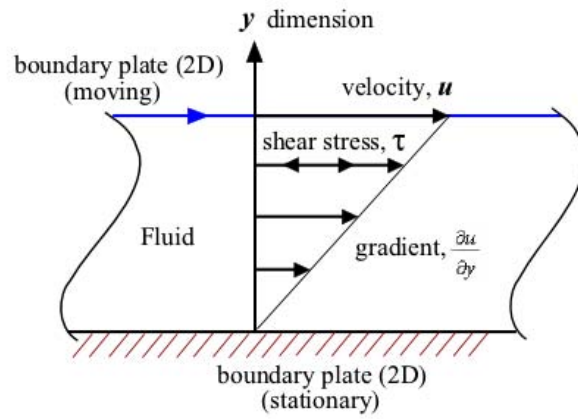


Figura 2.1 Flusso di un fluido indotto dal moto relativo di due piatti paralleli, secondo lo teoria di Newton.

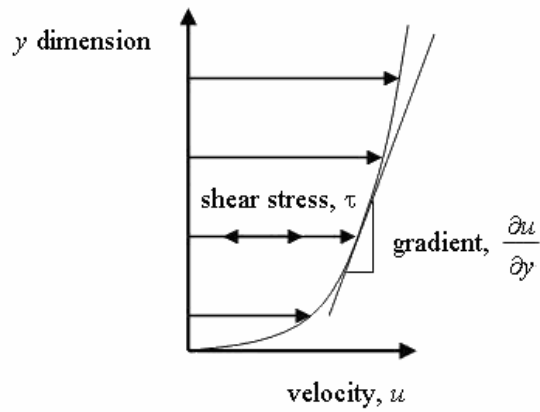


Figura 2.2 Andamento non-lineare del gradiente del flusso di scorrimento con lo sforzo di taglio, per i fluidi non-Newtoniani.

dove u è il vettore velocità e η è detto *coefficiente di viscosità* o *viscosità dinamica*.

L'equazione 2.1 definisce un comportamento viscoso ideale, caratterizzato da un valore del coefficiente di viscosità indipendente dallo sforzo di taglio τ e dal gradiente del flusso di scorrimento $\partial u/\partial y$. I fluidi che esibiscono tale comportamento vengono detti, appunto, *Newtoniani*.

Esistono, invece, molti materiali che presentano una risposta nel gradiente delle velocità non lineare rispetto allo sforzo di taglio (cfr. figura 2.2). Per tale motivo essi sono definiti *fluidi non Newtoniani*. Tra questi si possono distinguere, ad esempio, i fluidi pseudoplastici e dilatanti, il cui comportamento è funzione della velocità di deformazione; in particolare, i primi presentano notevole deformazione iniziale a bassi sforzi e piccole deformazioni a sforzi elevati, mentre i secondi il viceversa. Un confronto tra i diversi tipi di fluidi, in relazione al differente comportamento sforzo-velocità di deformazione, è rappresentato in figura 2.3.

Un particolare tipo di fluido non-Newtoniano molto noto è il cosiddetto fluido alla *Bingham*. Il suo comportamento è molto simile a quello di un fluido Newtoniano. Infatti, in un diagramma reologico, dove viene riportato lo sforzo di taglio in funzione della velocità di deformazione (cfr. figura 2.3), i fluidi Newtoniani sono caratterizzati da una retta che parte dall'origine ed ha inclinazione pari ad $\arctan(\eta)$, mentre quelli Binghamiani risultano traslati sull'asse dell'ordinate di una certa quantità, indicata in genere con τ_0 . Tale τ_0 rappresenta uno sforzo di taglio soglia, che deve essere superato per innescare il movimento. Lo schema di comportamento dei fluidi Binghamiani è illustrato in figura 2.4.

Anche alcuni solidi possono presentare un comportamento di tipo viscoso. Questo è il caso di alcuni materiali geologici che, soprattutto in regine di deformazioni plastiche, sviluppano una certa viscosità. Il comportamento di tali terreni viene detto, appunto, *visco-plastico*. Il modello alla Bingham risulta particolarmente idoneo nel rappre-

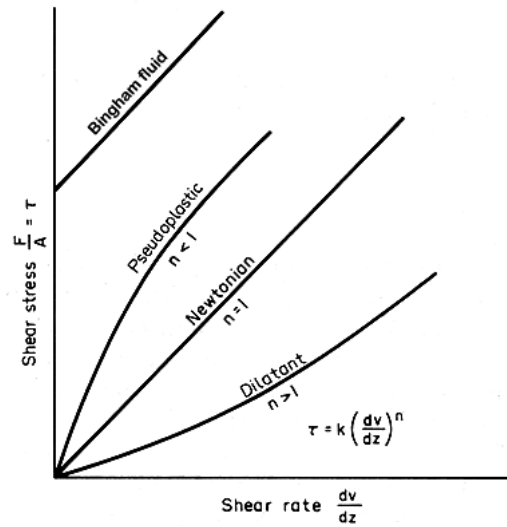


Figura 2.3 Diagramma reologico (sforzo in funzione della velocità di deformazione) per i diversi tipi di fluidi.

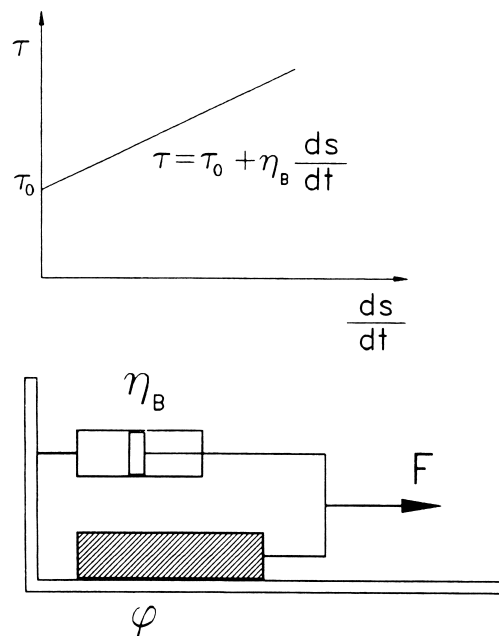


Figura 2.4 Schema di comportamento di un fluido alla Bingham.

sentare il comportamento viscoso di un terreno. In questi materiali, infatti, la resistenza viscosa si sviluppa solo quando lo sforzo di taglio applicato supera il valore della resistenza massima offerta dal terreno stesso, per cui τ_0 coincide proprio col valore della resistenza a taglio, generalmente espressa dal criterio di Mohr-Coulomb.

Nel caso particolare delle frane, la componente viscosa della resistenza entra in gioco quando la zona di terreno in corrispondenza della superficie di scorrimento ha già subito una notevole deformazione. Per questo motivo, la τ_0 viene assunta pari alla resistenza a taglio allo stato residuo:

$$\tau_0 = \tau_r = \sigma' \tan \varphi'_r \quad (2.2)$$

Alla luce di ciò, nello studio e nella modellazione del comportamento delle frane di *creep*, gli aspetti che bisogna indagare sono fondamentalmente due: il primo riguarda le caratteristiche di resistenza del materiale, con particolare riferimento all'angolo di attrito interno φ' (dato che $c' \approx 0$), il secondo concerne le proprietà viscosi del terreno. Come si vedrà nelle successive sezioni, la definizione di questi due termini è basilare per la messa a punto di un buono ed affidabile modello previsionale.

2.2 Analisi e modellazione delle frane a comportamento viscoso

Si è già introdotto come molti pendii naturali mostrino lenti e continui movimenti sotto il carico gravitazionale, che sono influenzati dalla risposta viscosa dei materiali geologici da cui sono formati. Come precedentemente accennato, questa tipologia di frane coinvolge terreni fini, di natura prettamente argillosa, caratterizzati da superfici di scorrimento non troppo profonde e da movimenti, almeno nel corpo centrale della frana, praticamente traslativi. Il loro

comportamento, quindi, bene si presta ad essere studiato mediante un semplice schema di pendio indefinito.

Il principale fattore scatenante risulta essere idrologico, in quanto i movimenti, in genere, sono fortemente correlati alle fluttuazioni del livello di falda. In seguito a ciò, gli spostamenti presentano un comportamento periodico, in accordo con le condizioni pluviometriche stagionali, per cui si alternano periodi di arresto a periodi di lento movimento, tra cui si possono frapporre fasi di improvvise accelerazioni, che, sotto particolari circostanze sfavorevoli (come cambiamenti nel comportamento del materiale, carichi esterni sul pendio, eventi piovosi estremi), possono portare a rotture catastrofiche.

Questo particolare comportamento delle frane di *creep* è il risultato di tensioni tangenziali sufficienti a produrre deformazioni permanenti, ma troppo piccole per provocare rotture a taglio discrete. Infatti, il fatto che il terreno sia caratterizzato da un comportamento di tipo visco-plastico implica l'esistenza di un'ulteriore forza resistente di natura, appunto, viscosa, in aggiunta a quella attrittiva, che ha effetto una volta che il moto viene innescato.

Per i fenomeni gravitati attivi, cioè caratterizzati da continui movimenti, una classica analisi statica non è sufficiente, ma è richiesta un'analisi di tipo dinamico. La prima, infatti, è idonea per valutare il fattore di sicurezza di un pendio, ma non è capace di modellare il reale comportamento del terreno. In un'analisi di stabilità all'equilibrio limite, la resistenza a taglio del terreno viene generalmente espressa mediante il criterio di Mohr-Coulomb. La condizione di instabilità si verifica quando l'equilibrio è modificato da un'incremento della pressione interstiziale, a causa della quale le forze destabilizzanti prevalgono su quelle stabilizzanti. Per un'assegnato livello piezometrico, perciò, si ottiene un valore della forza destabilizzante costante, che causerebbe un movimento della frana caratterizzato da una accelerazione costante e , quindi, da un incremento lineare della velocità nel tempo. La ragione per cui questo non accade può essere spiegata, appunto, con l'insorgere di una componente viscosa di

resistenza del materiale.

In letteratura esistono diverse leggi viscoso-elastiche che legano la velocità della frana all'eccesso di tensione tangenziale. La più nota è la legge di Bingham, che presenta una relazione di tipo lineare ed un valore soglia dello sforzo tangenziale, per cui:

$$\begin{cases} v = (h_m/\eta) (\tau - \tau_0) & \tau \geq \tau_0 \\ v = 0 & \tau < \tau_0 \end{cases} \quad (2.3)$$

dove v è la velocità (m/s), h_m è lo spessore della zona di taglio (m), η è la viscosità dinamica (Pa·s), τ è la tensione di taglio (Pa), τ_0 è un valore soglia della tensione tangenziale (Pa), che come visto in precedenza è definito dal criterio di rottura di Mohr-Coulomb (cfr. equazione 2.2). La relazione 2.3 è valida se si suppone un profilo delle velocità lineare in direzione perpendicolare al moto, tipico dei fluidi Newtoniani.

Se si tiene conto di tale forza resistente aggiuntiva, introducendola all'interno dell'equazione del moto, è possibile definire un modello visco-plastico atto a studiare la dinamica del movimento. L'idea alla base di un'analisi di questo tipo è che, non appena il movimento si innesca, ad un incremento della velocità segue un aumento della resistenza viscosa. Poiché questi due termini sono proporzionalmente correlati, la forza destabilizzante netta (intesa come differenza tra le forze sfavorevoli e quelle resistenti) tende a zero, così che la velocità tende ad un valore costante. Successivamente, in seguito ad un abbassamento del livello piezometrico, la velocità può scendere a zero e la frana si arresta. Questo concetto spiega perché tale tipologia di movimenti non evolve in fenomeni catastrofici o, comunque, in rotture discrete, sebbene il fattore di sicurezza risulti minore di uno.

La messa a punto di un modello dinamico affidabile è un aspetto fondamentale, forse il più importante, nella valutazione e gestione del rischio da frane. Prevedere il verificarsi di un evento franoso è essenziale per assicurare uno sviluppo urbano sicuro o, comunque, per ridurre le conseguenze sulla popolazione e le proprietà.

Negli anni recenti sono stati diversi i contributi allo studio ed all'interpretazione dei meccanismi legati alle frane di *creep*. Autori come Angeli, Gasparetto e Pasuto [4] [30] [6] o come Gottardi e Butterfield [32] [8] hanno sviluppato dei modelli dinamici, più o meno complessi, per lo studio in particolare dei movimenti della frana di Alverà, localizzata sulle Alpi, in prossimità di Cortina d'Ampezzo. Anche Van Asch [50] e Corominas [16] hanno dato il loro apporto alla comprensione dei movimenti gravitativi lenti, il primo relativamente alle frane La Vallette e La Mure nelle Alpi francesi ed Hau nelle Alpi svizzere, il secondo relativamente alla frana Vallcebre nei Pirenei spagnoli, mettendo a punto modelli basati su leggi viscoso lineari e non. Altri autori, invece, hanno sviluppato vere e proprie leggi costitutive del terreno, per tenere conto anche del suo comportamento viscoso. Nel campo delle frane i contributi più importanti sono stati dati da Vulliet et al. [53] [54] [55] [21].

Nella sezione seguente verrà illustrato il modello analitico dinamico sviluppato per il presente lavoro.

2.2.1 Un modello analitico per movimenti gravitativi lenti

Il modello analitico proposto in questo studio per descrivere il comportamento delle frane di tipo *creep* deriva da un precedente lavoro di Gottardi e Butterfield [32] [8]. Esso consiste essenzialmente nel considerare un forza resistente di tipo viscosa, in aggiunta alla resistenza d'attrito espressa dalla relazione di Mohr-Coulomb, all'interno dell'equazione del moto. Date le caratteristiche geomorfologiche delle frane che si vogliono modellare, si può fare riferimento allo schema classico di pendio indefinito. Tale assunzione equivale a considerare l'equilibrio di un corpo rigido poggiato su un piano inclinato.

Con riferimento alla figura 2.5, per un elemento unitario di massa M e di spessore D , su un pendio inclinato di un angolo θ , l'equazione

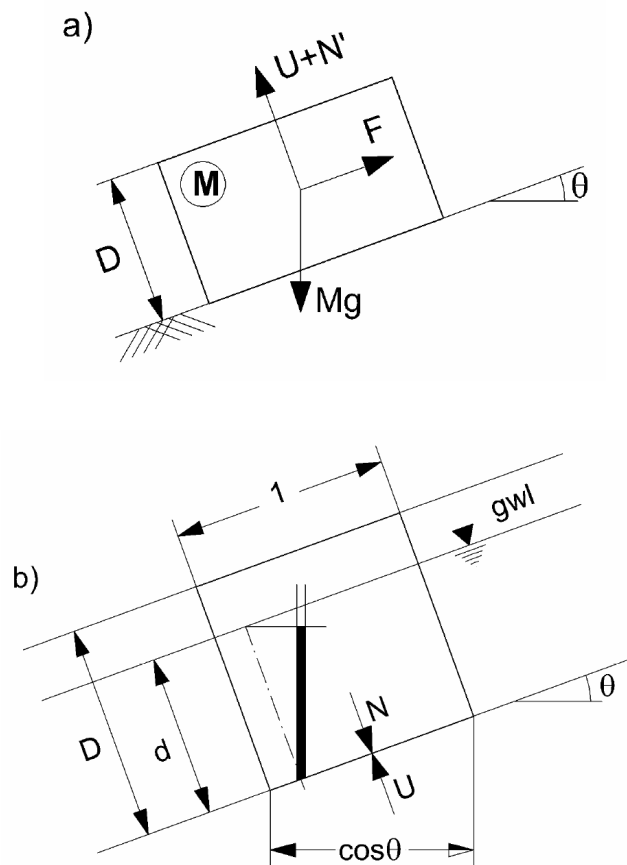


Figura 2.5 Schema di pendio indefinito.

del moto risulta:

$$M\ddot{x} = P - F_{M-C} - F_v \quad (2.4)$$

dove P è la forza destabilizzante di tipo gravitativo e F_{M-C} è la resistenza offerta dal terreno dipendente dalla coesione e dall'angolo di attrito interno. In realtà, per frane periodicamente attive e che hanno subito perciò deformazioni elevate, la resistenza del terreno si trova prossima allo stato residuo, per cui la coesione può essere assunta pari a zero. F_v è, invece, la forza resistente di natura viscosa.

Come già accennato precedentemente, esistono diverse leggi viscosose che possono essere usate per descrivere questi fenomeni. Nel nostro caso abbiamo utilizzato un modello di flusso basato sulla legge di Bingham, che considera una relazione di tipo lineare tra lo sforzo di taglio e la velocità:

$$\tau_v = \frac{\eta}{h_m} v \quad (2.5)$$

dove τ_v è la resistenza di taglio viscosa (kPa), v è la velocità (m/s), η è la viscosità dinamica (kPa·s) e h_m è lo spessore della zona di taglio (m). Con riferimento alla figura ??, le forze in gioco possono essere espresse come:

$$\begin{aligned} P &= Mg \sin \theta \\ F_{M-C} &= N' \tan \varphi' \\ F_v &= C \dot{x} \end{aligned} \quad (2.6)$$

con $C = \eta/h_m$, $\dot{x} = v$, $N = Mg \cos \theta$ e $N' = N - U = \gamma_s D \cos \theta - \gamma_w d \cos \theta$.

A questo punto è conveniente introdurre una nuova variabile adimensionale β , definita come:

$$\beta = \frac{N'}{N} = 1 - \frac{\gamma_w}{\gamma_{sat}} \frac{d}{D} \quad (2.7)$$

per cui l'equazione del moto 2.4 diventa:

$$M \ddot{x} + C \dot{x} = N (\tan \theta - \beta \tan \varphi') \quad (2.8)$$

Introducendo una coppia di valori relativi alla velocità ed a β (e quindi al livello di falda) (v_0, β_0) , che identificano il passaggio da una situazione statica ad una di scivolamento, è possibile avere una stima dell'angolo di attrito interno φ'_0 che viene mobilitato a tale istante. Assumendo che questo valore di φ'_0 rimanga costante durante la fase di movimento, introducendo la coppia di valori iniziali (v_0, β_0) nell'equazione 2.8, insieme con la condizione di accelerazione

nulla ($\ddot{x} = 0$), si ottiene la seguente relazione:

$$\tan\varphi'_0 = \frac{1}{\beta_0} \left(\tan\theta - \frac{Cv_0}{N} \right) \quad (2.9)$$

Combinando la 2.9 con l'equazione 2.8, si ha:

$$\ddot{x}/g + C\dot{x}/Mg = \sin\theta(1 - \beta/\beta_0) + (\beta/\beta_0)(Cv_0/Mg) \quad (2.10)$$

È conveniente esprimere la precedente relazione in termini adimensionali. Per cui, si introducono delle nuove variabili adimensionali, così definite:

$$\begin{aligned} T &= gt/v_0 \\ X &= xg/v_0^2 \\ \dot{X} &= (dX/dT) = \dot{x}/v_0 \\ \ddot{X} &= (d\dot{X}/dT) = \ddot{x}/g \end{aligned} \quad (2.11)$$

L'equazione 2.10 può essere riscritta come:

$$\ddot{X} + G\dot{X} = B + G(\beta/\beta_0) = H \quad (2.12)$$

dove $B = \sin\theta(1 - \beta/\beta_0)$ e $G = Cv_0/Mg$. Per risolvere l'equazione differenziale 2.12 è necessario definire le condizioni iniziali. Avendo assunto che, quando si innesca il movimento, la velocità è uguale a v_0 , le condizioni iniziali in termini adimensionali sono $\dot{X}(0) = 1$ e $X = 0$. La soluzione che ne risulta è la seguente:

$$\ddot{X} + G\dot{X} = B + G(\beta/\beta_0) = H \quad (2.13)$$

che in termini "dimensionali" si trasforma in:

$$x = X \frac{v_0^2}{g} \quad (2.14)$$

In quanto basato sulle precedenti assunzioni, il modello è idoneo per studiare il comportamento di frane per lo più traslative, il cui

movimento è strettamente connesso alle fluttuazioni del livello di falda. Esso si basa su diversi parametri, alcuni di facile determinazione altri meno. Ad esempio, il peso specifico saturo del terreno (γ_{sat}), l'inclinazione del pendio (θ) e lo spessore del corpo di frana (D) possono essere valutati da prove di laboratorio, rilievi geomorfologici e dati di monitoraggio. I parametri v_0 e β_0 , che definiscono le condizioni iniziali del moto, ed il parametro C , che caratterizza la forza viscosa, sono, invece, di difficile determinazione. Essi, ad esempio, possono essere definiti attraverso un processo di calibrazione basato su dati osservati. Una volta che tali parametri sono stati assegnati, il modello è in grado di restituire una previsione di spostamento per un dato valore di *input* del livello di falda (equazione 2.14).

Capitolo 3

Il Problema Inverso

Lo studio di un qualsiasi problema, non solo in ambito ingegneristico, può essere affrontato mediante due differenti approcci. Il primo consiste nel formulare una teoria, che mi permetta di avere una completa descrizione del fenomeno fisico da analizzare, di cui si conosca i parametri o le proprietà del materiale su cui essa si basa, in modo da prevedere i risultati di alcune misurazioni. Il secondo, al contrario, parte dalle osservazioni, per cui i dati reali ottenuti dalle misurazioni vengono usati per dedurre i parametri che caratterizzano il sistema fisico. Questi due diversi approcci di analisi vengono comunemente denominati, rispettivamente, “problema diretto” (*forward problem*) e “problema inverso” (*inverse problem*). Tipicamente, il primo è un cosiddetto problema “ben posto”, il secondo no. Secondo la definizione data da J. Hadamard, un modello matematico, che descrive un certo fenomeno fisico, si definisce “ben posto” quando soddisfa le seguenti tre condizioni:

1. esistenza della soluzione;
2. unicità della soluzione;
3. stabilità della soluzione (che si verifica quando la soluzione dipende continuamente dai dati e dai parametri o, in altre parole,

quando a piccole variazioni nei valori delle osservazioni e dei parametri corrispondono piccoli cambiamenti nella soluzione).

I problemi inversi, invece, sono generalmente “mal posti”, in quanto la seconda e terza proprietà vengono spesso violate. Per quanto riguarda la seconda condizione di Hadamard, come esempio si potrebbe citare quello riportato da A. Tarantola [48] e riguardante le misure del campo di gravità terrestre: data la distribuzione della massa all’interno del pianeta, è possibile prevedere un unico andamento del campo di gravità attorno alla terra (problema diretto), ma ci sono differenti distribuzioni di massa, quindi diverse soluzioni, che determinano esattamente lo stesso campo gravitazionale, assunto come dato osservato (problema inverso).

A causa di ciò, nel problema inverso è necessario esplicitare ogni informazione a priori disponibile sui parametri del modello, nonché rappresentare le incertezze dei dati osservati. A tale scopo, la formulazione del problema inverso in termini probabilistici risulta, pertanto, essere quella più idonea. In un classico approccio deterministico, infatti, la soluzione consiste in un *set* di valori ottimali dei parametri del modello, per i quali si ottiene la migliore corrispondenza con i dati osservati, senza però associare ad essi un grado di affidabilità. In un approccio probabilistico, invece, è possibile assegnare ad ogni possibile valore ottimale dei parametri la probabilità che esso lo sia effettivamente. Inoltre, si può introdurre nell’analisi, in maniera quantitativa e rigorosa, la conoscenza a priori circa i parametri del modello fisico, l’incertezza insita nelle previsioni e nelle osservazioni. Questi due approcci saranno discussi nei seguenti paragrafi.

3.1 Formulazione matematica del problema inverso

Sia $\mathbf{d}_{obs} = \{d_{obs1}, d_{obs2}, \dots, d_{obs p}\}$ un vettore di p osservazioni, relative ad un certo fenomeno fisico, mentre $\mathbf{m} = \{m_1, m_2, \dots, m_q\}$ è

un vettore di q elementi che rappresentano i parametri del modello matematico che si vuole utilizzare, atto a riprodurre il sistema fisico stesso. Se indichiamo quest'ultimo con \mathbf{f} e assumiamo di poter separare tutte le variabili del problema nei due gruppi sopra definiti, ovvero “parametri osservabili direttamente” o “dati” (\mathbf{d}_{obs}), definiti nello spazio \mathcal{D} , e “parametri del modello” (\mathbf{m}), definiti nello spazio \mathcal{M} , allora si può scrivere:

$$\mathbf{d}_{obs} = \mathbf{f}(\mathbf{m}) \quad (3.1)$$

dove la funzione \mathbf{f} trasforma lo spazio delle variabili del modello \mathcal{M} nello spazio delle variabili dei dati \mathcal{D} .

Nel caso particolare di problema inverso lineare, \mathbf{f} è, appunto, un operatore lineare che descrive esplicitamente la relazione tra i dati ed i parametri del modello. \mathbf{d}_{obs} e \mathbf{m} sono, allora, due vettori, mentre \mathbf{f} risulta essere una matrice, per cui la relazione 3.1 si esprime semplicemente come:

$$\mathbf{d}_{obs} = \mathbf{f}\mathbf{m} \quad (3.2)$$

che, in altri termini, equivale a scrivere:

$$d_{obs\ i} = \sum_{j=1}^q f_{i,j} m_j \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, p\} \quad (3.3)$$

Se consideriamo, invece, il caso più generale (ed anche più frequente nella modellazione di fenomeni fisici) di problemi non-lineari, la relazione 3.1 diventa molto più complessa. In questo caso, infatti, \mathbf{f} non è un operatore lineare e non può essere esplicitato per rappresentare la trasformazione dei parametri del modello (\mathbf{m}) nei dati (\mathbf{d}).

Secondo Dale [18] è possibile identificare tre tipi di soluzioni per un problema inverso:

- a. la soluzione *esatta*, che si ottiene quando esiste un operatore \mathbf{h} che inverte esattamente l'operatore \mathbf{f} , permettendo la trasformazione delle variabili \mathbf{d}_{obs} nello spazio delle variabili \mathbf{m} . Generalmente, questo tipo di soluzione si ha nel caso di problemi

fisici dove i parametri sono misurati direttamente o che presentano una dipendenza lineare con le variabili di stato. Un'altra tipica applicazione è nella soluzione di sistemi di equazioni differenziali, quando le condizioni iniziali ed al contorno permettono di raggiungere una soluzione in forma chiusa. Nel caso in cui il problema inverso non può essere risolto mediante una soluzione esatta, si ricorre all'uso di tecniche di approssimazione numeriche;

- b. la soluzione *ottimale*, che consiste nella ricerca di una stima dei parametri $\hat{\mathbf{m}}$ che minimizzano una certa funzione obiettivo. Tipiche applicazioni sono il metodo dei minimi quadrati e la stima della massima verosimiglianza. La soluzione così raggiunta resta comunque di tipo deterministico;
- c. la soluzione *completa*, in cui si tenta di trovare tutte le possibili soluzioni che soddisfano le costrizioni imposte dal problema. In questo caso, i risultati dell'inversione sono ottenuti sotto forma di funzioni di densità di probabilità. Una possibile applicazione di questo tipo di soluzione è data dal paradigma di Bayes.

3.2 Approccio deterministico al problema inverso

In un approccio di tipo deterministico, la soluzione al problema inverso consiste in un singolo *set* di parametri per i quali si ottiene la migliore corrispondenza con i dati osservati. Si è visto che, nel caso non sia possibile arrivare ad una soluzione esatta del problema, si può ricorrere a tecniche di ottimizzazione che mirano a minimizzare una certa funzione (ad esempio l'errore nelle previsioni) oppure a massimizzare la probabilità di riprodurre, attraverso il modello, le osservazioni disponibili. Qui di seguito verranno illustrati

due metodi molto diffusi: il metodo dei Minimi Quadrati ed il metodo della Massima Verosimiglianza. Nel paragrafo successivo, invece, verrà discussa una efficace tecnica di ottimizzazione, utile a risolvere numericamente i metodi appena enunciati.

Metodo dei Minimi Quadrati

Nel metodo dei Minimi Quadrati (*Least Square Estimation*, LSE) i parametri del modello vengono stimati minimizzando una funzione obiettivo, che in genere esprime l'errore delle previsioni del modello rispetto ai valori osservati. Se indichiamo con $d_{obs1}, d_{obs2}, \dots, d_{obsN}$ l'insieme di N misurazioni e con m_1, m_2, \dots, m_k le k variabili da cui dipende il problema, la funzione obiettivo si esprime come la somma dei quadrati dei residui, cioè delle differenze tra evidenze e previsioni:

$$S(\mathbf{m}; \mathbf{d}_{obs}) = \sum_{i=1}^N \Delta d_i^2 = \sum_{i=1}^N (d_{obsi} - f(\mathbf{m})), \quad (3.4)$$

dove $\Delta \mathbf{d}$ rappresenta il vettore dei residui. Le stime dei parametri $\hat{\mathbf{m}}$ si ottengono minimizzando, appunto, questa sommatoria, ovvero risolvendo il seguente sistema di equazioni alle derivate parziali:

$$\frac{\partial(S)}{\partial m_j} = 2 \sum_{i=1}^N \Delta d_i \frac{\partial \Delta d_i}{\partial m_j} = 0 \quad j = 1, 2, \dots, k \quad (3.5)$$

Nel caso di problemi lineari il metodo prevede una soluzione in forma chiusa, altrimenti si deve ricorrere a metodi iterativi, per cui i valori dei parametri si raggiungono per approssimazioni successive.

Nel presente lavoro, il modello dinamico per le frane utilizzato risulta essere fortemente non-lineare, per cui per l'analisi di tipo deterministico (cfr. paragrafo 5.2) si è fatto riferimento al metodo dei Minimi Quadrati, risolto mediante l'utilizzo di un algoritmo numerico che verrà illustrato nel seguente paragrafo.

Metodo della Massima Verosimiglianza

La stima della Massima Verosimiglianza (*Maximum Likelihood Estimation*, MLE) consiste nel determinare i parametri del modello che massimizzano la probabilità di avere il campione di dati osservati. Questo metodo è considerato essere molto robusto, in quanto è molto versatile ed applicabile alla maggior parte dei modelli ed a differenti tipi di dati.

In maniera del tutto generale, sia d_{obs} una variabile casuale con funzione densità di probabilità $f(d_{obs}; m_1, m_2, \dots, m_k)$, dove m_1, m_2, \dots, m_k sono k parametri costanti non noti, che bisogna stimare. Allora, eseguite delle misurazioni ed ottenute N indipendenti osservazioni $d_{obs1}, d_{obs2}, \dots, d_{obsN}$, la funzione di verosimiglianza (in inglese *likelihood*) è data dal seguente prodotto:

$$L(\mathbf{m}; \mathbf{d}_{obs}) = \prod_{i=1}^N f(d_{obs\ i} | m_1, m_2, \dots, m_N) \quad (3.6)$$

dove \mathbf{m} e \mathbf{d}_{obs} rappresentano i vettori dei k parametri e delle N osservazioni rispettivamente. La stima dei parametri si ottiene massimizzando L , in maniera del tutto analoga ma matematicamente più semplice, massimizzando la funzione di verosimiglianza logaritmica:

$$\begin{aligned} \Lambda(\mathbf{m}; \mathbf{d}_{obs}) &= \ln(L(\mathbf{m}; \mathbf{d}_{obs})) \\ &= \sum_{i=1}^N \ln(f(d_{obs\ i} | m_1, m_2, \dots, m_N)) \end{aligned} \quad (3.7)$$

Se massimizziamo, ad esempio, secondo la funzione logaritmica Λ , gli stimatori m_1, m_2, \dots, m_k non sono altro che le soluzioni del seguente sistema di k equazioni:

$$\frac{\partial(\Lambda)}{\partial m_j} = 0 \quad j = 1, 2, \dots, k \quad (3.8)$$

Per utilizzare il metodo della massima verosimiglianza è necessario, quindi, fare una ipotesi sulla funzione di densità di probabilità f .

Tale metodo, come appena visto, determina i parametri del modello in modo tale che sia massima la probabilità che le previsioni corrispondano con i valori osservati. Se ragioniamo in termini di residui, intesi come differenza tra osservazioni e previsioni, questo significa massimizzare la probabilità che quest'ultimi siano nulli. In altre parole, un modello funziona bene quando i residui che si ottengono da una sua previsione seguono una distribuzione Gaussiana (o Normale) a media nulla e covarianza Σ . Alla luce di ciò, se indichiamo con $\Delta \mathbf{d} = \mathbf{d}_{obs} - \mathbf{d}_{pred}$ il vettore dei residui (con \mathbf{d}_{obs} vettore delle osservazioni e \mathbf{d}_{pred} quello delle previsioni), la funzione di verosimiglianza risulta così espressa:

$$L(\mathbf{m}; \Delta \mathbf{d}) = \prod_{i=1}^N f_G(\Delta d_i | m_1, m_2, \dots, m_N) \quad (3.9)$$

dove f_G sta ad indicare la funzione di densità di probabilità Gaussiana.

Nel caso più generale, se si considerano i residui come variabili casuali tra loro correlate, quindi caratterizzate da una certa matrice di covarianza (si ricorda che l'incertezza nei residui è dovuta all'incertezza presente sia nelle osservazioni sia nelle previsioni), la funzione di verosimiglianza L data dalla relazione 3.9 diventa uguale a:

$$f_G(\Delta \mathbf{d} | \mathbf{m}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^N |\Sigma_{\Delta \mathbf{d}}|}} \exp \left[-\frac{1}{2} (\Delta \mathbf{d})^T (\Sigma_{\Delta \mathbf{d}})^{-1} (\Delta \mathbf{d}) \right] \quad (3.10)$$

dove $|\Sigma_{\Delta \mathbf{d}}|$ indica il determinante della matrice di covarianza dei residui e $(\Sigma_{\Delta \mathbf{d}})^{-1}$ la sua matrice inversa. I valori ottimali di \mathbf{m} si trovano, quindi, massimizzando questa funzione; a tale scopo si può ricorrere all'uso di diverse tecniche numeriche di ottimizzazione, una delle quali verrà illustrata di seguito.

3.2.1 Il metodo di ottimizzazione P.S.O.

Il metodo *Particle Swarm Optimization* (P.S.O.) è una tecnica abbastanza recente di risoluzione di problemi di ottimizzazione, in-

trodotta da Kennedy e Eberhart nel 1995 [22] [35], che, come richiama anche il nome, si basa sul paradigma dell'intelligenza di gruppo (o, traducendo alla lettera il nome inglese, dello sciame). Questo metodo è una tecnica molto semplice ma che, allo stesso tempo, riesce ad ottimizzare in maniera molto efficace funzioni matematiche continue, anche fortemente non lineari.

Il concetto che è alla base del *Particle Swarm Optimization* ha origine dalla simulazione di sistemi sociali semplificati: lo *swarm*, ovvero lo sciame, è, infatti, un'insieme di organismi (cioè una popolazione) che interagiscono l'uno con l'altro. Questo sistema evolve attraverso soluzioni, che vengono raggiunte sulla base delle esperienze individuali e di gruppo. In altre parole, la popolazione, iterativamente, aggiorna e cerca soluzioni ottimali mediante la condivisione delle informazioni.

Entrando nel dettaglio, nel metodo P.S.O. un problema è modellato come uno spazio delle soluzioni ad n dimensioni ed una popolazione di particelle va alla ricerca della soluzione ottimale esaminando tutto il dominio. L'algoritmo funziona nel seguente modo: ad ogni particella P_i viene assegnata, in maniera casuale, una posizione ed una velocità iniziale, rispettivamente $x_i(0)$ e $v_i(0)$. Ognuno di questi "organismi" è una potenziale soluzione che "vola" attraverso il dominio del problema e mantiene traccia delle proprie coordinate (denominate col termine *pbest*), associate alla migliore soluzione che ha raggiunto fino ad ora. Inoltre, viene mantenuta memoria anche della soluzione ottimale globale (cioè la migliore ottenuta a livello di popolazione, considerando tutte le particelle) e della sua posizione (denominata col termine *gbest*). Ad ogni *step* t di simulazione, la velocità di ogni particella viene modificata sulla base della tendenza "sociale", a partire dalla propria conoscenza e di quella delle particelle vicine. L'aggiornamento della velocità avviene, quindi, attraverso il termine "personale" e quello "globale". Quest'ultimi sono pesati mediante due numeri casuali. La procedura di ricerca della soluzione ottimale si arresta quando, ovviamente, viene raggiunto il criterio (o

i criteri) di convergenza.

A partire dalla formulazione originaria, gli stessi autori Eberhart e Kennedy [36] [23] [37] [24], nonché altri autori come Shi [46] [47], Yang [56] e Clerc [13] [14], hanno apportato delle modifiche al metodo al fine di migliorarlo. Nel presente lavoro di ricerca è stato fatto riferimento all'espressione suggerita da Clerc, che introduce un fattore di costrizione per assicurare la convergenza. L'aggiornamento della velocità v_i e, quindi, della posizione della i -esima particella ad ogni *step* t di simulazione avviene come segue:

$$\begin{cases} v_i^t = \chi [v_i^{t-1} + rand_1 c_1 (pbest_i - x_i^{t-1}) + rand_2 c_2 (gbest - x_i^{t-1})] \\ x_i^t = x_i^{t-1} + v_i^t \end{cases}$$

dove si ricorda che $pbest$ rappresenta le coordinate, nello spazio delle variabili, della posizione ottimale raggiunta fino a quel momento dalla i -esima particella, mentre $gbest$ sono le coordinate spaziali della posizione ottimale a livello di popolazione, cioè quella migliore tra tutte le particelle.

$rand_1$ e $rand_2$ sono due numeri casuali uniformi (cioè compresi tra 0 ed 1), diversi ad ogni passo di simulazione, che, moltiplicati per le due costanti di accelerazione c_1 e c_2 , rappresentano i pesi stocastici (in letteratura spesso denominati con φ_1 e φ_2) per i due termini “personale” e “globale”, che spingono le particelle rispettivamente verso le posizioni $pbest$ e $gbest$. Se si assegna, ad esempio, un valore di c_2 maggiore di c_1 , ogni particella enfatizza l'esperienza dei propri “vicini” e tende a muoversi verso la posizione *global best*, e viceversa. Inoltre, se si scelgono dei valori di c_1 e c_2 troppo piccoli, la velocità diviene gradualmente più piccola e la particella tende a rallentare nel tempo, e viceversa. In genere, come suggerito da letteratura, le costanti di accelerazione vengono fissate uguali tra loro e pari ad un valore di 2,05.

Il parametro χ è un coefficiente di costrizione (pari a 0,729), che determina l'influenza del precedente valore della velocità su quello

allo *step* attuale e controlla l'abilità della particella ad esplorare in maniera ottimale lo spazio. In altre parole, l'introduzione di tale termine contribuisce a garantire la convergenza del metodo. A tale scopo, in aggiunta al parametro di costrizione, è opportuno considerare un limite superiore per i valori delle velocità V_{max} . Se quest'ultimo risulta essere troppo grande, le particelle possono "volare" troppo lontano e mancare la soluzione ottimale; se, invece, il suo valore è troppo piccolo, la ricerca dell'ottimo può essere limitata ad un'area locale. La scelta di V_{max} dipende dalle dimensioni del dominio delle variabili in gioco. Da letteratura, si suggerisce di fissare V_{max} , per ogni variabile, pari al 10÷20% del suo *range* dinamico, cioè del suo spazio di variabilità.

Infine, un'altra scelta da effettuare, per poter applicare il metodo P.S.O., riguarda il numero di particelle. Si è riscontrato che una quantità di elementi compresa tra 30÷40 è più che sufficiente per ottenere la convergenza e, quindi, la soluzione con un numero di simulazioni ragionevole.

Tale tecnica di ottimizzazione è stata utilizzata, in questo lavoro, come metodo di calibrazione del modello, per quanto riguarda l'approccio di tipo deterministico. La scelta dei valori da assegnare ai parametri previsti dal metodo sarà discussa nel paragrafo 5.2.

3.3 Approccio probabilistico al problema inverso

La soluzione completa al problema inverso può essere raggiunta mediante una formulazione di tipo probabilistico. Tale approccio, infatti, porta ad una definizione di una distribuzione di probabilità nello spazio delle variabili del modello e permette di combinare, in maniera consistente, quelli che sono gli ingredienti di ogni problema inverso: una teoria fisica che lega i parametri del modello alle osservazioni, i dati misurati, la conoscenza a priori sui parame-

tri del modello. In sostanza, il problema inverso non è altro che una teoria matematica che descrive come e quanto un sistema fisico parametrizzato può essere derivato da questi tre elementi.

Per avere una definizione completa dei parametri che governano il fenomeno fisico oggetto di studio (nel presente lavoro le frane di *creep*), bisogna, quindi, considerare e quantificare in maniera sistematica le incertezze contenute nelle sorgenti di informazione. Questa fase di analisi richiede, in pratica, di identificare e caratterizzare le incertezze presenti nelle osservazioni (cioè gli spostamenti misurati) \mathbf{d}_{obs} e nelle previsioni (cioè gli spostamenti valutati attraverso il modello) \mathbf{d}_{pred} , nonché quelle contenute nell'informazione a priori circa i parametri del modello. Il processo di quantificazione di tali incertezze costituisce un elemento chiave nella procedura di calibrazione, in quanto ci si aspetta che esse si propagino fino alla soluzione del problema inverso.

Nel caso generale, i vettori \mathbf{d}_{obs} e \mathbf{d}_{pred} risultano, pertanto, essere costituiti da variabili casuali. Con riferimento alle osservazioni, questo significa che gli spostamenti attesi o reali della frana \mathbf{d} possono essere espressi come:

$$\mathbf{d} = \mathbf{d}_{obs} + \Delta\mathbf{d}_{obs} \quad (3.11)$$

dove \mathbf{d}_{obs} è un vettore delle misurazioni di campo considerate *random*, la cui variabilità può dipendere dall'imprecisione degli strumenti, da errori di misura (si vedrà un esempio nel capitolo 4), dall'inesperienza degli operatori, e così via. $\Delta\mathbf{d}_{obs}$ è, invece, il vettore delle differenze casuali tra \mathbf{d} e \mathbf{d}_{obs} .

In maniera del tutto simile, gli spostamenti reali \mathbf{d} possono essere definiti rispetto alle previsioni:

$$\mathbf{d} = \mathbf{d}_{pred} + \Delta\mathbf{d}_{pred} \quad (3.12)$$

dove $\mathbf{d}_{pred} = \mathbf{f}(\mathbf{m})$ è un vettore delle previsioni, considerate anch'esse *random*, valutate attraverso il modello \mathbf{f} , una volta dato un *set* dei

parametri casuali \mathbf{m} . La sua variabilità dipende dalle limitazioni del modello (come la sotto o sovra-parametrizzazione), da errori numerici legati al risolutore di calcolo, e così via. In questo caso, $\Delta\mathbf{d}_{pred}$ è, invece, il vettore delle differenze casuali tra \mathbf{d} e \mathbf{d}_{pred} .

Infine, anche il vettore atteso dei parametri del modello \mathbf{m} può essere espresso nella stessa maniera:

$$\mathbf{m} = \hat{\mathbf{m}} + \Delta \hat{\mathbf{m}} \quad (3.13)$$

dove $\hat{\mathbf{m}}$ è un vettore dei parametri casuali, che può essere ottenuto, ad esempio, da un'analisi inversa deterministica (soluzione ottimale) oppure da misurazioni dirette. $\Delta\hat{\mathbf{m}}$ è, invece, il vettore delle differenze casuali tra \mathbf{m} e $\hat{\mathbf{m}}$.

Unendo la 3.11 e la 3.12 è possibile combinare le due sorgenti di incertezza:

$$\mathbf{d}_{obs} + \Delta\mathbf{d}_{obs} = \mathbf{d}_{pred} + \Delta\mathbf{d}_{pred} \quad (3.14)$$

per cui, se definiamo $\Delta\mathbf{d} = \Delta\mathbf{d}_{pred} - \Delta\mathbf{d}_{obs}$, la 3.14 si può scrivere come:

$$\mathbf{d}_{obs} = \mathbf{d}_{pred} + \Delta\mathbf{d} \quad (3.15)$$

dove $\Delta\mathbf{d}$ rappresenta il vettore degli errori casuali, che, nel caso più generale, ingloba entrambe le sorgenti di incertezza.

Se si suppone che l'incertezza proveniente dalla modellazione sia nulla, cioè che il modello \mathbf{f} sia perfetto e che i suoi parametri siano deterministici, allora $\Delta\mathbf{d}_{pred} = 0$; se, invece, si assumono condizioni ideali di misurazione, per cui le osservazioni sono prive di incertezze, allora $\Delta\mathbf{d}_{obs} = 0$.

In questo lavoro, l'incertezza introdotta nel processo di calibrazione attraverso il vettore dei residui $\Delta\mathbf{d}$ è dovuta solo alle previsioni, per cui si è posto $\Delta\mathbf{d}_{pred} \neq 0$ e $\Delta\mathbf{d}_{obs} = 0$. Le osservazioni sono state considerate deterministiche in quanto si possiedono registrazioni relative ad un unico strumento, di cui peraltro non è possibile valutare la precisione. Per quanto riguarda le incertezze relative alle

previsioni, non si è tenuto conto della semplificazione introdotta dal modello fisico, utilizzato per riprodurre il fenomeno da studiare. Esse possono essere interpretate piuttosto come la sensitività del modello alle variazioni indotte dall'incertezza introdotta nei parametri del modello stesso.

La soluzione completa al problema inverso si ottiene, quindi, combinando questi stati di incertezza e propagandoli fino alla soluzione, che viene espressa in termini di funzioni di densità di probabilità marginali e della matrice di covarianza dei parametri \mathbf{m} . A tale scopo è necessaria una formulazione matematica del problema, che nel presente lavoro coincide con il teorema di Bayes.

3.3.1 Il teorema di Bayes

Il paradigma di Bayes è uno degli strumenti matematici più adeguati per la formulazione della soluzione completa. L'approccio Bayesiano si fonda sull'integrazione di due sorgenti principali di informazione: la priori (in inglese *prior*), che deriva da una precedente conoscenza circa i parametri del modello, e la verosimiglianza (in inglese *likelihood*), che esprime l'informazione sui parametri ottenibile dai dati osservati, attraverso il modello fisico. Queste sono entrambe espresse nella forma di funzioni di densità di probabilità, che combinate restituiscono una funzione di probabilità congiunta condizionata, chiamata posteriori (in inglese *posterior*), che rappresenta essa stessa la soluzione al problema inverso.

La formulazione analitica del teorema di Bayes che definisce la soluzione al problema inverso è la seguente:

$$\pi(\mathbf{m}|\mathbf{d}_{obs}) = \frac{f(\mathbf{d}_{obs}|\mathbf{m}, \mathbf{f}(\mathbf{m})) \pi(\mathbf{m})}{\int f(\mathbf{d}_{obs}|\mathbf{m}, \mathbf{f}(\mathbf{m})) \pi(\mathbf{m}) d\mathbf{m}} \quad (3.16)$$

dove $\pi(\mathbf{m})$ è la probabilità a priori, $f(\mathbf{d}_{obs}|\mathbf{m}, \mathbf{f}(\mathbf{m}))$ è la funzione di verosimiglianza, $\pi(\mathbf{m}|\mathbf{d}_{obs})$ è la probabilità a posteriori. Una descrizione di queste componenti verrà data nelle seguenti sezioni.

La probabilità a priori

La probabilità a priori $\pi(\mathbf{m})$ rappresenta lo stato di informazione a priori che si possiede sui parametri \mathbf{m} del modello ed è una delle due principali sorgenti di informazione integrate nella soluzione del problema inverso.

Esistono diversi tipi di funzioni a priori, ma è possibile identificare tre classi fondamentali [44]. La prima si basa sul principio elementare di motivazione insufficiente affermata da Laplace, secondo cui in assenza di conoscenza, o meglio in assenza di ogni motivo al contrario, tutti i valori dei parametri dovrebbero essere considerati equiprobabili. Nel caso di uno stato di non completa ignoranza, esistono procedure più razionali per definire i parametri del modello. La priori non-informativa (detta anche *objective prior*) può essere usata quando si ha una conoscenza molto limitata su \mathbf{m} (come ad esempio la priori di Jeffrey). La priori informativa (detta anche *subjective prior*), invece, può essere implementata quando si dispone di sufficienti evidenze per poter costruire una distribuzione basata sulle conoscenze dell'analista (come ad esempio la priori coniugata o empirica).

In particolare, nel presente lavoro la conoscenza a priori è stata valutata sulla base della priori informativa, in quanto per alcuni parametri erano disponibili delle evidenze, mentre per gli altri l'informazione è stata ricavata risolvendo il problema diretto (cfr. paragrafo 5.3). Lo stato di informazione a priori è stato, quindi, rappresentato mediante un modello di distribuzione di probabilità Lognormale. La funzione di densità di probabilità Lognormale multidimensionale della priori è così definita (a meno di una costante):

$$\pi(\mathbf{m}) \propto \frac{\exp \left[-\frac{1}{2} (\ln(\mathbf{m}) - \mu_{\mathbf{m}}^{\ln})^T (\Sigma_{\mathbf{m}}^{\ln})^{-1} (\ln(\mathbf{m}) - \mu_{\mathbf{m}}^{\ln}) \right]}{\prod_{i=1}^q m_i} \quad (3.17)$$

dove $\mu_{\mathbf{m}}^{\ln}$ e $\Sigma_{\mathbf{m}}^{\ln}$ sono rispettivamente il vettore dei valori medi e la matrice di covarianza dei parametri log-normali.

La funzione di verosimiglianza

La funzione di verosimiglianza rappresenta una misura della “prestazione” del modello, ovvero di quanto esso sia abile a riprodurre il fenomeno fisico, ed è la seconda delle due principali sorgenti di informazioni inglobate nella soluzione del problema inverso. Essa può assumere qualsiasi forma di distribuzione di probabilità, in accordo con l’andamento delle differenze tra osservazioni e previsioni. In realtà, ci si aspetta che un buon modello presenti una risposta degli errori consistente. A questo proposito si fa l’ipotesi che i residui seguano una funzione di densità Normale (o Gaussiana), per cui la distribuzione di probabilità Gaussiana multidimensionale della verosimiglianza, a meno di una costante, è la seguente:

$$f(\mathbf{d}_{obs}|\mathbf{m}, \mathbf{f}) \propto \exp \left[-\frac{1}{2} (\mathbf{d}_{obs} - \mathbf{f})^T (\Sigma_{\Delta\mathbf{d}})^{-1} (\mathbf{d}_{obs} - \mathbf{f}) \right] \quad (3.18)$$

dove $(\mathbf{d}_{obs} - \mathbf{f}) = \Delta\mathbf{d}$ e $\Sigma_{\Delta\mathbf{d}}$ sono rispettivamente il vettore e la matrice di covarianza dei residui.

La probabilità a posteriori

La probabilità a posteriori è una funzione di probabilità congiunta, ottenuta dalla combinazione tra lo stato di informazione a priori, dato dalla probabilità a priori, e la misura della “prestazione” del modello, data dalla funzione di verosimiglianza. Seguendo le precedenti assunzioni riguardo la priori e la verosimiglianza, la posteriori risulta essere così definita (sempre a meno di costanti):

$$\pi(\mathbf{m}|\mathbf{d}_{obs}) \propto \frac{\exp[\mathbf{arg}(likelihood) + \mathbf{arg}(prior)]}{\prod_{i=1}^q m_i} \quad (3.19)$$

dove:

$$\mathbf{arg}(likelihood) = -\frac{1}{2} (\mathbf{d}_{obs} - \mathbf{f}(\mathbf{m}))^T (\Sigma_{\Delta\mathbf{d}})^{-1} (\mathbf{d}_{obs} - \mathbf{f}(\mathbf{m}))$$

$$\mathbf{arg}(prior) = -\frac{1}{2} (\ln(\mathbf{m}) - \mu_{\mathbf{m}}^{\ln})^T (\Sigma_{\mathbf{m}}^{\ln})^{-1} (\ln(\mathbf{m}) - \mu_{\mathbf{m}}^{\ln})$$

L'integrazione di quest'ultima, con tutti i problemi annessi, sarà l'oggetto della sezione seguente.

3.3.2 L'integrazione della funzione a posteriori

La formulazione probabilistica al problema inverso è espressa analiticamente dal paradigma di Bayes (equazione 3.16) e porta alla definizione di una distribuzione di probabilità dei parametri nello spazio delle variabili (probabilità a posteriori, equazione 3.19). Quest'ultima combina l'informazione a priori con la nuova informazione ottenuta dai dati osservati. Poiché, in genere, la teoria che lega i dati ai parametri del modello è non-lineare, la distribuzione di probabilità a posteriori può non essere facile da descrivere. L'integrazione della posteriori diventa, allora, di difficile risoluzione, soprattutto nei casi altamente multidimensionali. Tale problema può essere superato facendo ricorso a tecniche numeriche, come le catene di Markov campionate col metodo Monte Carlo (meglio noto con il nome inglese di metodo *Markov Chain Monte Carlo*, MCMC), che permette di generare, in maniera pseudo-casuale, un'ampia collezione di valori in accordo con la distribuzione di probabilità a posteriori, anche se di quest'ultima non è disponibile una formulazione esplicita. Il più famoso ed importante algoritmo di campionamento è il Metropolis-Hastings (M-H), una generalizzazione dei metodi Metropolis e Gibbs [45] [15] [31], che permette l'analisi di problemi inversi anche altamente non-lineari.

Il metodo *Markov Chain Monte Carlo*

Negli ultimi anni la statistica computazionale è stata arricchita da un potente metodo di generazione di variabili da una distribuzione di probabilità obiettivo (in inglese *target distribution*) che è basato sulle catene di Markov, la cui distribuzione stazionaria coincide con la distribuzione di interesse. Questo tipo di tecnica numerica, nota

col termine di metodo *Markov Chain Monte Carlo*, o più semplicemente metodo MCMC, ha influenzato molto la pratica della statistica Bayesiana, in quanto viene usata per definire la distribuzione a posteriori che si presenta in un contesto di analisi priori-posteriori. L'estrema generalità e versatilità, unita alla sua praticabilità nel campionare distribuzioni mono o multi-dimensionali laddove altre tecniche falliscono o sono difficili da implementare, sono i motivi fondamentali dell'ampio interesse in tale metodo.

Entrando un po' più nel dettaglio, un processo Markoviano è un processo stocastico in cui la probabilità di transizione (ovvero la probabilità di un sistema di passare da uno stato ad un altro) dipende solamente dallo stato del sistema immediatamente precedente e non da come si è giunti a tale stato. In altre parole, una catena di Markov è una sequenza di variabili casuali tale per cui il successivo valore della serie dipende solo dal valore precedente. Quindi, in sostanza, si genera una sequenza di variabili *random* $\mathbf{X}_0, \mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_t$, in modo tale che lo stato \mathbf{X}_{t+1} con $t \geq 0$ sia distribuito secondo la distribuzione $P(\mathbf{X}_{t+1}|\mathbf{X}_t)$, che è chiamata *transition kernel* della catena. Tipicamente, si assume che la *transition kernel* non dipenda da t , rendendo così la catena omogenea dal punto di vista del tempo.

La “regola di decisione”, ovvero il criterio secondo il quale si decide di passare da uno stato a quello successivo, varia a seconda del principio che si vuole adottare (come ad esempio il campionatore di Gibbs, il Metropolis, il Metropolis-Hastings). Quest'ultimi, in particolare l'algoritmo Metropolis e quello più generale Metropolis-Hastings, verranno illustrati nella sezione seguente.

A questo punto è bene sottolineare due aspetti importanti del problema: il primo riguarda la dipendenza del campione ed il secondo la sensibilità della catena rispetto allo stato iniziale \mathbf{X}_0 . Infatti, sebbene si sia appena affermato che la *transition kernel* è indipendente da tutti gli stati precedenti tranne che dall'ultimo, in realtà la sequenza dei valori campionati risulta essere dipendente, in conseguenza del criterio di decisione che fa muovere la catena da uno

stato a quello successivo. Questo fatto, però, non causa considerevoli complicazioni nel definire la distribuzione obiettivo se il campione raccolto risulta sufficientemente ampio. Iterare la catena per un lungo tempo, inoltre, garantisce che essa dimentichi le condizioni iniziali e raggiunga un equilibrio, cioè che converga ad una distribuzione stazionaria ϕ . Per questo motivo, spesso gli stati iniziali in una analisi MCMC vengono scartati. Il numero dei valori eliminati, detto *burn-in*, b , dipende da vari fattori, come i dati, la dimensione del problema, la scelta della *transition kernel*.

In conclusione, nell'ambito di un'analisi statistica Bayesiana, il principio su cui si basa il metodo MCMC è quello di approssimare l'aspettativa della probabilità a posteriori mediante la distribuzione stazionaria ϕ , senza bisogno quindi di esprimerla in maniera analitica ed esplicita. In altre parole, l'insieme dei valori raccolti nella catena di Markov, durante il processo di campionamento, presenta gli stessi "stimatori centrali" (come la media o la mediana) e gli stessi "stimatori di dispersione" (come la matrice di covarianza) della distribuzione obiettivo, ovvero della distribuzione a posteriori, che rappresenta la soluzione del problema inverso.

Supponiamo, allora, di avere un problema con dimensione k , cioè di avere k variabili di stato casuali. Supponiamo, inoltre, di aver costruito una catena di n iterazioni e che i punti campionati \mathbf{X}_t , con $t = b+1, \dots, n$ siano distribuiti secondo la distribuzione stazionaria ϕ . A questo punto è possibile valutare le medie, le deviazioni standard, le correlazioni e le distribuzioni marginali delle k componenti di \mathbf{X} . Se $X_{t,j}$ rappresenta la j -esima componente di \mathbf{X}_t , al t -esimo passo nella catena, la media marginale viene calcolata come:

$$\bar{X}_j = \frac{1}{n-b} \sum_{t=b+1}^n X_{t,j} \quad (3.20)$$

mentre la varianza marginale risulta:

$$S_j^2 = \frac{1}{n-b-1} \sum_{t=b+1}^n (X_{t,j} - \bar{X}_j)^2 \quad (3.21)$$

Si nota come, nel determinare le statistiche delle variabili, si scartino i valori che cadono all'interno del *burn-in*, ovvero quei valori che la catena assume prima di raggiungere la condizione di stazionarietà e quindi di convergere alla distribuzione di probabilità obiettivo. In maniera del tutto simile è possibile stimare le correlazioni del campione (ad esempio la matrice di covarianza dei k parametri) o costruire la distribuzione di probabilità marginale di ogni variabile di stato.

L'algoritmo Metropolis-Hastings

L'algoritmo Metropolis-Hastings (M-H) nasce dal metodo originale sviluppato da Metropolis et al. (1953), che successivamente è stato generalizzato da Hastings (1970). Esso è un potente campionatore che fornisce un approccio generale per produrre una sequenza correlata di valori estratti da una distribuzione di probabilità obiettivo, che potrebbe essere difficile da campionare mediante un classico metodo indipendente. Questo algoritmo presenta diverse proprietà, ma una delle più utili è che esso può essere applicato in tutti quei casi in cui la distribuzione obiettivo $\pi(\mathbf{x})$ è nota a meno di una costante. Un'altra proprietà che lo rende utilizzabili in molte applicazioni è che, al contrario ad esempio del campionatore di Gibbs, non è necessario conoscere le distribuzioni condizionali.

Il metodo Metropolis-Hastings genera lo stato $t + 1$ della catena campionando un punto candidato (in inglese *candidate point*) \mathbf{Y} a partire da una distribuzione di proposta (in inglese *proposal distribution*) $q(\cdot|\mathbf{X}_t)$. Un esempio per $q(\cdot|\mathbf{X}_t)$ può essere la distribuzione Normale multidimensionale, con media \mathbf{X}_t e fissata matrice di covarianza. Si fa notare che tale distribuzione può assumere qualsiasi forma, ma, in ogni caso, essa dipende solo dallo stato precedente \mathbf{X}_t . Il punto candidato \mathbf{Y} viene accettato come il nuovo stato della catena con probabilità data da:

$$\alpha(\mathbf{X}_t, \mathbf{Y}) = \min \left\{ 1, \frac{\pi(\mathbf{Y}) q(\mathbf{X}_t|\mathbf{Y})}{\pi(\mathbf{X}_t) q(\mathbf{Y}|\mathbf{X}_t)} \right\} \quad (3.22)$$

Se il punto \mathbf{Y} non è accettato, la catena non si muove e $\mathbf{X}_{t+1} = \mathbf{X}_t$. È importante notare che la distribuzione di interesse $\pi(\mathbf{x})$ appare come rapporto, per cui la costante di proporzionalità si cancella e l'algoritmo può essere implementato anche senza conoscere la costante di normalizzazione di $\pi(\mathbf{x})$.

Nella scelta della distribuzione di campionamento $q(\cdot|\mathbf{X}_t)$ si deve tener conto del fatto che il metodo MCMC, per funzionare bene, deve soddisfare tre condizioni:

- *Irriducibilità*: la catena di Markov deve essere capace di raggiungere tutte parti interessanti della distribuzione.
- *Aperiodicità*: tutte le zone interessanti devono essere raggiunte (in principio) infinitamente spesso se la catena è iterata in maniera infinita (cioè se essa è infinitamente lunga).
- *Convergenza*: la media del campione deve convergere al valore atteso.

Un'ulteriore aspetto da tenere in mente nello scegliere $q(\cdot|\mathbf{X}_t)$ è che essa deve essere facile da campionare.

Se la distribuzione di proposta presenta la caratteristica di essere simmetrica, l'algoritmo Metropolis-Hastings coincide col metodo originale di Metropolis, in quanto si ha:

$$q(\mathbf{Y}|\mathbf{X}) = q(\mathbf{X}|\mathbf{Y}) \quad (3.23)$$

per tutti gli \mathbf{X} e \mathbf{Y} . Come conseguenza della 3.23, tali termini si cancellano nell'espressione della probabilità di accettare il punto candidato e la 3.22 diventa:

$$\alpha(\mathbf{X}_t, \mathbf{Y}) = \min \left\{ 1, \frac{\pi(\mathbf{Y})}{\pi(\mathbf{X}_t)} \right\} \quad (3.24)$$

Questo criterio di "accettazione", secondo il metodo originale Metropolis, è illustrato in figura 3.1. La probabilità che la catena si muovi dallo stato corrente \mathbf{X}_t ad un altro \mathbf{Y} è basata sul rapporto

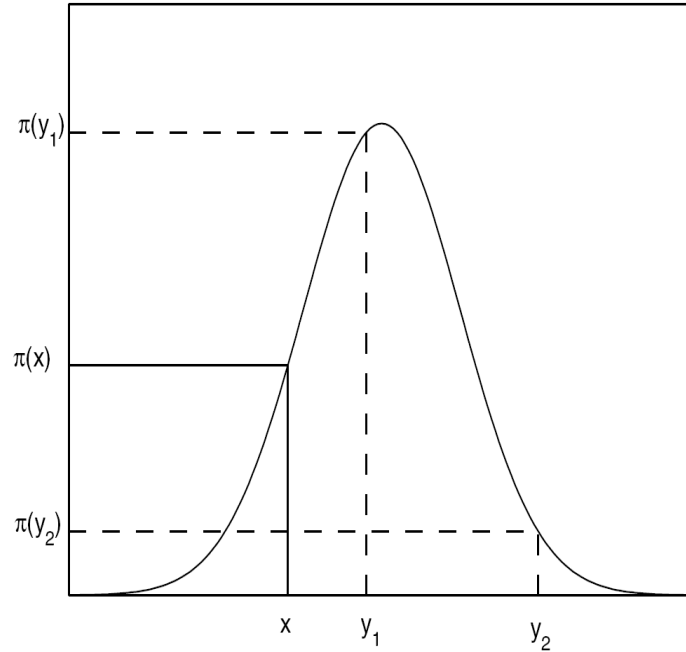


Figura 3.1 Schema di “accettazione” dell’algoritmo originale Metropolis, nel caso di distribuzione di proposta simmetrica [40].

$\pi(\mathbf{Y})/\pi(\mathbf{X}_t)$. Se $\pi(\mathbf{Y}) \geq \pi(\mathbf{X}_t)$, la catena si muoverà al punto candidato (cioè con probabilità 1). Se $\pi(\mathbf{Y}) < \pi(\mathbf{X}_t)$, la catena si muove a \mathbf{Y} con probabilità $\pi(\mathbf{Y})/\pi(\mathbf{X}_t)$. Quindi, con riferimento alla figura 3.1, si vede che il passaggio da x a y_1 sarà automaticamente accettato, mentre il passaggio a y_2 sarà accettato con probabilità pari al rapporto $\pi(y_2)/\pi(x)$.

L’implementazione dell’algoritmo Metropolis-Hastings, così come l’originale Metropolis, presenta i seguenti passi:

1. Inizializzare la catena allo stato \mathbf{X}_0 e porre $t=0$.
2. Generare un punto candidato \mathbf{Y} dalla distribuzione di proposta $q(\cdot|\mathbf{X}_t)$.
3. Generare un numero casuale U da una distribuzione uniforme $(0,1)$.

4. Se $U \leq \alpha(\mathbf{X}_t, \mathbf{Y})$ (cfr. equazione 3.22 nel caso del metodo Metropolis-Hastings, equazione 3.24 nel caso del metodo Metropolis), allora porre $\mathbf{X}_{t+1} = \mathbf{Y}$, altrimenti porre $\mathbf{X}_{t+1} = \mathbf{X}_t$. Questo *step* implica di risolvere il problema diretto per il punto candidato \mathbf{Y} e per il punto precedente \mathbf{X}_t .
5. Ripetere i passi da 2 a 4.

L'algoritmo Metropolis, o il più generale Metropolis-Hastings, possono, quindi, essere utilizzati per risolvere l'inferenza Bayesiana, semplicemente pensando i parametri del modello \mathbf{m} essere le variabili \mathbf{X} e la probabilità a posteriori essere la distribuzione obiettivo $\pi(\mathbf{x})$.

L'algoritmo Metropolis-Hastings a più blocchi

Nelle applicazioni in cui la dimensione del problema è molto grande, può verificarsi che l'algoritmo Metropolis-Hastings a blocco unico (cioè così come illustrato nella precedente sezione) converga molto lentamente alla distribuzione di probabilità obiettivo. In questi casi, risulta conveniente suddividere lo spazio delle variabili in blocchi (*multiple-block M-H algorithm*) e costruire quindi una catena di Markov attraverso questi gruppi più piccoli di parametri [31] [15]. Ad esempio, in un modello di regressione un blocco potrebbe essere costituito dai coefficienti di regressione, l'altro dalla varianza dell'errore.

Se indichiamo con $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$ gli n blocchi in cui abbiamo suddiviso lo spazio delle variabili, ognuno dei quali contenente un certo numero delle m variabili di stato (ovviamente con $n \leq m$), è possibile definire una distribuzione di proposta $q_k(\psi_k, \psi'_k | \psi_{-k})$ ed una probabilità di "accettazione" $\alpha_k(\psi_k, \psi'_k | \psi_{-k})$ per ogni k -esimo blocco, dove ψ_k rappresenta lo stato corrente del k -esimo blocco, ψ'_k il valore proposto per il k -esimo blocco, ψ_{-k} lo stato corrente degli altri blocchi.

Tenendo presente le precedenti definizioni, l'algoritmo Metropolis-Hastings a più blocchi può essere così implementato:

1. Specificare uno stato iniziale dei blocchi $\psi^{(0)} = (\psi_1^{(0)}, \psi_2^{(0)}, \dots, \psi_n^{(0)})$.
2. Generare un valore candidato per il k -esimo blocco a partire dalla relativa distribuzione di proposta q_k , condizionato dal precedente valore del k -esimo blocco e dal corrente valore degli altri blocchi:

$$\psi'_k \sim q_k(\psi_k, \cdot | \psi_{-k}).$$

3. Calcolare la probabilità di muoversi del k -esimo blocco, condizionata dagli altri blocchi:

$$\alpha_k(\psi_k, \psi'_k | \psi_{-k}) = \min \left\{ 1, \frac{\pi(\psi'_k | \psi_{-k}) q_k(\psi_k, \psi'_k | \psi_{-k})}{\pi(\psi_k | \psi_{-k}) q_k(\psi_k, \psi'_k | \psi_{-k})} \right\}.$$

4. Ripetere i passi 2-3 per tutti gli n blocchi in cui è stato suddiviso lo spazio delle variabili di stato.
5. Ripetere i passi 2-4 N volte, fino al raggiungimento della convergenza, e registrare i valori $\{\psi^{(b+1)}, \psi^{(b+2)}, \dots, \psi^{(b+N)}\}$ (dove b è il *burn-in*).

Capitolo 4

Caso di Studio: la Frana di Alverà

La frana di Alverà, situata nelle Dolomiti vicino la località di Cortina d'Ampezzo, è un caso di *earth flow* ben noto e studiato in letteratura. Gli autori che più si sono adoperati nel caratterizzarla ed analizzarla, sia da un punto di vista geologico-geotecnico sia da un punto di vista dinamico del movimento, sono Gasparetto, Deganutti ed Angeli, i quali hanno scritto diversi lavori in proposito. Il motivo di tale interesse nello studio di questa frana è legato alla presenza di un sistema di monitoraggio molto dettagliato ed accurato, protrattosi, nel caso di alcune strumentazioni, per circa nove anni. Ciò ha permesso di definire e validare alcuni modelli, atti a riprodurre il comportamento cinematico di questo tipo di movimenti. A tale proposito sono nati i lavori di Deganutti [20], Gasparetto [30] ed Angeli [4] [6], così come lo studio proposto da Gottardi e Butterfield [32] [8], da cui si è preso spunto per lo sviluppo del presente lavoro.

4.1 Inquadramento geologico-strutturale dell'area di Cortina d'Ampezzo

La valle di Cortina d'Ampezzo si trova nella zona est del complesso delle Dolomiti (figura 4.1), circondata da alti gruppi montuosi come Tofane, Lastoni di Formin, Croda da Lago, Faloria, Cristallo e Pomagagnon ed attraversata da tre principali corsi d'acqua: Boite, Bigontina e Costeana. Le formazioni presenti in tale area vanno dal Triassico Medio-Superiore al Giurassico Inferiore. La sequenza stratigrafica, andando dal basso verso l'alto, è la seguente [43]:

Formazione di S. Cassiano e Dolomia Cassiana: la prima consiste essenzialmente in una stratificazione di marne, argilliti e calcareniti grige. Tale formazione è soggetta ad intensi fenomeni di erosione che portano alla produzione di materiale argilloso-limoso, spesso coinvolto in fenomeni franosi. La Dolomia Cassiana è rappresentata da dolomie cristalline bianco-grige, generalmente massicce e morfologicamente evidenti. Lo spessore di queste formazioni può raggiungere un massimo di 350 metri.

Formazione Dürrenstein: è caratterizzata da strati decimetrici di dolomie stromatolitiche bianche. Nella parte alta è presente una successione di arenarie fini, siltiti e calcareniti, con frequenti intercalazioni pelitiche. Lo spessore varia tra i 100 ed i 250 metri.

Formazione Raibl: include siltiti e marne policrome, calcari e dolomie microcristalline, che, avendo un intenso colore ed un'elevata erodibilità, producono evidenti discontinuità morfologiche che separano le Dolomie *Dürrenstein* dalla Dolomia Principale. Lo spessore è di circa 100 metri.

Dolomia Principale: questa formazione affiora ampiamente nel-

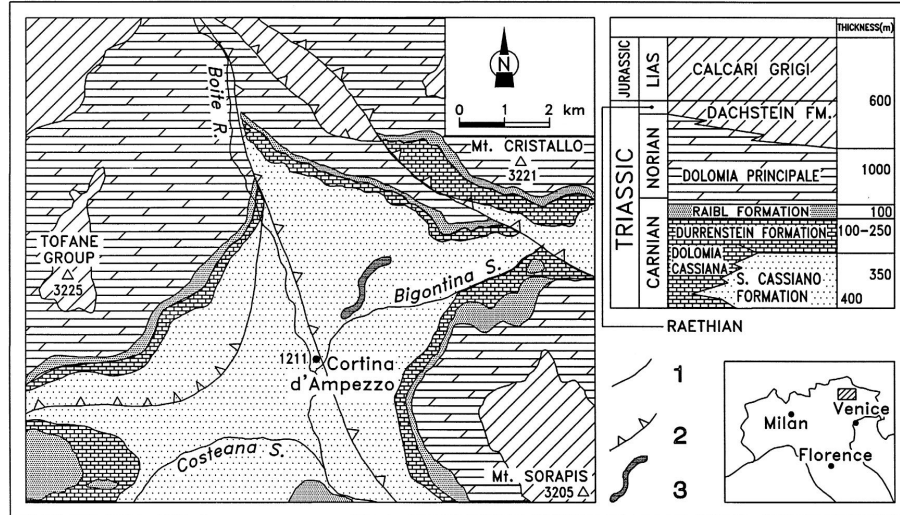


Figura 4.1 Schema geologico e sequenza stratigrafica dell'area di Cortina d'Ampezzo. Nella legenda: 1) faglia, 2) faglia inversa, 3) frana di Alverà [6].

l'area di Cortina d'Ampezzo, con spessori fino ai 1.000 metri. Essa consiste di dolomie bianche e grige, in cui sono presenti stromatolitiche e massicce litozone.

Formazione Dachstein: include calcari bioclastici contenenti grandi bivalve. Lo spessore totale è di circa 400 metri. Il limite inferiore con la Dolomia Principale è evidente e coincide con la transizione litologica tra le dolomie e i calcari.

Calcari Grigi: questa formazione è rappresentata da calcari micritici grigi e calcari bioclastici ed oolitici bianchi, che sono ampiamente affetti da fenomeni di carsismo. Lo spessore va da pochi metri a 200 metri.

Questa area, così geologicamente strutturata, è soggetta a frequenti fenomeni di instabilità, per motivi di diversa natura. Come descritto da Panizza et al. [43], per prima cosa bisogna considera-

re le condizioni strutturali della valle. La successione stratigrafiche, infatti, è caratterizzata da un'alternanza di rocce dolomitiche (Dolomia Cassiana, Formazione Dürrenstein e Dolomia Principale) a comportamento meccanico fragile e rocce (Formazione di S. Cassiano e Formazione Raibl) con comportamento meccanico più duttile. Tale situazione ha favorito lo sviluppo sia di movimenti superficiali sia di deformazioni gravitative più profonde, ampiamente diffuse nella zona.

Altro aspetto importante riguarda l'intensa attività tettonica a cui l'area di interesse è stata soggetta. Nelle dolomie, infatti, sono presenti diverse giunzioni, in corrispondenza delle principali faglie, che sono diventate potenziali superfici di scivolamento e zone preferenziali di filtrazione per l'acqua che ha raggiunto e inumidito le sottostanti formazioni marnose ed argillose. Inoltre, i fenomeni di scivolamento potrebbero essere stati favoriti da una diffusa presenza della Formazione di S. Cassiano nella parte medio-bassa dei pendii, come risultato di un parziale raddoppiamento della sequenza stratigrafica dovuto alla formazione di faglie inverse.

Non va, altresì, trascurato il ruolo della pressione dei ghiacci nella creazione di pendii potenzialmente instabili. È probabile che tale pressione abbia determinato, sui lati della valle, la deformazione delle rocce in corrispondenza di superfici di discontinuità strutturali, favorendo la formazione di potenziali superfici di rottura. Tali fenomeni sono particolarmente intensi nelle zone di confluenza di più lingue glaciali, come si è verificato nell'area immediatamente verso valle di Cortina d'Ampezzo.

Infine, da un punto di vista climatico, l'area di Cortina d'Ampezzo può essere definita di tipo Alpino, con clima che varia da freddo a temperato. Il regime pluviometrico è tipico di un ambiente alpino: i periodi più piovosi sono a fine primavera ed in estate, con un picco a Luglio. Specialmente in questa stagione, le piogge avvengono durante violenti temporali, con precipitazioni molto intense e concentrate. Per quanto riguarda le precipitazioni nevose, il periodo di

neve permanente o quasi permanente va normalmente da Dicembre a fine Aprile. Questo ambiente climatico si riflette nella frequenza dei fenomeni di instabilità che interessano l'area, in quanto, dai dati storici raccolti, si è riscontrata una forte relazione tra eventi piovosi e l'innescò di frane; tali fenomeni coinvolgono in parte frane di primo distacco ed in parte vecchie frane quiescenti.

Nell'area di Cortina d'Ampezzo appena descritta, sono state individuate più di trenta frane di differente tipo, dimensione, età e con diversa attività e frequenza [43]. Tali caratteristiche sono generalmente connesse alle condizioni litologiche e strutturali. Ad esempio, le cadute di massi avvengono nella parte più alta dei versanti, laddove affiorano le rocce dolomitiche; gli scivolamenti di terra e le colate, invece, sono frequenti nella parte medio-bassa dei pendii, dove sono presenti le formazioni marnose-argillose, mentre i movimenti molto estesi, classificati come frane di tipo complesso, coinvolgono i versanti dalla vetta fino a valle.

In realtà, va detto che l'evoluzione dell'area è stata quasi sempre caratterizzata dalla presenza di frane periodiche, principalmente colate e scivolamenti per lo più superficiali (con spessori di 15-20 metri), che coinvolgono la Formazione di S. Cassiano. A questo gruppo di movimenti può essere attribuita anche la frana di Alverà, che verrà descritta in maniera più dettagliata nella sezione seguente.

4.2 Caratterizzazione geologica e geotecnica della frana di Alverà

La frana di Alverà si estende per una lunghezza di circa 1.700 metri, con un dislivello totale di 220 metri. La larghezza del corpo in frana è mediamente di 80 metri e la sua pendenza media di circa 8°. La morfologia dell'area è stata individuata attraverso un sistema di rilevamento topografico molto dettagliato, installato lungo tutta la massa di terreno in movimento e costituito da 30 capisaldi e 4000

punti di misura. Questo è risultato fondamentale per interpretare la complessa struttura morfologica dell'area e registrare le evidenze superficiali legate alle varie zone di estensione e compressione della frana (cfr. figura 4.2).

Da un punto di vista geomorfologico, infatti, essa presenta zone a diversa pendenza e stato di attività. In particolare, si possono identificare tre settori soggetti a differenti processi geomorfologici: un'area sorgente, generalmente molto attiva, con un'inclinazione di circa 10° e movimenti piuttosto superficiali; un'area centrale, con pendenze medie di 5° , in cui sono registrati movimenti molto lenti (attorno ad 1 cm/anno) lungo una superficie di scivolamento profonda, pari a 20 metri; un'area di piede, con un gradiente di 10° , che presenta sia processi gravitativi lenti (collegati sempre alla superficie di rottura profonda) sia movimenti più veloci (circa 10 cm/anno), ad una profondità di 5 metri [6].

La stratigrafia dei terreni interessati dal movimento è stata ricostruita attraverso diversi sondaggi, localizzati in figura 4.2. Uno di questi è mostrato in figura 4.3. Si distinguono, sostanzialmente, due unità: una superiore, con uno spessore massimo di 20-25 metri e all'interno della quale avviene il movimento, costituita da blocchi irregolari, provenienti dalla roccia originaria, dispersi in una matrice argillosa, ampiamente affetta da crepe; un'unità inferiore, originata anch'essa dall'erosione delle marne e delle rocce argillose della formazione di S. Cassiano, formata da argille sature, più omogenee e sovraconsolidate.

Da un punto di vista idrogeologico, la presenza, nel materiale più superficiale, di fratture tra loro interconnesse determina dei percorsi di flusso preferenziali, dalla superficie alla falda. Tale processo di filtrazione fa in modo che il livello piezometrico sia molto sensibile alla caduta di piogge, per cui esso varia velocemente in funzione del regime pluviometrico. Inoltre, si è notato come i movimenti siano fortemente correlati alle rapide fluttuazioni della falda, in particolare quando questa superi un certo livello soglia [5].

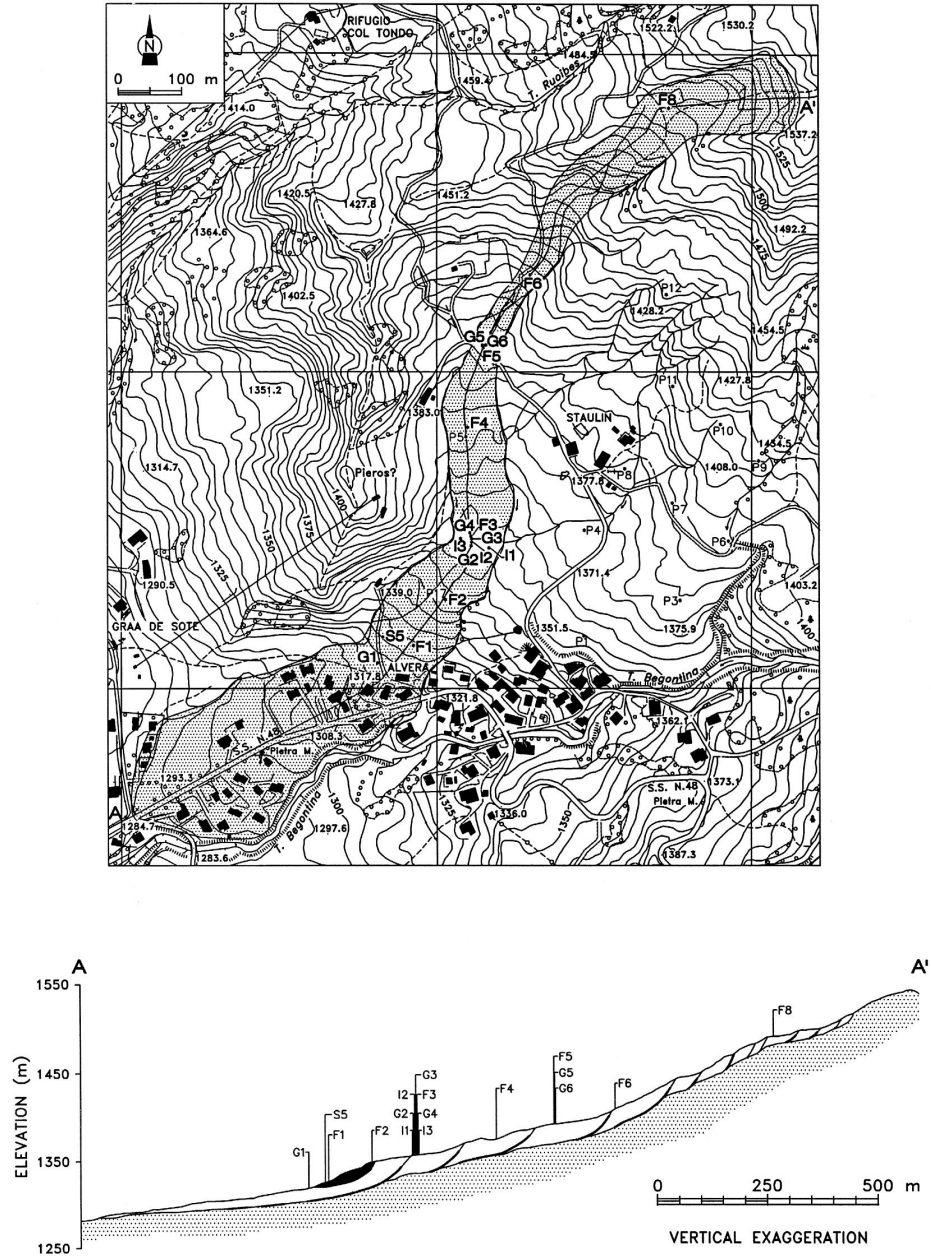


Figura 4.2 Planimetria della frana di Alverà (area ombreggiata) e sezione schematica longitudinale (in bianco il corpo principale in frana, costituito dalle argille erose della formazione di S. Cassiano; in nero il movimento più superficiale ed attivo). Nelle figure è riportata l'ubicazione dei sondaggi e della relativa strumentazione: F = piezometri, I e G = inclinometri, S = inclinometro + piezometro + estensimetro [6].
















ALVERA' (Cortina D'Ampezzo)		BOREHOLE N° G1
Depth	Lithology	Description
		destruction coring; point-recovered material: poorly firm grey-bluish clay silts
10.00		thinly bedded firm grey-bluish clayey silt with yellow sand spreadings, enclosing heterometric gravelly breccias
11.50		Ø 0.5-5 cm heterometric breccias washed out in grey-bluish silty-clayey matrix
12.00		80 cm level of soft grey-bluish silty clay
12.80		30 cm header of grey calcareous marl
13.10		150 cm level of soft grey-bluish silty clay
14.60		20 cm level of light-coloured calcareous marl
14.80		130 cm level of soft grey-bluish silty clay
16.10		20 cm of firm dark grey clayey silt with centimetric gravel and vegetal fragments
16.30		poorly firm grey-bluish thinly bedded clayey silt
18.00		firm grey-bluish thinly bedded clayey silt
19.50		firm grey-bluish thinly bedded clayey silt with traces of weathering and slickensides, 40°+45° dip (probable slip surface)
20.15		firm grey-bluish thinly bedded clayey silt with fine yellow sand spreadings enclosing heterometric breccias
21.00		firm grey-bluish thinly bedded clayey silt end of coring at -25 m: Ø 2-3 cm heterometric, rounded small gravel in silty-clayey matrix
25.00		

Figura 4.3 Stratigrafia in corrispondenza del sondaggio G1 [6].

Locazione campioni	CF [%]	W_l [%]	I_p [%]	γ_{sat} [kN/m ³]	φ'_r [°]
A diverse profondità	30-63	29,7-115,0	15,5-70,0	18,73	14,0-26,0
Superficie di scorrimento	56-71	69,3-99,1	29,6-51,1	18,73	9,0-15,9

Tabella 4.1 Caratteristiche geotecniche dei terreni interessati dalla frana di Alverà [6].

La caratterizzazione geotecnica del materiale è stata effettuata sulla base di prove di laboratorio, eseguite su più di 40 campioni ottenuti da sondaggi, scavi di trincee drenanti e pozzi di ispezione. I risultati, riportati in tabella 4.1, mostrano una sostanziale differenza tra i campioni prelevati a diverse profondità nel pendio e quelli raccolti in corrispondenza della superficie di scivolamento. In particolare, la percentuale di fini, il limite liquido e l'indice di plasticità di quest'ultimi risultano mediamente più alti. Inoltre, le analisi mineralogiche condotte sui terreni in corrispondenza dello scorrimento hanno mostrato che il materiale è costituito essenzialmente da argilla montmorillonitica. Infine, per quanto riguarda le caratteristiche di resistenza, il terreno in corrispondenza della superficie di rottura presenta, come ovvio che sia, una resistenza a taglio residua molto più bassa. Quest'ultima è stata valutata a partire da prove di laboratorio di taglio anulare.

4.3 Il sistema di monitoraggio

Il sistema di monitoraggio, presente lungo tutto il corpo della frana di Alverà, è stato installato nel 1989 e successivamente migliorato nel 1994. Esso consiste di tubi inclinometrici, piezometri a tubo aperto (equipaggiati con trasduttori elettrici per la misura del nivel-

lo di falda), estensimetri (per la misura continua degli spostamenti) e di un sistema di rilevamento topografico. Tale strumentazione è indicata in figura 4.2, dove è riportata la planimetria ed una sezione della frana in esame.

Segue una descrizione più in dettaglio degli strumenti appena citati [6].

Piezometri

La strumentazione per il monitoraggio dei livelli di falda consiste di otto piezometri (identificati nelle figure con la lettera F e S), installati all'interno dei fori di sondaggio e dotati di trasduttori di pressione elettrici. Alcuni di questi sono equipaggiati di strumentazione automatica per l'acquisizione dei dati. Le misurazioni registrate hanno mostrato un livello piezometrico molto vicino al piano campagna e soggetto a rapide fluttuazioni. Un esempio è mostrato in figura 4.5, dove sono riportate le registrazioni del piezometro situato in corrispondenza del foro di sondaggio S5, tra il Gennaio 1994 ed il Maggio 1996 [6].

Inoltre, è stato possibile analizzare la relazione esistente tra le piogge e le variazioni nel livello di falda. Si è notato un ritardo di tempo di circa 5 ore tra il verificarsi di un evento piovoso e il conseguente innalzamento della tavola d'acqua. Come già accennato, questa risposta velocissima alle precipitazioni è dovuta alla presenza di molte fratture superficiali, che facilitano la filtrazione dell'acqua dalla superficie fino alla falda.

In aggiunta, all'interno dei tubi piezometrici sono state effettuate delle prove di permeabilità per la misura della conducibilità idraulica del terreno. Essa è stata valutata attorno ad un valore di 10^{-8} m/s. Ovviamente, tale stima, essendo molto bassa, non si riferisce al sistema di fessure, sub-verticali e presenti nelle zone più superficiali, ma piuttosto alla permeabilità orizzontale della matrice argillosa.

Inclinometri

I tubi inclinometrici (indicati con le lettere I, G e S nella planimetria e nella sezione della frana) sono stati installati lungo tutto il corpo in frana, con maggiore addensamento nella parte centrale ed al piede. Dall'analisi dei grafici restituiti, è stato possibile studiare il cinematismo del movimento. La frana, che possiamo definire principale, è costituita, essenzialmente, da diversi blocchi di terreno che si muovono di moto traslativo o roto-traslativo, a profondità variabili tra i 20 e i 25 metri.

Come esempio, in figura 4.4 sono riportate le misurazioni degli inclinometri I2 e S5, posti rispettivamente al centro ed al piede della frana. Osservando in particolare la risposta dell'inclinometro S5, si nota la presenza, oltre che del movimento principale più lento (qualche centimetro all'anno) che coinvolge grandi volumi di terreno, di un secondo movimento, più veloce (circa 10 cm/anno) e superficiale, con un piano di scorrimento che si sviluppa attorno ai 5 metri di profondità.

Proprio quest'ultimo movimento, che per la sua profondità ed estensione si presta ad essere modellato con uno schema di pendio indefinito, sarà preso in considerazione per la validazione del nostro modello.

Estensimetri

Alcuni fori di sondaggio sono stati equipaggiati con estensimetri (S in figura 4.2) per la misura continua degli spostamenti. Tale strumentazione consiste di una puleggia fissata sulla superficie del terreno, connessa ad un potenziometro messo in tensione attraverso un cavo di acciaio, mantenuto fisso al fondo dell'inclinometro o del piezometro. Un contrappeso mantiene il cavo in tensione.

L'estensimetro, quindi, permette di misurare, con elevata precisione e continuità, solo gli spostamenti che subisce la superficie

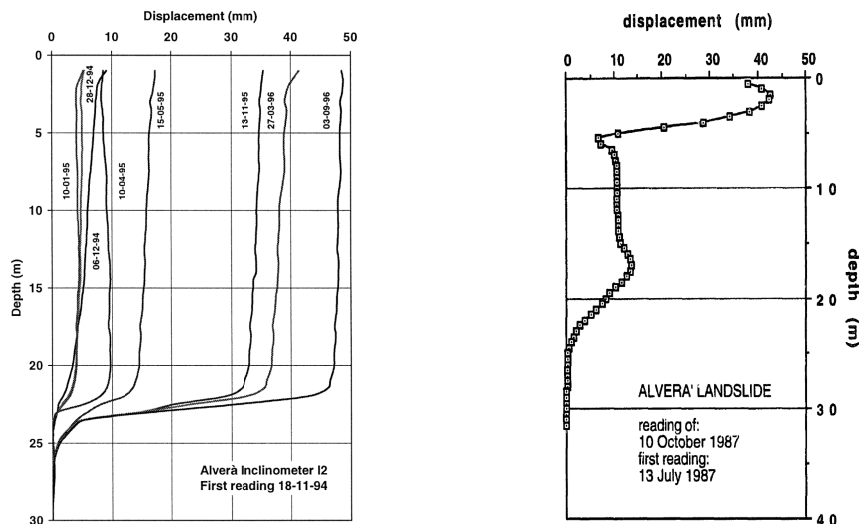


Figura 4.4 Esempi di grafici inclinometri della frana di Alverà [6] [30].

del terreno, ma non ci restituisce nessuna informazione circa l'evoluzione dell'intera verticale. Inoltre, non ci permette di valutare la profondità della superficie di scorrimento, anzi per il suo corretto funzionamento essa deve essere nota. Queste informazioni possono essere, invece, ottenute da uno strumento come l'inclinometro, per cui, in genere, l'accoppiamento di queste due strumentazioni è fortemente consigliato, in modo da avere una più completa conoscenza del fenomeno gravitativo da studiare.

Questo tipo di strumento è molto sensibile, per cui le misure che restituisce dovrebbero sempre essere controllate. Ad esempio, esso può risentire fortemente dei fattori climatici. La figura 4.5 mostra delle registrazioni dell'estensimetro S5 tra il '94 ed il '96. Si nota come nei periodi invernali si evidenziano dei bruschi incrementi di spostamento, seguiti da altrettanto brusche diminuzioni. Ciò, in realtà, è dovuto al fenomeno di congelamento e successivo scongelamento del terreno, che causa prima un aumento e poi una diminuzione del volume del terreno stesso. Tale fenomeno viene erroneamente registrato dallo strumento come spostamento. La "pulizia" degli errori

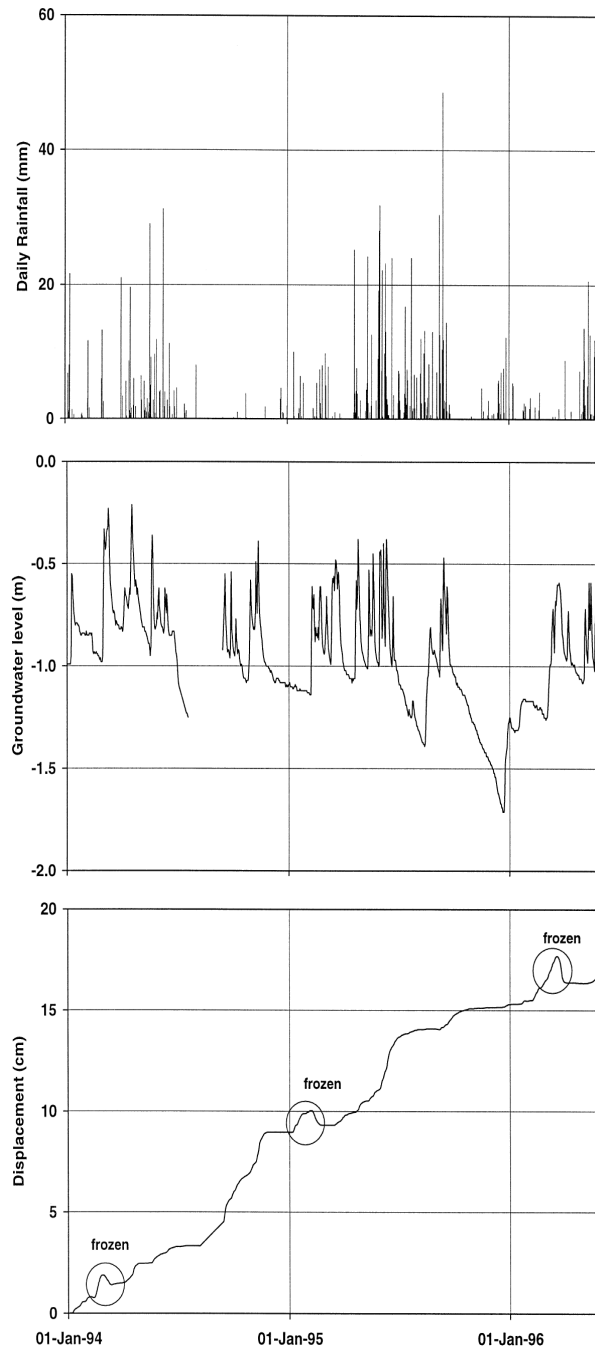


Figura 4.5 Spostamenti registrati dall'estensimetro posto nel sondaggio S5, tra Gennaio 1994 e Maggio 1996 [6].

nelle misurazioni verrà illustrata in seguito.

4.3.1 Il *database* della strumentazione considerata

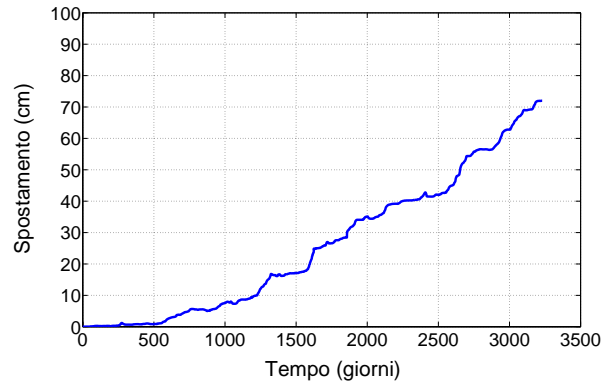
Il notevole e sicuramente non usuale sistema di monitoraggio, installato lungo la frana di Alverà, ha permesso di comprendere, nel dettaglio, il comportamento ed il cinematismo di questo movimento gravitativo. I dati utilizzati nel presente lavoro si riferiscono alla strumentazione alloggiata in corrispondenza del foro di sondaggio S5 (cfr. figura 4.2) e costituita da un inclinometro, un piezometro ed un estensimetro. In particolare, per questi ultimi due strumenti sono disponibili registrazioni molto frequenti (ogni 10 minuti, con qualche periodo di assenza di misurazioni) e molto protratte nel tempo (circa 9 anni). Inoltre, tale strumentazione è installata laddove è presente il movimento più superficiale ed attivo, che per le sue caratteristiche geometriche ed idrologiche bene si presta ad essere utilizzato per la validazione del modello. Infatti, il suo comportamento può essere assimilato a quello di un pendio pendio indefinito e le condizioni idrauliche che qui si verificano sono proprio quelle sopra descritte, cioè tipiche della parte più superficiale del terreno. Per questo motivo, l'assunzione che gli spostamenti siano strettamente correlati alle variazioni del livello di falda è più che ragionevole.

Le misurazioni, così come registrate dagli strumenti, sono state poi tradotte in misure giornaliere. Questo processo di media giornaliera dei dati è stato applicato sia agli spostamenti sia ai livelli piezometrici. I risultati sono mostrati in figura 4.6, in cui abbiamo esattamente 3230 misure riferite ad altrettanti giorni.

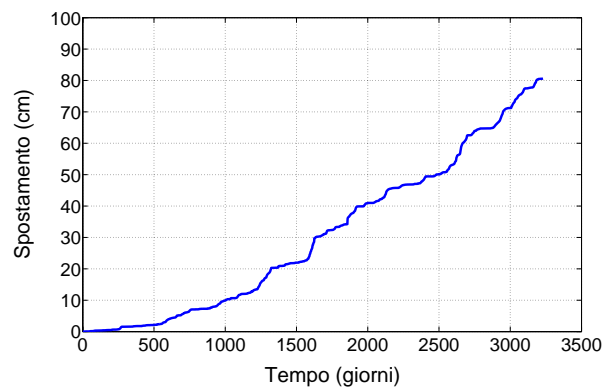
È importante sottolineare che i dati grezzi ottenuti dall'estensimetro presentano, in alcuni periodi, delle velocità di spostamento negative (cfr. figura 4.6(a)), che fisicamente non hanno nessun significato, in quanto indicherebbero un movimento della frana verso monte. Queste, in realtà, possono essere addotte ad errori di mi-

surazione dello strumento, in particolare in seguito al fenomeno di congelamento e scongelamento del terreno, già discusso nel precedente paragrafo. Per questo motivo, i dati relativi all'estensimetro sono stati così elaborati: dai valori degli spostamenti giornalieri si sono calcolate le velocità (come differenza tra il valore ad un determinato giorno e quello al giorno precedente); successivamente, le velocità che sono risultate negative sono state poste uguali a zero (supponendo che, quando lo strumento registrava movimenti verso monte, in realtà la frana era stabile); dal vettore delle velocità così ottenuto sono state, poi, ricalcolati gli spostamenti. Il nuovo andamento, così elaborato, è riportato in figura 4.6(b).

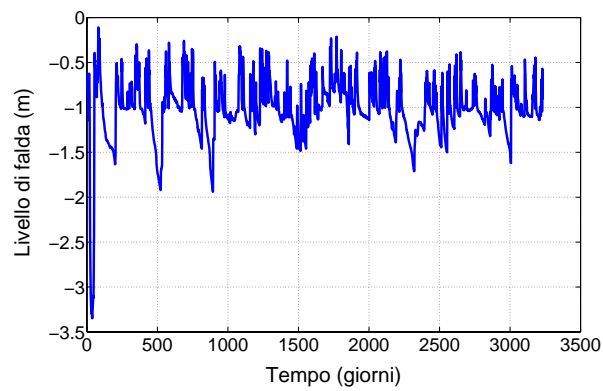
Per quanto riguarda le registrazioni del livello di falda, mostrate in figura 4.6(c), si nota che le sue fluttuazioni sono abbastanza contenute (dell'ordine del metro, circa da -1,5 a -0,5 metri dal p.c.) e pressoché costanti nel tempo. Questa caratteristica non si riscontra, invece, nell'andamento degli spostamenti cumulati, in quanto si nota che la pendenza di tale curva tende ad aumentare nel tempo. Ciò sta a significare che con l'avanzare del movimento, nonostante l'andamento degli *inputs* sia costante, l'innescò della frana risulta essere sempre più frequente ed esso si verifica con velocità sempre maggiori. Tale comportamento può essere spiegato col fatto che, col progredire del fenomeno, le condizioni iniziali, ovvero le condizioni che caratterizzano l'innescò della frana, cambino. Questo aspetto è legato, probabilmente, ad una ragionevole riduzione della resistenza al taglio offerta dal terreno, con l'avanzare della deformazione. Questa ipotesi verrà poi adottata per riprodurre le osservazioni attraverso il modello dinamico sviluppato.



(a) Misure registrate degli spostamenti.



(b) Misure elaborate degli spostamenti.



(c) Misure piezometriche.

Figura 4.6 Registrazioni giornaliere relative alla strumentazione S5.

Capitolo 5

Calibrazione del Modello: Applicazione del Problema Inverso alla Frana di Alverà

Come in qualsiasi campo scientifico, anche in ambito geotecnico la definizione di un modello per lo studio di un determinato fenomeno prevede la calibrazione dello stesso mediante dati sperimentali o osservati. Nel caso in esame, è stato messo a punto un modello in grado di analizzare fenomeni di instabilità di versante, caratterizzati da movimenti periodici lenti, prevalentemente traslativi, piuttosto superficiali e governati dal livello di falda. Esso è in grado di restituire una previsione di spostamento per un dato *input* del livello piezometrico, una volta che ne siano stati definiti i parametri. Come già accennato precedentemente, per determinare alcuni parametri è necessario calibrare il modello sulla base di misure piezometriche e di spostamento registrate. In particolare, i parametri del modello che necessitano di calibrazione sono tre: v_0 e β_0 , che definiscono le condizioni iniziali del moto, e C , che caratterizza la forza viscosa (ed è legato alla viscosità dinamica del materiale ed allo spessore della banda di taglio lungo la quale si innesca lo scivolamento). Gli altri parametri sono, generalmente, di facile determinazione, attraverso

prove di laboratorio o misure di campo.

In questo lavoro, come *database* di riferimento per la calibrazione del modello, è stato utilizzato quello relativo alla frana di Alverà, ampiamente illustrato nel paragrafo 4.3, per il quale si dispone di misure giornaliere di spostamenti e livelli di falda per un periodo di circa nove anni. Questo ha permesso non solo di valutare la validità del modello analitico proposto, ma anche di analizzare l'applicabilità di un approccio probabilistico. Tale tipo di analisi presenta il vantaggio di definire l'incertezza insita nei parametri caratteristici del modello e, di conseguenza, l'affidabilità delle sue previsioni.

5.1 I parametri del modello ed i dati osservati

Come illustrato nel capitolo 3, il problema dell'analisi inversa consiste nello stimare i parametri di un modello a partire da alcune evidenze disponibili, in modo da avere una buona corrispondenza con gli stessi dati osservati. A fine di tale processo, è possibile ottenere uno strumento che permetta di fare delle previsioni che vadano oltre le osservazioni sperimentali. Si è inoltre già visto che questa analisi può essere affrontata attraverso un approccio di tipo deterministico (soluzione ottimale) o di tipo probabilistico (soluzione completa). Entrambi i casi saranno esaminati nei successivi paragrafi. In ogni modo, qualunque sia la strada che si percorre, è necessario avere a disposizione delle misurazioni relative al fenomeno fisico che si intende studiare.

Nel presente lavoro, i dati osservati sono quelli relativi al *database* di monitoraggio della frana di Alverà. Esso è costituito da diverse strumentazioni (inclinometri, estensimetri e piezometri) installate lungo tutto il corpo di frana, come presentato nel paragrafo 4.3. Per la calibrazione del modello è stato fatto riferimento ad una particolare coppia di strumenti denominata in figura 4.2 S5, formata

da un *steel-wire extensometer* e da un piezometro con trasduttore elettrico per la misura della pressione, entrambi con acquisizione automatica dei dati. Le misurazioni registrate sono riportate e discusse nel paragrafo 4.3.1.

Come menzionato precedentemente, il modello considerato prevede la definizione di alcuni parametri. Per quanto riguarda la frana di Alverà, quelli noti sono:

$$\gamma_{sat} = 18,73 \text{ kN/m}^3 \quad \gamma_w = 10 \text{ kN/m}^3 \quad D = 5 \text{ m} \quad \theta = 8^\circ$$

mentre i parametri del modello che necessitano di essere calibrati sono: i valori iniziali della coppia (v_0, β_0) ed il termine viscoso C .

Una volta che siano note le caratteristiche del materiale (peso specifico saturo del terreno) e quelle geometriche della frana (profondità della superficie di scorrimento) il passaggio dalle misure osservate del livello di falda al reale parametro di *input* del modello, ovvero β , è immediato (cfr. equazione 2.7). Introducendo questi *inputs* nel modello, è possibile avere una previsione degli spostamenti; quest'ultimi verranno confrontati con quelli osservati (cfr. paragrafo 4.3.1) ed i parametri calibrati minimizzando tale differenza.

Va subito detto che, in base ai valori delle caratteristiche geotecniche e geomorfologiche sopra riportati per la frana in esame, il parametro β , e quindi anche β_0 , può assumere valori fisicamente significativi solamente nel *range* $[0, 4661, 1]$ (cfr. equazione 2.7).

Una prima considerazione da fare riguarda le condizioni iniziali del modello. Se consideriamo una coppia di valori (v_0, β_0) costante per tutto il periodo di osservazione, il modello non è in grado di cogliere, almeno in una maniera accettabile, il comportamento della frana nel tempo. Infatti, osservando le figure 4.6(b) e 4.6(c), si può notare come i livelli di falda mostrino una fluttuazione rapida ma sostanzialmente costante nel tempo, mentre la pendenza della curva degli spostamenti cumulati tende ad aumentare nel tempo. Questo si può spiegare col fatto che le condizioni iniziali cambiano con l'evolversi del movimento franoso. In altre parole, considerare v_0 e β_0

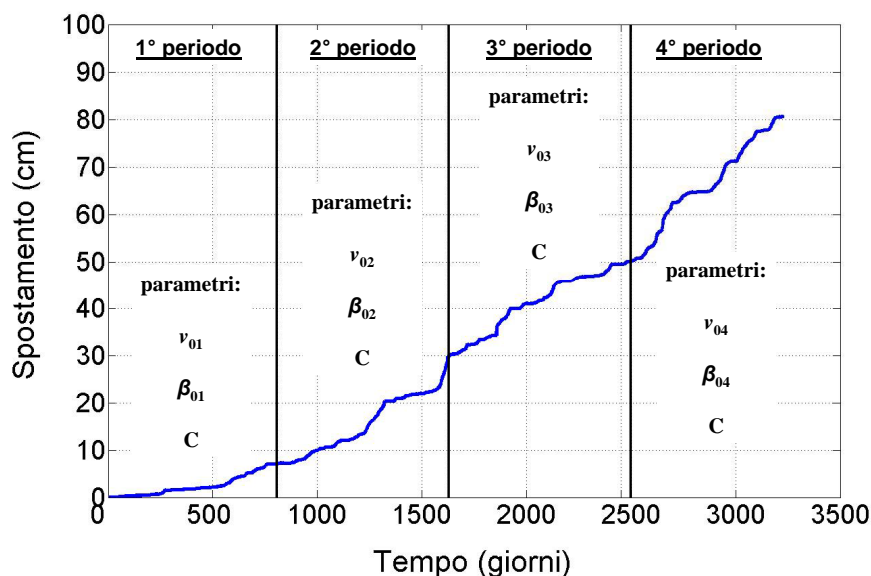


Figura 5.1 Divisione dell'intero periodo di monitoraggio in 4 sotto-periodi, per ognuno dei quali si assume un differente valore della coppia (v_0, β_0) , mentre C viene considerato costante nel tempo.

variabili nel tempo equivale a considerare variabile l'angolo di attrito interno mobilizzato del terreno, visto che φ'_0 è legato a questi parametri, e non solo, attraverso la 2.9. Tale assunzione è piuttosto ragionevole in quanto è ben noto come la resistenza offerta da un terreno dipenda dal suo stato deformativo, ed in particolare come questa tenda a diminuire (e con essa quindi anche l'angolo di attrito interno) con l'avanzare delle deformazioni. In seguito a questa considerazione, sono stati considerati, all'interno dell'intero periodo di osservazione, quattro sotto-periodi, approssimativamente della stessa lunghezza temporale (circa 800 giorni), per i quali si sono assunte differenti condizioni iniziali.

Per quanto concerne le caratteristiche viscose del terreno, esse sono state considerate costanti per tutto il processo di movimento della frana, per cui si è assunto un unico valore di C per tutto il

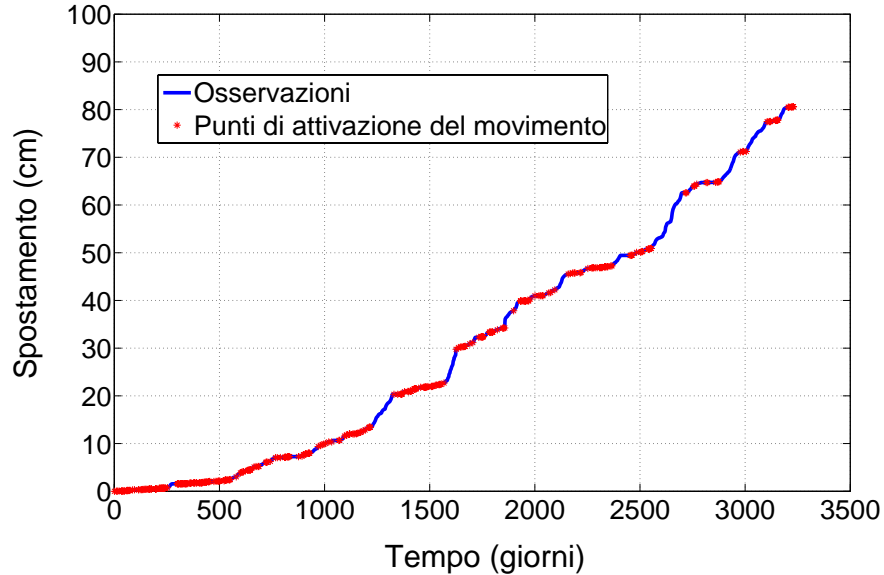


Figura 5.2 Identificazione degli istanti di tempo (asterischi rossi) in cui si innesca il movimento.

periodo di registrazione delle misure.

Riassumendo, ogni sotto-periodo sarà caratterizzato da un coppia di valori $(v_{0i}, \beta_{0i})_{i=1,2,3,4}$, differente per ognuno di essi, e da un valore di C , medesimo per ogni i -esimo periodo (figura 5.1). In conclusione, quindi, il numero di parametri da calibrare risulta pari a nove.

In realtà, dai dati raccolti è possibile avere una prima informazione circa i valori dei v_{0i} . Dalle registrazioni degli spostamenti cumulati (cfr. figura 4.6(b)), infatti, è possibile identificare l'istante in cui la frana passa da una situazione statica ad una dinamica (tale istante è identificato con degli asterischi rossi in figura 5.2), per cui si può avere una stima della velocità iniziale con la quale si è avuto il movimento. Tale valore di v_0 è stato calcolato considerando un periodo temporale, e quindi uno spostamento cumulato, di tre giorni, in modo da averne una valutazione più realistica rispetto ad una stima giornaliera (in questo modo vengono “smussate” eventuali misurazioni puntuali estreme, dovute ad esempio ad errori di misu-

Statistiche	v_{01} (115 dati)	v_{02} (77 dati)	v_{03} (69 dati)	v_{04} (40 dati)
Media				
[cm/giorno]	0,0066	0,0151	0,0122	0,0164
Deviazione Standard				
[cm/giorno]	0,0097	0,0186	0,0162	0,0266
Coefficiente di Variazione	1,4618	1,2299	1,3321	1,6143

Tabella 5.1 Statistiche del parametro v_0 ottenute dall'analisi delle osservazioni, relativamente ad ogni sotto-periodo.

ra). Alla fine sono stati raccolti valori di v_0 per un totale di 115, 77, 69 e 40 rispettivamente per il primo, il secondo, il terzo ed il quarto sotto-periodo. Di questi campioni di valori si sono stimate le statistiche, ovvero la media, la varianza ed il coefficiente di variazione, compendiate in tabella 5.1 (a tale proposito si ricorda che il coefficiente di variazione è definito come il rapporto tra la deviazione standard e la media, $C.V. = \sigma/|\mu|$).

Nei paragrafi che seguono si illustreranno tre tipi di approcci al problema inverso applicato alla frana di Alverà: uno deterministico, uno “semi-probabilistico” ed uno probabilistico. Il secondo, in particolare, è servito per definire l'informazione a priori circa i parametri del modello, da introdurre nella successiva analisi probabilistica completa.

5.2 Analisi inversa deterministica

In un approccio deterministico al problema inverso, in mancanza della soluzione esatta, i valori ottimali dei parametri da calibrare possono essere valutati attraverso un processo di ottimizzazione, che consiste nel minimizzare una specificata funzione, detta funzione obiettivo (soluzione ottimale, cfr. paragrafo 3.2). Generalmente, questa funzione definisce una misura dell'errore del mio modello rispetto alle evidenze, per cui si cerca di far coincidere il più possibile le previsioni ottenute con i dati osservati.

In letteratura esistono diverse tecniche di ottimizzazione. In questo lavoro un abbastanza recente quanto efficace metodo di ottimizzazione, noto come *Particle Swarm Optimization* (P.S.O.), è stato implementato in MatLab. Tale tecnica è stata ampiamente descritta nel paragrafo 3.2.1.

In questa prima fase di analisi, si sono fissati i valori dei v_{0i} ai loro rispettivi valori medi (cfr. tabella 5.1), per cui il numero di parametri che necessitano di calibrazione scende da nove a cinque (C e $\beta_{0i(i=1,2,3,4)}$). Facendo uso delle misure piezometriche, facilmente trasformabili nel parametro di *input* β attraverso i termini γ_{sat} , γ_w e D , gli spostamenti calcolati mediante il modello previsionale vengono confrontati con quelli osservati. I parametri C e β_{0i} vengono allora variati e calibrati minimizzando una funzione obiettivo, definita come la somma dei quadrati dei residui, dati dalla differenza tra le evidenze e le previsioni.

Il processo di calibrazione è stato eseguito utilizzando la tecnica P.S.O. sopra descritta. Tale metodo prevede la definizione di alcuni parametri, che regolano il processo di convergenza (cfr. paragrafo 3.2.1). In questo lavoro essi sono stati impostati così:

$$n_{particelle} = 30 \quad \chi = 0,729 \quad c_1 = c_2 = 2,05$$

$$V_{max}^C = 10^{11} \text{ Ns/m} \quad V_{max}^{\beta_{0i}} = 0,329$$

dove il numero di particelle, il fattore di costrizione χ ed i termini di accelerazione c_1 e c_2 sono stati scelti in base ai suggerimenti di diversi autori riscontrati in letteratura. Per quanto riguarda, invece, la velocità massima V_{max} , per il parametro C è stato scelto un valore ragionevole, cioè di un ordine di grandezza prossimo a quello che tale termine può assumere; per β_0 la velocità massima è stata stimata come la differenza tra il valore massimo e quello minimo osservato dai dati.

I risultati dell'analisi sono mostrati nelle figure 5.3 - 5.8, in termini di convergenza del metodo. Questa viene considerata raggiunta quando si verificano contemporaneamente due condizioni:

$$\begin{cases} |f_t(gbest) - f_{t-1}(gbest)| \leq 10^{-4} \\ |f_{max}(t) - f_{min}(t)| \leq 10^{-4} \end{cases} \quad (5.1)$$

dove $f_t(gbest)$ e $f_{t-1}(gbest)$ sono i valori della funzione obiettivo calcolata in corrispondenza del punto ottimale nello spazio delle variabili (cioè in corrispondenza della combinazione ottimale di valori delle variabili in gioco), rispettivamente alla t -esima simulazione e a quella precedente. La differenza di questi due valori è un indice di convergenza a livello globale, cioè considerando la “migliore” particella tra tutte quelle disponibili. Se questo valore è uguale a zero (con una tolleranza in questo caso pari a 10^{-4}) allora la convergenza a livello globale è raggiunta. $f_{max}(t)$ e $f_{min}(t)$ sono, invece, rispettivamente il valore massimo e minimo della funzione obiettivo alla t -esima simulazione. La loro differenza mi esprime quanto distanti siano le particelle dal punto ottimale nello spazio delle variabili. Se tale differenza è zero, significa che tutte le particelle hanno raggiunto il punto ottimale; se, invece, questo valore è diverso da zero, esso mi dice che almeno una particella è ancora lontana dalla soluzione, ed il suo valore assoluto ne sta ad indicare la distanza. Anche in questo caso è stata assunta una tolleranza pari a 10^{-4} . Le due condizioni sopra menzionate impongono, quindi, che la convergenza può essere

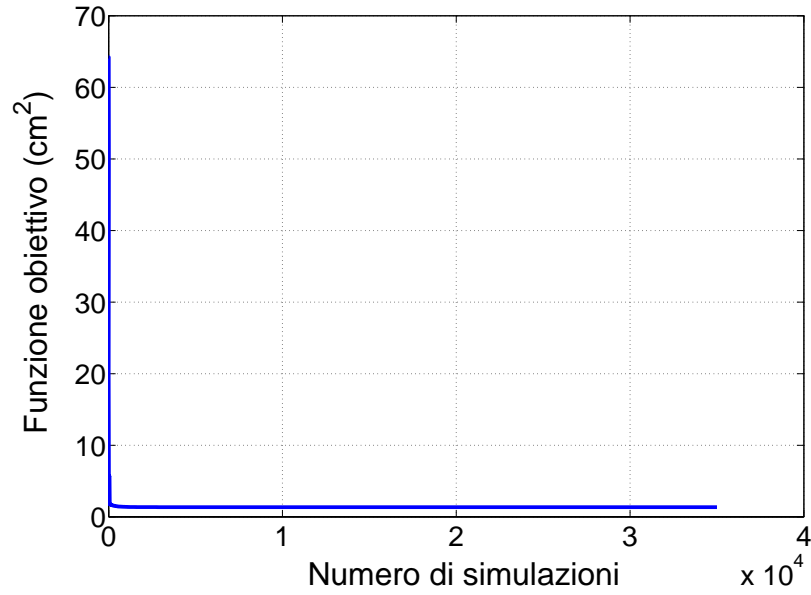


Figura 5.3 Andamento della funzione obiettivo durante il processo di convergenza del metodo P.S.O..

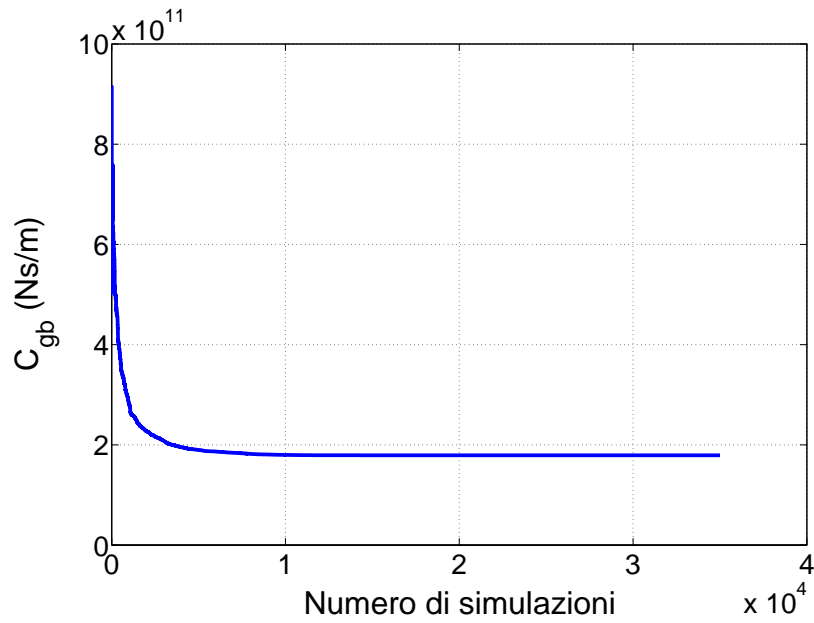


Figura 5.4 Andamento del *global best* del parametro C durante il processo di convergenza del metodo P.S.O..

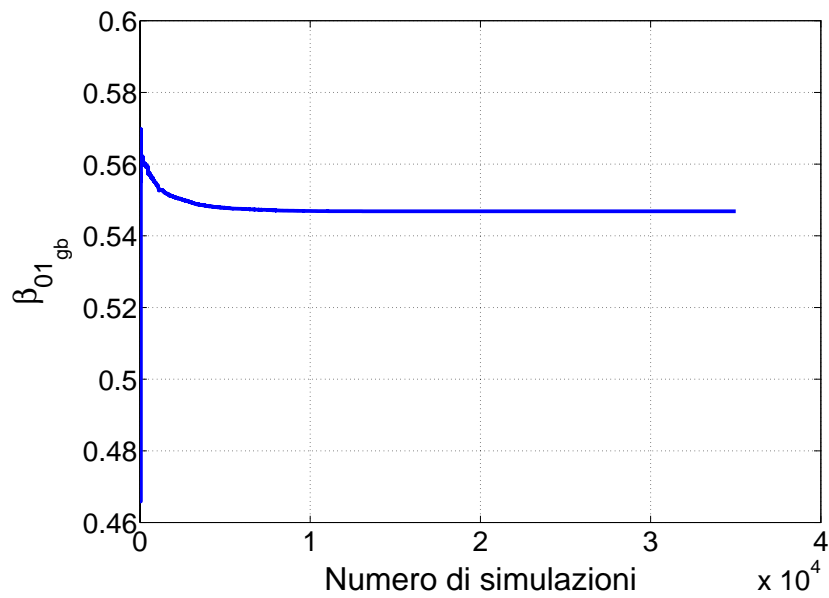


Figura 5.5 Andamento del *global best* del parametro β_{01} durante il processo di convergenza del metodo P.S.O..

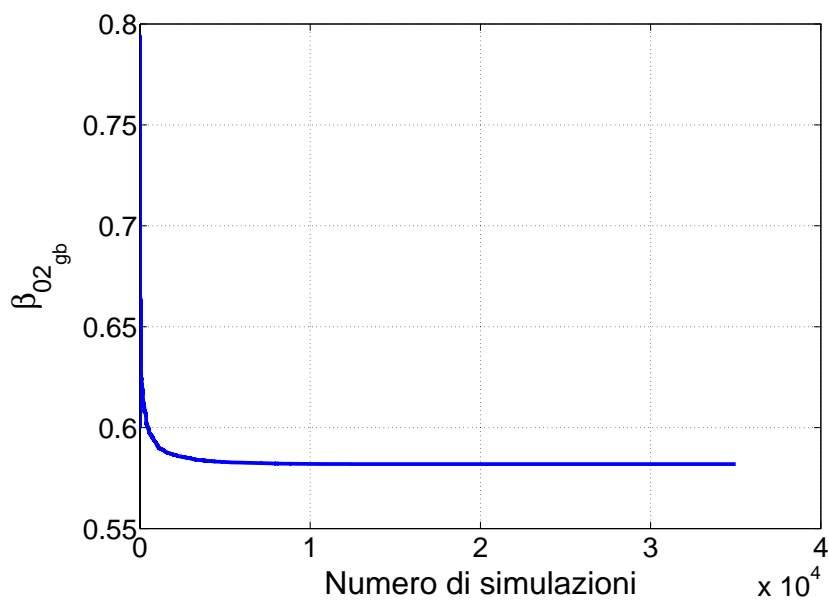


Figura 5.6 Andamento del *global best* del parametro β_{02} durante il processo di convergenza del metodo P.S.O..

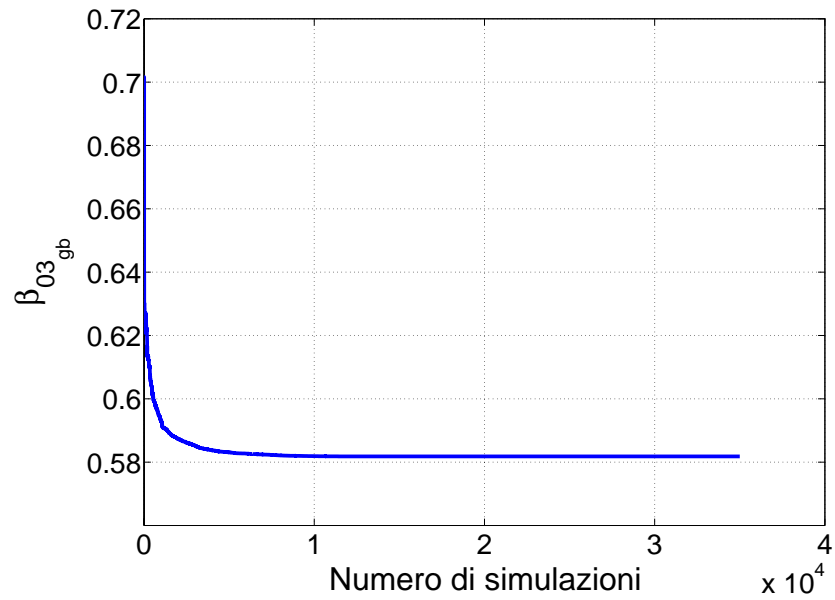


Figura 5.7 Andamento del *global best* del parametro β_{03} durante il processo di convergenza del metodo P.S.O..

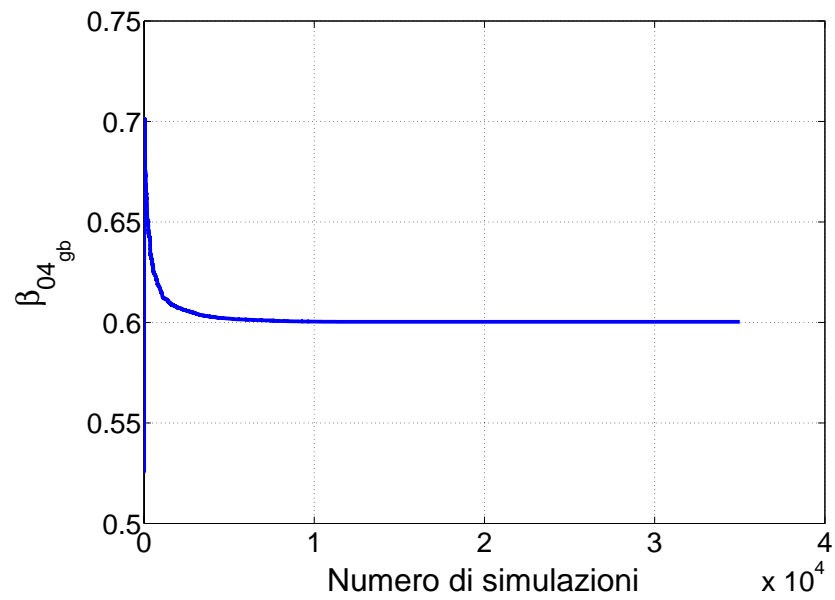


Figura 5.8 Andamento del *global best* del parametro β_{04} durante il processo di convergenza del metodo P.S.O..

Parametri	1° periodo	2° periodo	3° periodo	4° periodo
v_0				
[cm/giorno]	0,0066	0,0151	0,0122	0,0164
β_0				
[adimensionale]	0,5469	0,5820	0,5818	0,6003
C				
[N · s/m]	$1,79 \cdot 10^{11}$	$1,79 \cdot 10^{11}$	$1,79 \cdot 10^{11}$	$1,79 \cdot 10^{11}$
φ'_0				
[°]	14,2664	13,2588	13,3246	12,8398

Tabella 5.2 Valori ottimali dei parametri, relativamente ad ogni sotto-periodo, ottenuti dalla calibrazione deterministica del modello, mediante il metodo PSO. Si ricorda che v_0 è fissato al valore medio.

ritenuta raggiunta quando tutte le particelle arrivano in uno stesso punto ad una t -esima simulazione e la differenza tra il valore migliore della funzione obiettivo a tale simulazione e quello alla simulazione precedente è praticamente nullo. Sotto queste condizioni, il punto raggiunto coincide con la soluzione ottimale.

Nella figura 5.3 è riportato l'andamento della funzione obiettivo, valutata ad ogni *step* nel punto ottimale globale, col progredire della simulazione. Nelle figure 5.4 - 5.8, invece, viene mostrata l'evoluzione dei valori ottimali delle variabili durante la simulazione. Si può notare come la convergenza si possa comunque ritenere raggiunta, con buona approssimazione, dopo $10.000 \div 15.000$ simulazioni.

I valori ottimali dei parametri ottenuti dal processo di calibrazione deterministico sono riportati in tabella 5.2, assieme ai valori di v_0 fissati, in base alle evidenze, al loro valore medio ed ai valori di φ'_0 , valutabili attraverso la 2.9 una volta noti i parametri del modello. Si nota come il *trend* di incremento di v_0 nel tempo (ad eccezione del terzo periodo dove si ha un leggero decremento) si rifletta sul parametro β_0 e, di conseguenza, sull'angolo di attrito mobilizzato. Si sottolinea di nuovo che i valori di v_0 si basano sulle evidenze,

per cui i dati osservati ci dicono che la velocità iniziale con cui si muove la frana, ogni volta che si innesca il movimento, tende ad aumentare nel tempo, probabilmente in conseguenza di una ragionevole diminuzione di resistenza offerta dal terreno. In particolare, c'è una sostanziale differenza (quasi di un ordine di grandezza) tra v_0 del primo periodo ed i restanti valori di v_0 nei periodi successivi, riscontrabile visivamente anche in figura 4.6(b), dove si nota un sostanziale cambio di pendenza nella curva degli spostamenti cumulati dopo circa $500 \div 600$ giorni.

Come già accennato, dal processo di calibrazione si ottiene che anche β_0 mostra una tendenza ad incrementare nel tempo, con una fase pressoché costante nel secondo e terzo periodo. Concettualmente, β_0 è un valore soglia, per cui per valori di $\beta \leq \beta_0$ si ha movimento mentre per valori di $\beta > \beta_0$ si ha una situazione di arresto. Analogamente, è possibile ragionare in termini piezometrici. Secondo la relazione 2.7 il livello di falda si comporta in maniera opposta a β , ovvero ad un incremento del primo corrisponde un decremento del secondo. È possibile, allora, associare a β_0 un valore di soglia della falda che, seguendo lo schema di figura 2.5, definiamo come d_o , per cui quando la falda si trova sopra tale livello il modello restituisce uno spostamento, viceversa no. L'incremento di β_0 nel tempo, quindi, sta a significare che il valore di soglia di falda decresce temporalmente; perciò, con l'avanzare del fenomeno franoso, sono necessari livelli piezometrici sempre più bassi per innescare il movimento. Anche questo aspetto è ragionevolmente connesso con l'idea di diminuzione di resistenza offerta dal terreno.

Tale concetto è riscontrabile nelle stime di φ'_0 ottenute dall'analisi. Da quest'ultima è risultato infatti che, durante l'evolversi del fenomeno franoso costituito da uno spostamento di 0,8 metri in circa nove anni, si è verificata una generale riduzione nel valore dell'angolo di attrito mobilizzato di circa 1,5 gradi (da $14,26^\circ$ a $12,83^\circ$), con particolare enfasi tra il primo ed il secondo periodo. Esso, invece, rimane pressoché costante durante la seconda e terza fase del

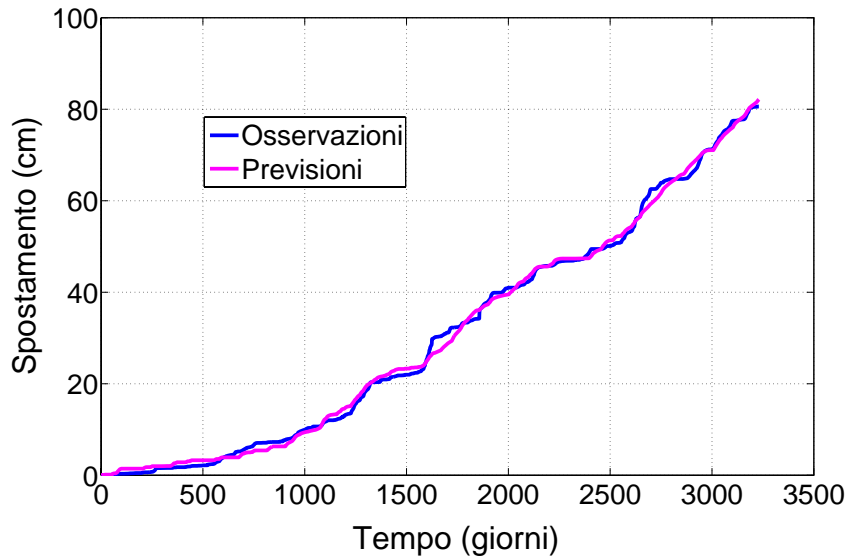


Figura 5.9 Confronto tra gli spostamenti misurati (linea blu) e quelli previsti dal modello (linea magenta), utilizzando i valori dei parametri ottenuti dal processo di calibrazione deterministico.

movimento.

Per quanto concerne il termine viscoso C , si ricorda che esso è definito come il rapporto tra la viscosità dinamica del materiale η e lo spessore della banda di taglio h_m . Data la difficoltà di determinare separatamente i valori di questi due parametri da prove di laboratorio o *in situ*, si è preferito includerli in un unico parametro, che è stato definito attraverso le osservazioni di campo. Il valore ottenuto dal processo di calibrazione ($1,79 \cdot 10^{11}$ Ns/m) risulta essere dello stesso ordine di grandezza di quello ricavato in laboratorio da una prova di taglio diretto eseguita per i terreni della frana di Alverà e pari a $4,5 \cdot 10^{11}$ Ns/m, per unità di area [4]. Vista la difficoltà di avere in genere una buona corrispondenza tra il valore della viscosità ottenuto in laboratorio e quello valutato in campo (la differenza può essere anche di diversi ordini di grandezza), il risultato conseguito

può essere ritenuto attendibile e più che soddisfacente.

Le previsioni valutate col modello utilizzando i valori ottimali dei parametri riportati in tabella 5.2 sono mostrate in figura 5.9, dove sono comparate con le osservazioni. L'evoluzione globale degli spostamenti della frana viene colta, anche se puntualmente, in alcune fasi, l'errore è abbastanza significativo. In particolare, il modello non riesce a seguire il reale andamento degli spostamenti in corrispondenza di brusche accelerazioni. Nel complesso, comunque, considerando anche il lungo periodo di monitoraggio, il *fit* risulta essere piuttosto buono. Inoltre, alla luce di ciò, la scelta di considerare il termine viscoso C costante nel tempo si è rivelata sostanzialmente accettabile.

Nella prossima sezione verrà presentata una diversa procedura di analisi che ha permesso di ottenere una maggiore informazione riguardo l'affidabilità del modello e la definizione dei suoi parametri. In particolare, questo studio è servito a gettare le basi per la formulazione probabilistica completa del problema, illustrata nel paragrafo 5.4.

5.3 L'approccio "semi-probabilistico"

Nel paragrafo 3.3 si è visto come la soluzione probabilistica completa al problema inverso possa essere raggiunta facendo ricorso al teorema di Bayes. L'applicazione di tale paradigma richiede la definizione di due termini: il primo viene chiamato "priori" (*prior*) e rappresenta l'informazione che si possiede, fino a quel momento, su un determinato fenomeno, il secondo è detto "funzione di verosimiglianza" (*likelihood*) ed identifica l'informazione ottenibile da una nuova osservazione. In questo lavoro, la funzione di verosimiglianza è stata definita attraverso un modello di analisi, discusso nel paragrafo 2.2.1. La definizione della priori, invece, coincide con la conoscenza iniziale

circa i parametri del modello: l'approccio "semi-probabilistico" di seguito presentato è servito proprio per la sua determinazione.

Si ricorda, infatti, che nell'analisi deterministica illustrata nel paragrafo precedente i valori dei v_{0i} sono stati scelti basandosi sull'evidenze e fissandoli al loro valore medio. In realtà, è possibile sfruttare le statistiche disponibili su questi parametri per ottenere, almeno in prima approssimazione, delle informazioni di tipo statistico anche sugli altri parametri del modello. A tale proposito, a partire dai campioni di valori raccolti per i v_{0i} , si sono costruite le distribuzioni di probabilità empiriche, o meglio le funzioni densità di probabilità cumulata (CDF). Quest'ultime sono state modellate con ottima approssimazione mediante una distribuzione Lognormale, come mostrano le figure 5.10 - 5.13, dove la curva blu rappresenta la distribuzione di probabilità cumulata empirica e la curva magenta quella del modello Lognormale. I parametri statistici di v_0 , valutati per ogni sotto-periodo, sono stati già mostrati in tabella 5.1.

L'analisi condotta in questa fase del lavoro può essere nominata "semi-probabilistica", in quanto fa uso delle proprietà statistiche del parametro v_0 utilizzato come dato di *input*, ma la calibrazione del modello viene eseguita in maniera deterministica e non attraverso una completa soluzione probabilistica, che invece sarà discussa in seguito. Essa è consistita nel campionare, in maniera casuale, un valore di v_0 indipendentemente per ogni sotto-periodo, a partire dal modello Lognormale costruito sulla base delle CDF empiriche. Il campionamento si esegue generando un numero *random* uniforme compreso tra zero ed uno e determinando, attraverso la curva CDF, il corrispondente valore del parametro. Successivamente si calibra il modello come visto nella sezione precedente, con la differenza che i parametri v_{0i} non sono impostati al valore medio ma bensì al valore così generato.

Ripetendo questa procedura n volte, si ottiene in *output* non un unico valore ottimale ma una distribuzione di probabilità anche per i restanti parametri del modello C e β_{0i} . Come già osservato (cfr.

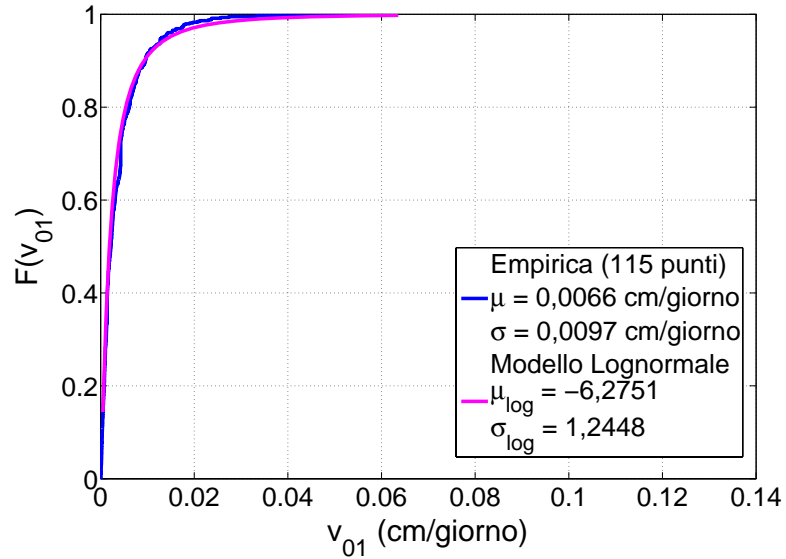


Figura 5.10 Funzione di densità di probabilità cumulata del parametro v_{01} . La curva empirica (linea blu) è stata modellata attraverso la distribuzione di probabilità Lognormale (linea magenta).

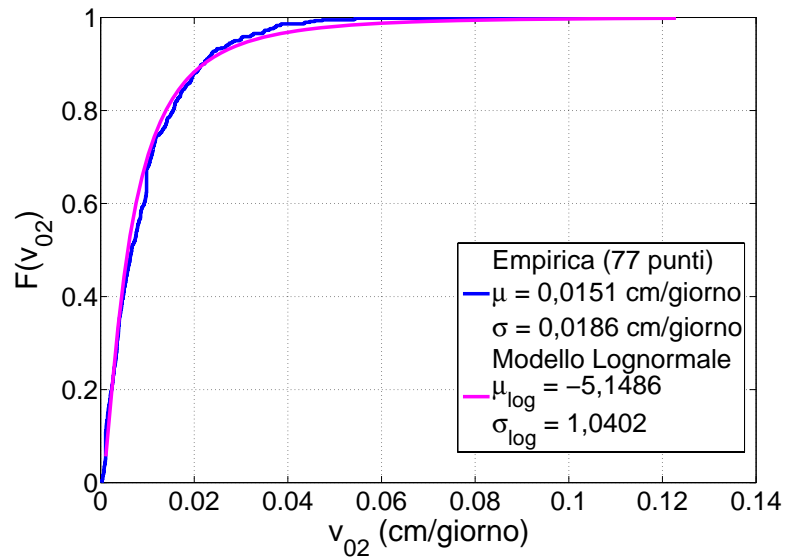


Figura 5.11 Funzione di densità di probabilità cumulata del parametro v_{02} . La curva empirica (linea blu) è stata modellata attraverso la distribuzione di probabilità Lognormale (linea magenta).

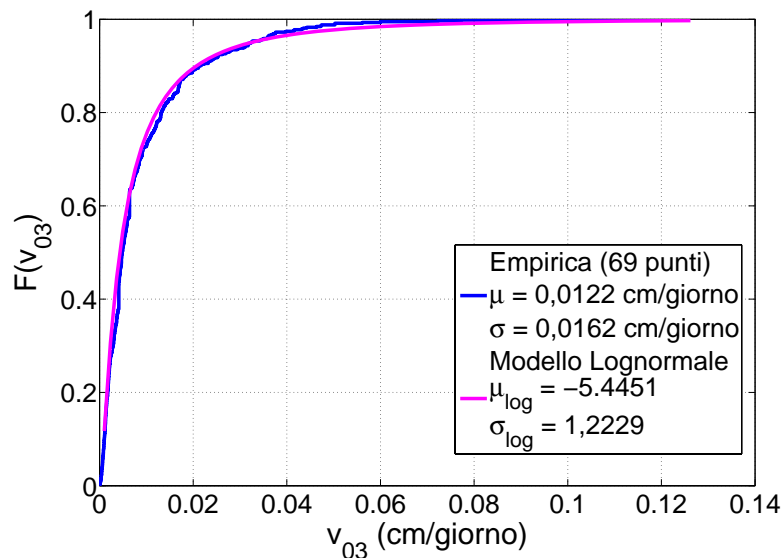


Figura 5.12 Funzione di densità di probabilità cumulata del parametro v_{03} . La curva empirica (linea blu) è stata modellata attraverso la distribuzione di probabilità Lognormale (linea magenta).

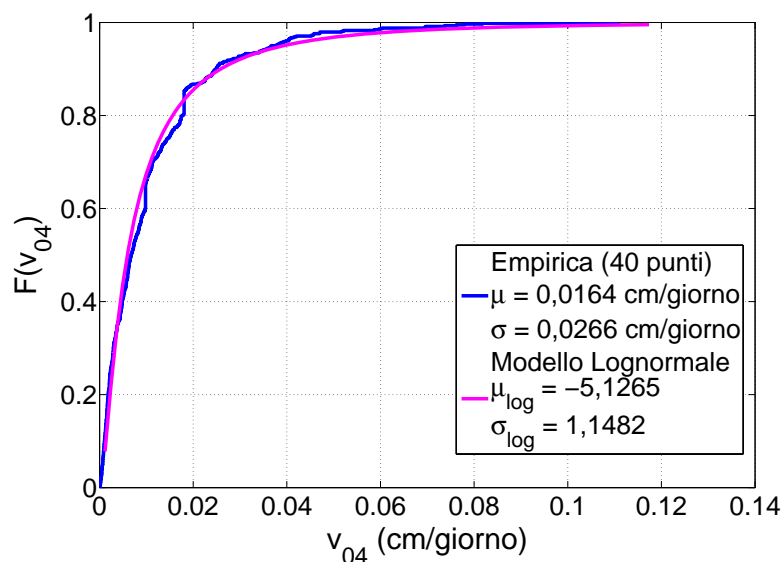


Figura 5.13 Funzione di densità di probabilità cumulata del parametro v_{04} . La curva empirica (linea blu) è stata modellata attraverso la distribuzione di probabilità Lognormale (linea magenta).

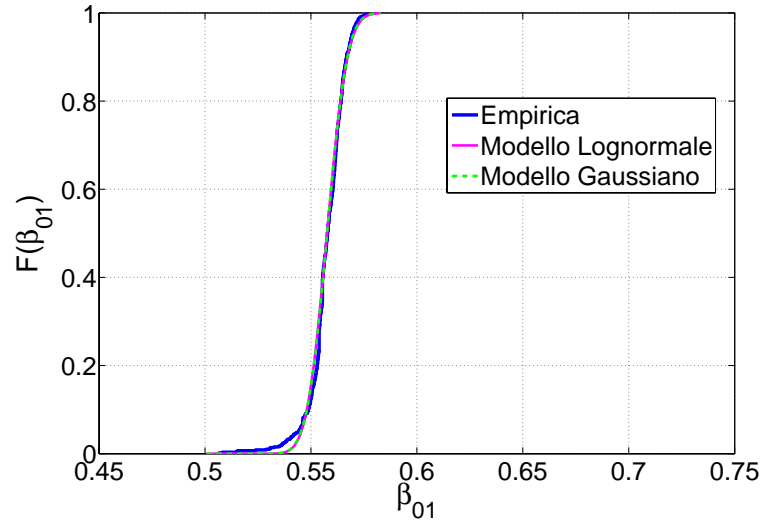


Figura 5.14 Funzione di densità di probabilità cumulata del parametro β_{01} , ottenuta dall'analisi "semi-probabilistica". La curva empirica (linea blu) è stata modellata attraverso la distribuzione di probabilità Lognormale (linea magenta) e quella Gaussiana (linea tratteggiata verde).

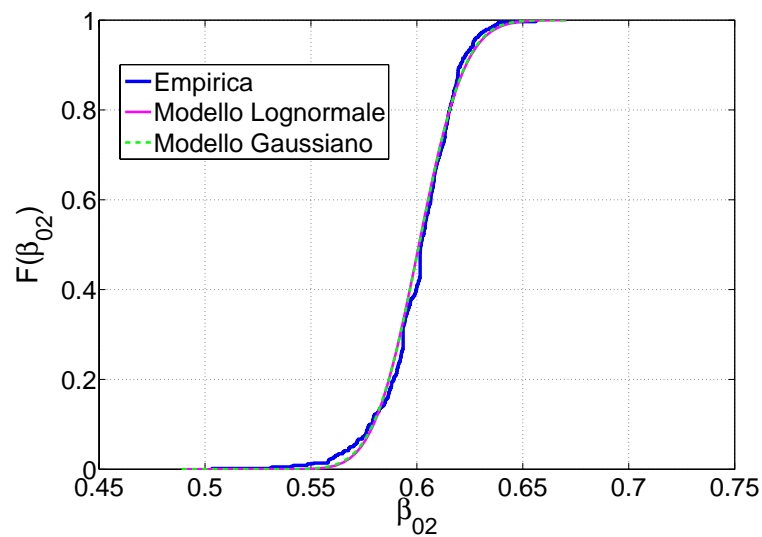


Figura 5.15 Funzione di densità di probabilità cumulata del parametro β_{02} , ottenuta dall'analisi "semi-probabilistica". La curva empirica (linea blu) è stata modellata attraverso la distribuzione di probabilità Lognormale (linea magenta) e quella Gaussiana (linea tratteggiata verde).

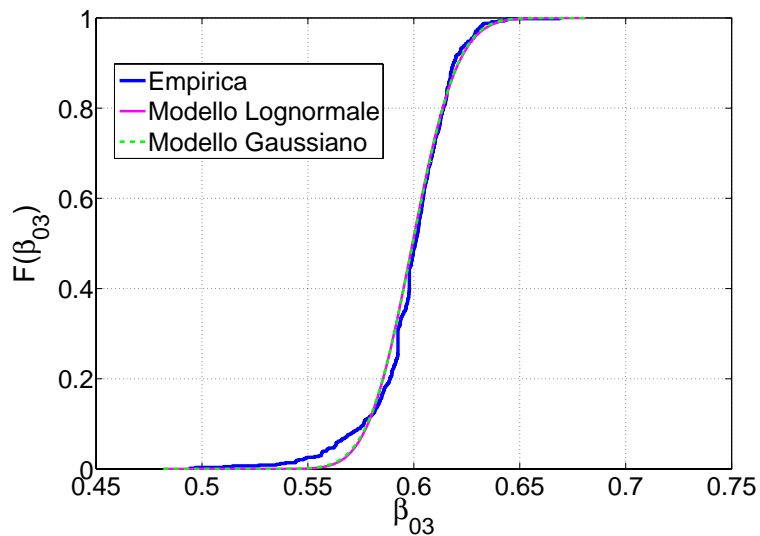


Figura 5.16 Funzione di densità di probabilità cumulata del parametro β_{03} , ottenuta dall’analisi “semi-probabilistica”. La curva empirica (linea blu) è stata modellata attraverso la distribuzione di probabilità Lognormale (linea magenta) e quella Gaussiana (linea tratteggiata verde).

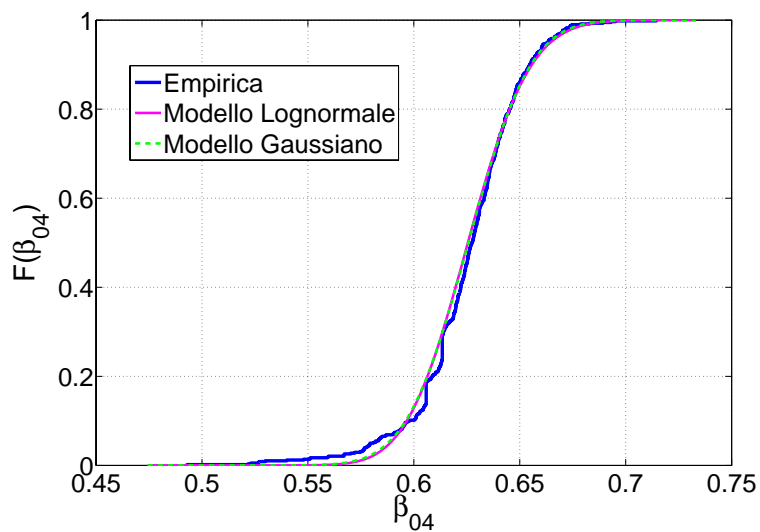


Figura 5.17 Funzione di densità di probabilità cumulata del parametro β_{04} , ottenuta dall’analisi “semi-probabilistica”. La curva empirica (linea blu) è stata modellata attraverso la distribuzione di probabilità Lognormale (linea magenta) e quella Gaussiana (linea tratteggiata verde).

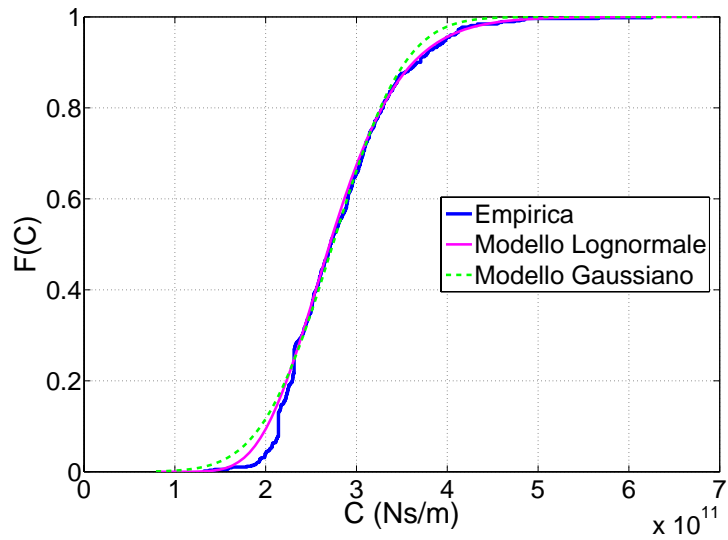


Figura 5.18 Funzione di densità di probabilità cumulata del parametro C , ottenuta dall'analisi "semi-probabilistica". La curva empirica (linea blu) è stata modellata attraverso la distribuzione di probabilità Lognormale (linea magenta) e quella Gaussiana (linea tratteggiata verde).

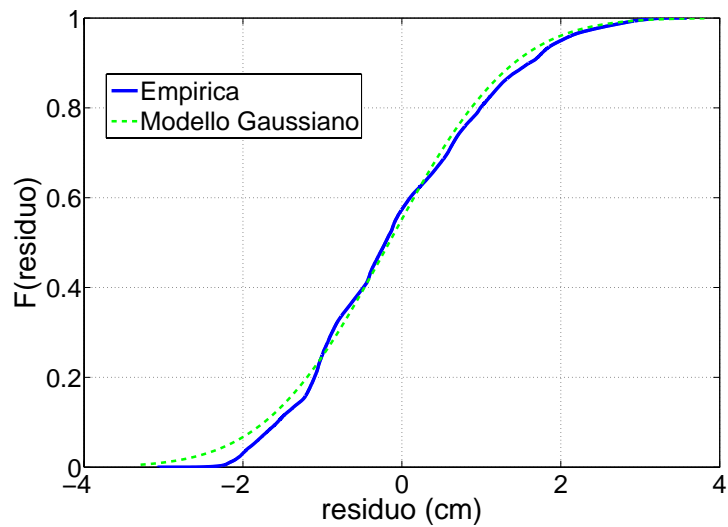


Figura 5.19 Funzione di densità di probabilità cumulata dei residui, ottenuta dall'analisi "semi-probabilistica". La curva empirica (linea blu) è stata modellata attraverso la distribuzione di probabilità Gaussiana (linea tratteggiata verde).

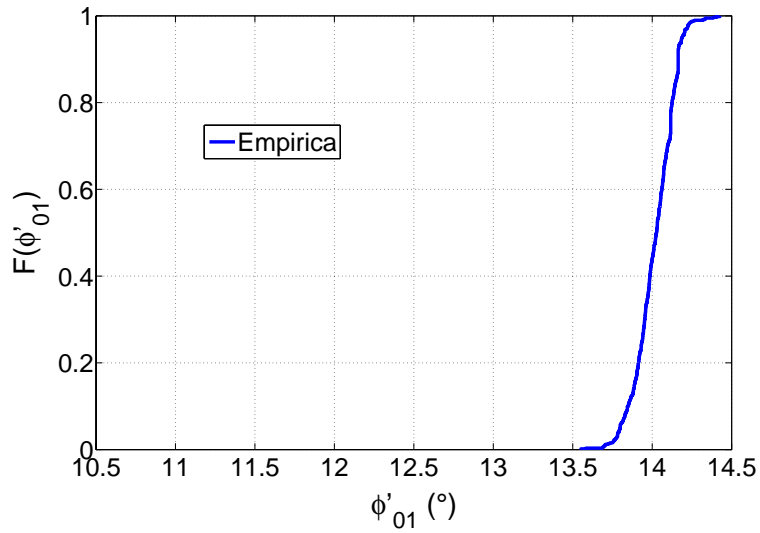


Figura 5.20 Funzione di densità di probabilità cumulata (empirica) del parametro ϕ'_{01} , ottenuta dall'analisi "semi-probabilistica".

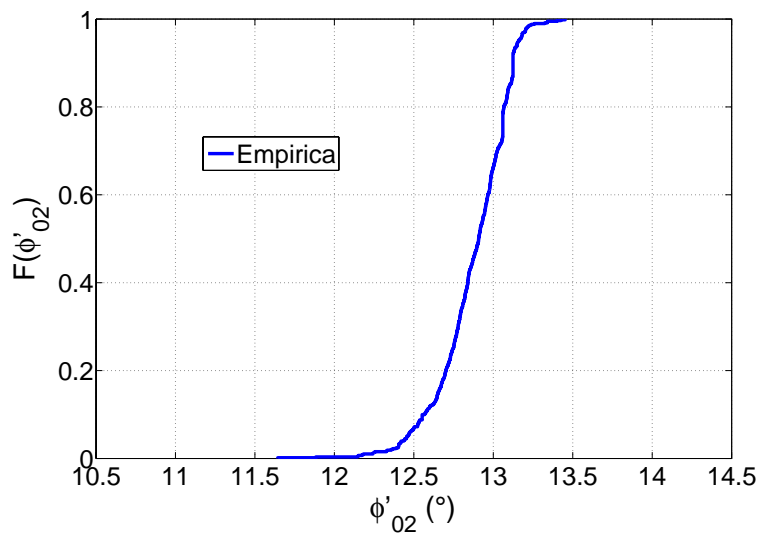


Figura 5.21 Funzione di densità di probabilità cumulata (empirica) del parametro ϕ'_{02} , ottenuta dall'analisi "semi-probabilistica".

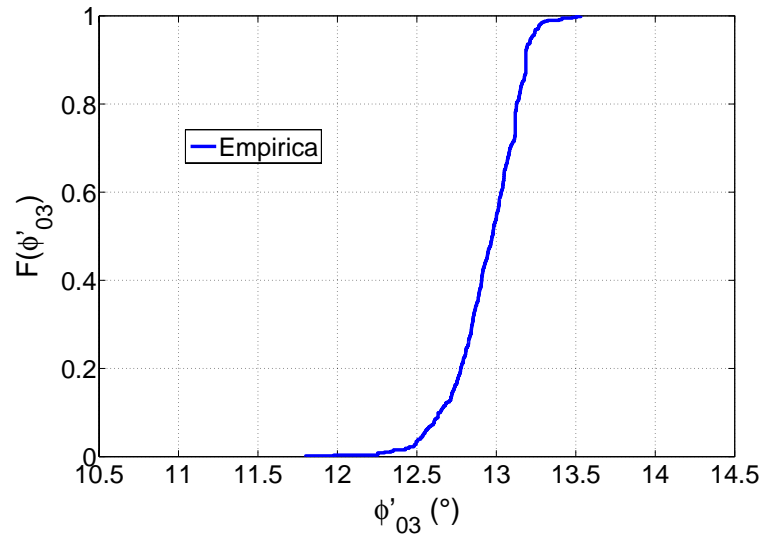


Figura 5.22 Funzione di densità di probabilità cumulata (empirica) del parametro ϕ'_{03} , ottenuta dall'analisi "semi-probabilistica".

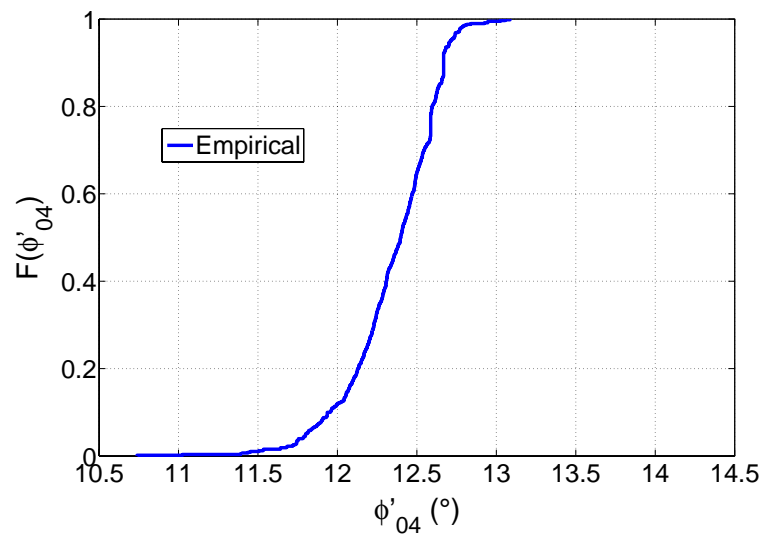


Figura 5.23 Funzione di densità di probabilità cumulata (empirica) del parametro ϕ'_{04} , ottenuta dall'analisi "semi-probabilistica".

paragrafo 2.2.1), il modello dinamico considerato è in grado di restituire una stima dell'angolo di attrito mobilizzato, attraverso la relazione 2.9, una volta determinati i suoi parametri. Se quest'ultimi vengono definiti mediante una funzione di densità di probabilità, è possibile ottenere, di conseguenza, una distribuzione di probabilità anche per i φ'_{0i} , relativamente ai quattro sotto-periodi. Le curve di C , β_{0i} e φ'_{0i} così ottenute verranno chiamate "empiriche", in quanto ricavate, mediante l'analisi sopra citata, a partire dalle osservazioni; esse sono riportate in forma di funzioni di densità cumulata nelle figure 5.18-5.23. Le curve cumulate empiriche relative ai parametri C e β_{0i} sono state poi modellate attraverso una distribuzione di probabilità Gaussiana (linea verde) ed una Lognormale (linea magenta). Per il parametro β_0 entrambi i modelli riproducono, con buon accordo, la curva empirica, risultando praticamente coincidenti; per il termine viscoso C , invece, la distribuzione Lognormale è più idonea di quella Gaussiana a modellare l'empirica. Va detto che i parametri del modello non possono assumere, per motivi di natura fisica, valori negativi; in questi casi, generalmente, la distribuzione di tipo Lognormale è più opportuna di quella di Gauss a rappresentare l'andamento statistico dei dati, per cui il primo è stato scelto per modellare sia β_0 sia C .

Inoltre, con la presente analisi è possibile giungere ad una stima della struttura di correlazione dei parametri del modello, attraverso il calcolo della matrice di covarianza o, in maniera del tutto analoga, della matrice di correlazione; quest'ultima viene preferita in quanto di più immediata lettura. A questo proposito si ricorda che il coefficiente di correlazione, indicato con la lettera greca ρ , restituisce un'informazione circa il modo in cui due variabili casuali risultano essere correlate tra loro. Esso può assumere valori compresi tra -1 ed 1: $\rho = 0$ è indice di assenza di correlazione; $\rho > 0$ indica correlazione positiva, cioè quando una variabile aumenta anche l'altra tende ad incrementare; $\rho < 0$ indica correlazione negativa, cioè ad un incremento di una variabile tende a corrispondere un decremento

Parametri	v_{01}	v_{02}	v_{03}	v_{04}	β_{01}	β_{02}	β_{03}	β_{04}	C	σ_{res}
v_{01}	1	0,14	0,02	0,01	-0,85	-0,10	-0,06	-0,05	-0,10	-0,04
v_{02}		1	0,03	-0,02	-0,22	-0,85	-0,14	-0,14	-0,31	-0,26
v_{03}			1	0,00	-0,16	-0,14	-0,88	-0,13	-0,28	-0,25
v_{04}				1	-0,14	-0,12	-0,10	-0,85	-0,27	-0,25
β_{01}					1	0,38	0,34	0,34	0,50	0,45
β_{02}						1	0,41	0,45	0,71	0,68
β_{03}							1	0,40	0,66	0,64
β_{04}								1	0,71	0,69
C									1	0,97
σ_{res}										1

Tabella 5.3 Matrice di correlazione relativa ai parametri ed alla deviazione standard dell'errore del modello.

dell'altra. Il valore assoluto del coefficiente di correlazione segnala quanto forte sia questo stato di interdipendenza.

La matrice di correlazione dei parametri e della deviazione standard dell'errore del modello è riportata in tabella 5.3. Ovviamente si vede che non esiste praticamente correlazione tra i v_{0i} relativi ai quattro sotto-periodi, in quanto essi sono stati campionati in maniera del tutto indipendente. I quattro β_{0i} presentano, tra di loro, un leggero stato di correlazione positiva, mentre, molto più significativa (coefficiente di correlazione circa pari a -0,85), risulta essere la dipendenza tra i v_{0i} ed i β_{0i} relativi allo stesso sotto-periodo. In particolare, tale correlazione è negativa, il che significa che se la velocità iniziale incrementa β_0 tende a diminuire, e viceversa. Inoltre, si nota che il parametro viscoso C risulta essere poco sensibile alle variazioni di v_0 , mentre esso è molto più influenzato dal parametro β_0 , in maniera positiva. In aggiunta, nella matrice di correlazione è stato introdotto un ulteriore termine, ovvero la deviazione standard dei residui, in modo da valutare l'influenza dei singoli parametri sulla *performance* del modello. È importante sottolineare il notevole effetto del termine viscoso C ($\rho = 0,97$) sull'errore e quindi sulle previsioni del modello.

Questo tipo di analisi ha permesso, inoltre, di ottenere una migliore conoscenza circa le prestazioni e l'affidabilità del modello stesso. In figura 5.24, dove sono mostrate le previsioni ottenute considerando tutte le simulazioni eseguite, è possibile osservare come la sensibilità del modello, al variare dei parametri, non sia costante nel tempo, ma in alcuni periodi è più marcata, in altri meno. Questo aspetto è più visibile in figura 5.25, dove è riportata la variabilità dell'errore nel tempo, riassunta nella sua media e nella sua deviazione standard. Si nota come essa fluttui nel tempo attorno allo zero, essendo a tratti più o meno consistente. Tutte queste informazioni permettono di quantificare la bontà del modello e la sensibilità delle sue previsioni rispetto ai parametri. Tale aspetto risulta fondamentale nell'ambito di un processo di analisi del rischio, soprattutto

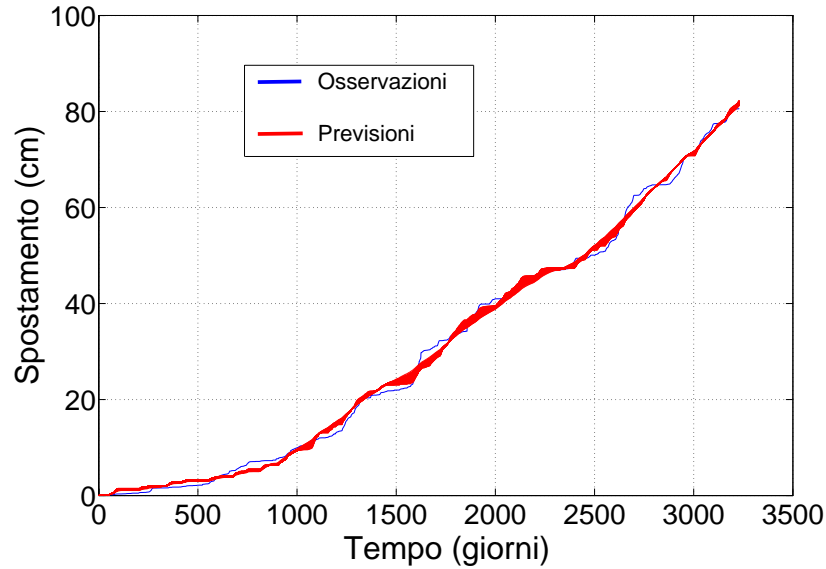
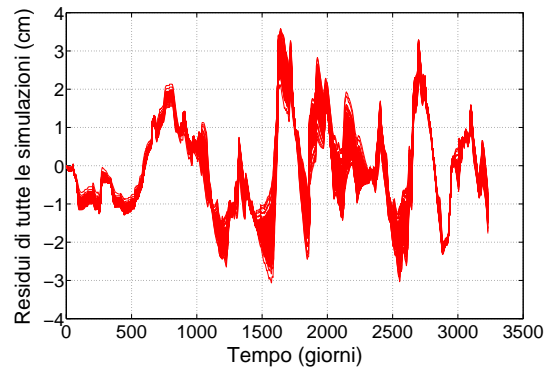


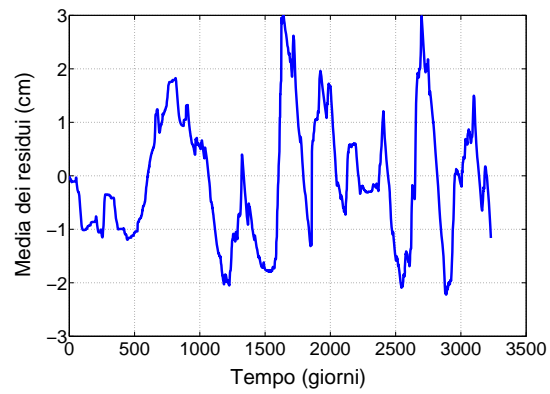
Figura 5.24 Confronto tra gli spostamenti misurati (linea blu) e quelli previsti dal modello (linee rosse), considerando tutte le simulazioni eseguite nell'analisi "semi-probabilistica".

quando il modello viene utilizzato come strumento previsionale.

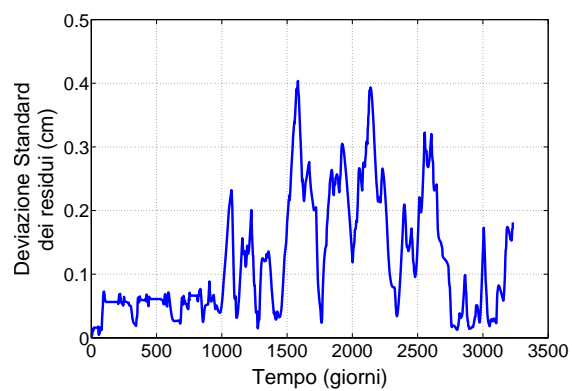
Allo stesso modo, è possibile costruire una funzione di densità di probabilità cumulata empirica per i residui, come riportato in figura 5.19. Un buon modello può essere considerato tale quando l'errore sia mediamente zero e fluttui egualmente sopra e sotto al valore nullo; in altre parole, se la sua distribuzione di probabilità segue una distribuzione Gaussiana a media nulla e varianza σ^2 . In questo caso, i residui mostrano un andamento sicuramente simmetrico attorno al valore medio (cfr. anche figura 5.25), che però non è esattamente zero ma leggermente inferiore. Essendo questi definiti come differenza tra osservazioni e previsioni, ciò sta ad indicare che il modello tende, mediamente, a sovrastimare gli spostamenti. In casi del genere, usando una terminologia inglese, si dice che il modello è *biased*, cioè presenta un errore sistematico (in questo caso non troppo signi-



(a) Residui di tutte le simulazioni nel tempo.



(b) Media dei residui nel tempo.



(c) Deviazione standard dei residui nel tempo.

Figura 5.25 Statistiche ed andamento dell'errore del modello nel tempo.

ficativo). Ad ogni modo, il modello Gaussiano sembra riprodurre in maniera soddisfacente la curva cumulata empirica dei residui (cfr. figura 5.19).

Le statistiche relative ai parametri del modello, all'angolo di attrito interno mobilitato ed ai residui sono riportate in tabella 5.4. Osservando i valori medi, essi sono vicini ad i valori ottenuti dal processo di calibrazione deterministica e mostrano lo stesso andamento nel tempo; con questo approccio, però, si è capaci di associargli un grado di incertezza. Il parametro che presenta il più alto grado di dispersione è il termine viscoso, per cui si ha una maggiore incertezza nel definire C .

A questo riguardo va riportata una nota. Se si guarda al coefficiente di variazione dei v_0 in tabella 5.1, si nota che la loro dispersione non si propaga nei parametri β_0 e C , che mostrano un coefficiente di variazione di qualche ordine di grandezza minore (cfr. tabella 5.4). Questo accade in quanto si è applicato un "filtro" agli effettivi *outputs* ottenuti dalle analisi. Tale filtro è consistito nell'eliminare quelle simulazioni i cui risultati non avevano significato fisico. Nello specifico, le condizioni che devono essere soddisfatte sono:

$$\begin{cases} \varphi'_0 \geq 8^\circ \\ \beta_0 \in]0, 4661, 1[\\ C > 0 \end{cases} \quad (5.2)$$

Per quanto concerne la prima, ovviamente l'angolo di attrito interno del terreno non può assumere valori negativi; in realtà, è stato fissato un limite di otto gradi (e non zero) in quanto, essendo l'inclinazione del pendio proprio pari a tale valore, se si ottiene $\varphi'_0 < 8^\circ$ il modello prevede uno spostamento per qualsiasi quota del livello di falda, mentre questa situazione non si verifica nella realtà.

La seconda condizione deriva direttamente dalla stessa definizione del parametro β . Secondo la 2.7, infatti, esso può assumere valori fisicamente significativi solamente in tale intervallo, in quanto per $\beta > 1$ il livello di falda è sotto la superficie di scivolamento e, quindi,

Statistiche	β_{01} [adim]	β_{02} [adim]	β_{03} [adim]	β_{04} [adim]	C [N · s/m]	φ'_{01} [°]	φ'_{02} [°]	φ'_{03} [°]	φ'_{04} [°]	residui [cm]
Media (μ)	0,5575	0,6011	0,5990	0,6258	$2,81 \cdot 10^{11}$	14,0177	12,8762	12,9449	12,3522	-0,0784
Dev. St. (σ)	0,0086	0,0180	0,0197	0,0255	$6,28 \cdot 10^{10}$	0,1251	0,2284	0,2206	0,2954	1,1811
Coefficiente di Variazione	0,0153	0,0299	0,0328	0,0408	0,2234	0,0089	0,0177	0,0170	0,0239	-

Tabella 5.4 Statistiche relative ai parametri del modello, all'angolo di attrito interno mobilitato ed ai residui, ottenute dall'analisi "semi-probabilistica".

non influisce più sul moto, mentre per $\beta < 0,4661$ la falda si troverebbe sopra il piano campagna, condizione ovviamente priva di senso. Inoltre, poiché β_0 identifica un valore di soglia, sono stati trascurati anche i due valori limite, in quanto se $\beta_0 = 1$ si ha movimento sempre, per qualsiasi livello piezometrico, mentre se $\beta_0 = 0,4661$ avviene il contrario, cioè non si ha mai moto.

Infine, la terza limitazione impone che il parametro viscoso C sia positivo. In caso contrario, infatti, la forza viscosa risulta essere una forza sollecitante e non resistente, di opposizione al moto, come effettivamente deve essere.

Applicare questo tipo di filtro vuol dire, quindi, eliminare alcune simulazioni. In particolare, si è visto che quando v_0 assume valori troppo alti il modello non è in grado di restituire risultati fisicamente significativi. Come conseguenza dell'applicazione di tali costrizioni, i parametri β_0 e C presentano una minore dispersione.

5.4 **Analisi inversa probabilistica**

Nel paragrafo precedente è stato discusso un approccio di analisi mediante il quale si sono determinate le distribuzioni di probabilità a priori e la struttura di correlazione dei parametri, nonché la funzione di densità di probabilità dei residui e la loro matrice di covarianza. In questo modo è stato possibile definire i due elementi fondamentali della formulazione Bayesiana, ovvero la probabilità a priori e la funzione di verosimiglianza. Combinando queste due sorgenti di informazione (cfr. equazione 3.16) si ottiene la probabilità a posteriori, che rappresenta la soluzione probabilistica al problema inverso.

Come mostrano le funzioni cumulate riportate nelle figure 5.10-5.18, le distribuzioni di probabilità dei parametri possono essere rappresentate, con buona approssimazione, mediante un modello Lognormale. La probabilità a priori è stata allora definita attraverso una distribuzione Lognormale multivariata, includendo così anche la

Parametri	$\mu_{\mathbf{m}}^{\ln}$
v_{01}	-6,2061
v_{02}	-5,1349
v_{03}	-5,3478
v_{04}	-5,1607
β_{01}	-0,5844
β_{02}	-0,5094
β_{03}	-0,5130
β_{04}	-0,4695
C	26,3396

Tabella 5.5 Valori del parametro statistico $\mu_{\mathbf{m}}^{\ln}$ della distribuzione Lognormale multivariata, assunta come distribuzione di probabilità a priori dei parametri del modello.

correlazione esistente tra i parametri del modello. La sua espressione analitica è data dalla 3.17, mentre i parametri statistici adottati per il caso in esame, cioè il vettore delle medie $\mu_{\mathbf{m}}^{\ln}$ e la matrice di covarianza $\Sigma_{\mathbf{m}}^{\ln}$, sono riportati, rispettivamente, nelle tabelle 5.5 e 5.8.

Per verificare la bontà della scelta fatta, si sono costruite le distribuzioni di probabilità marginali di ogni parametro, campionando 1.000.000 punti a partire dalla distribuzione Lognormale multivariata appena descritta. Tali funzioni sono state confrontate con quelle empiriche e con il modello Lognormale, adottato considerando i parametri del modello indipendenti. Dalle figure 5.26-5.34 si può concludere che la funzione 3.17 risulta sostanzialmente idonea a rappresentare l'informazione a priori.

Per quanto riguarda la funzione di verosimiglianza, si sono analizzati due casi, che si differenziano per il diverso livello di informazione considerato. In particolare, inizialmente si è fatto riferimento ad una situazione di completa ignoranza, mentre nel secondo caso si è in-

Parametri	v_{01}	v_{02}	v_{03}	v_{04}	β_{01}	β_{02}	β_{03}	β_{04}	C
v_{01}	1,5718	0,0575	0,0370	0,0474	-0,0141	-0,0031	-0,0041	-0,0061	-0,0452
v_{02}		1,1489	0,0266	-0,0667	-0,0028	-0,0240	-0,0039	-0,0053	-0,0549
v_{03}			1,4063	0,0137	-0,0026	-0,0052	-0,0305	-0,0084	-0,0825
v_{04}				1,5612	-0,0020	-0,0035	-0,0029	-0,0376	-0,0739
β_{01}					0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0018
β_{02}						0,0009	0,0004	0,0005	0,0046
β_{03}							0,0011	0,0005	0,0047
β_{04}								0,0017	0,0061
C									0,0460

Tabella 5.6 Matrice di covarianza $\Sigma_{\mathbf{m}}^{\ln}$ della distribuzione Lognormale multivariata, assunta come distribuzione di probabilità a priori dei parametri del modello.

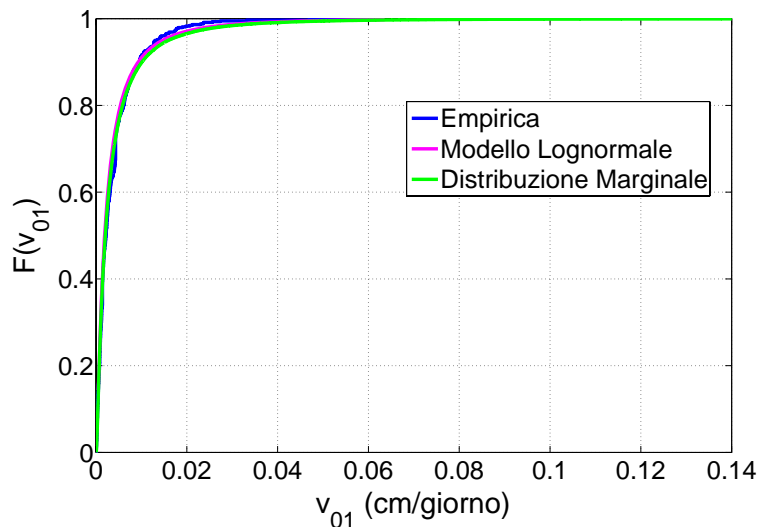


Figura 5.26 Funzione di densità di probabilità cumulata del parametro v_{01} . La linea blu rappresenta la curva empirica, la linea magenta la distribuzione Lognormale del parametro indipendente, la linea verde la distribuzione marginale ottenuta dalla distribuzione Lognormale multivariata.

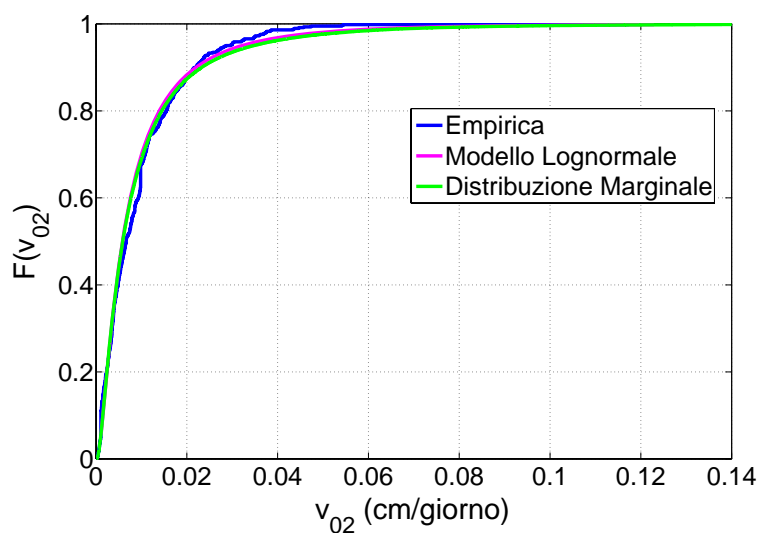


Figura 5.27 Funzione di densità di probabilità cumulata del parametro v_{02} . La linea blu rappresenta la curva empirica, la linea magenta la distribuzione Lognormale del parametro indipendente, la linea verde la distribuzione marginale ottenuta dalla distribuzione Lognormale multivariata.

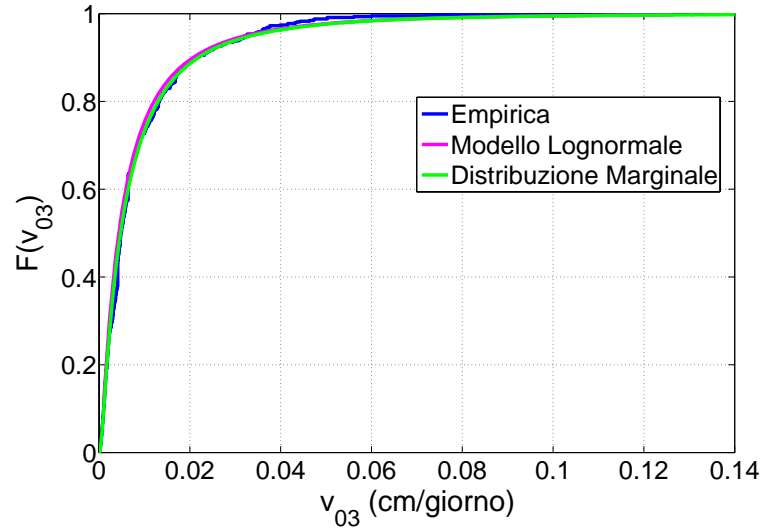


Figura 5.28 Funzione di densità di probabilità cumulata del parametro v_{03} . La linea blu rappresenta la curva empirica, la linea magenta la distribuzione Lognormale del parametro indipendente, la linea verde la distribuzione marginale ottenuta dalla distribuzione Lognormale multivariata.

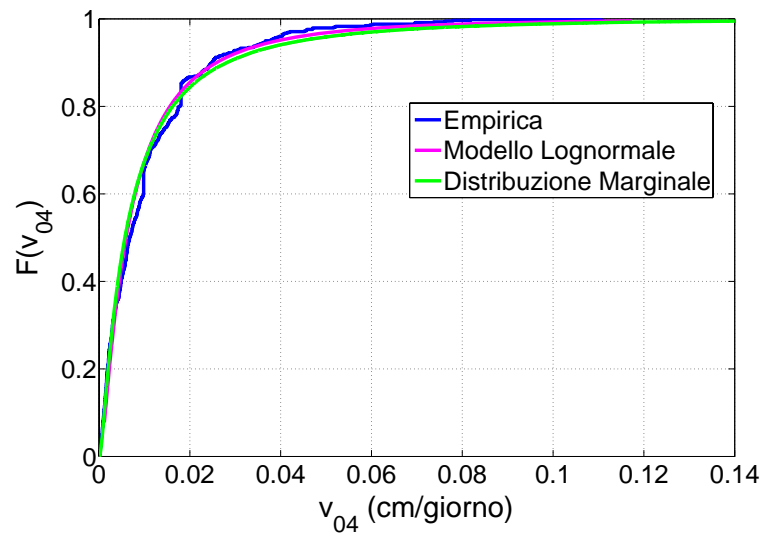


Figura 5.29 Funzione di densità di probabilità cumulata del parametro v_{04} . La linea blu rappresenta la curva empirica, la linea magenta la distribuzione Lognormale del parametro indipendente, la linea verde la distribuzione marginale ottenuta dalla distribuzione Lognormale multivariata.

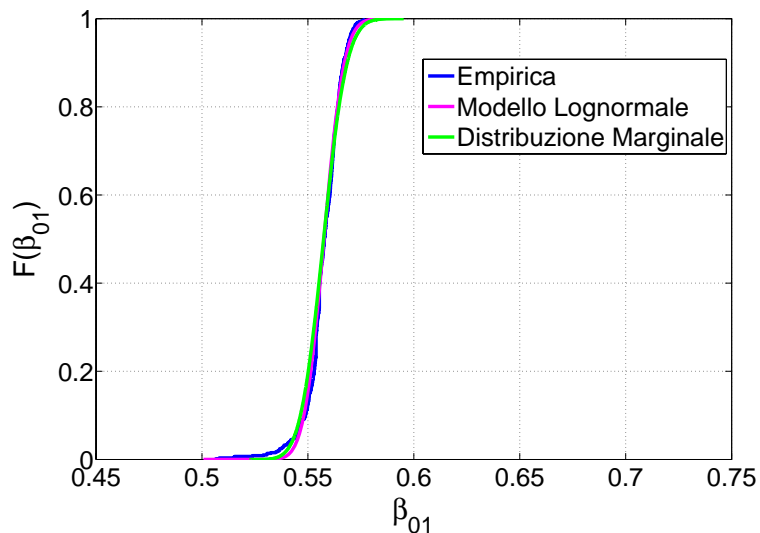


Figura 5.30 Funzione di densità di probabilità cumulata del parametro β_{01} . La linea blu rappresenta la curva empirica, la linea magenta la distribuzione Lognormale del parametro indipendente, la linea verde la distribuzione marginale ottenuta dalla distribuzione Lognormale multivariata.

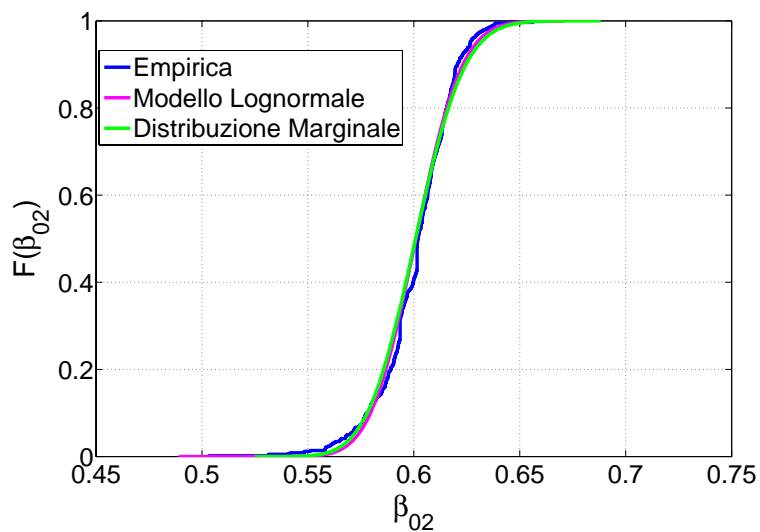


Figura 5.31 Funzione di densità di probabilità cumulata del parametro β_{02} . La linea blu rappresenta la curva empirica, la linea magenta la distribuzione Lognormale del parametro indipendente, la linea verde la distribuzione marginale ottenuta dalla distribuzione Lognormale multivariata.

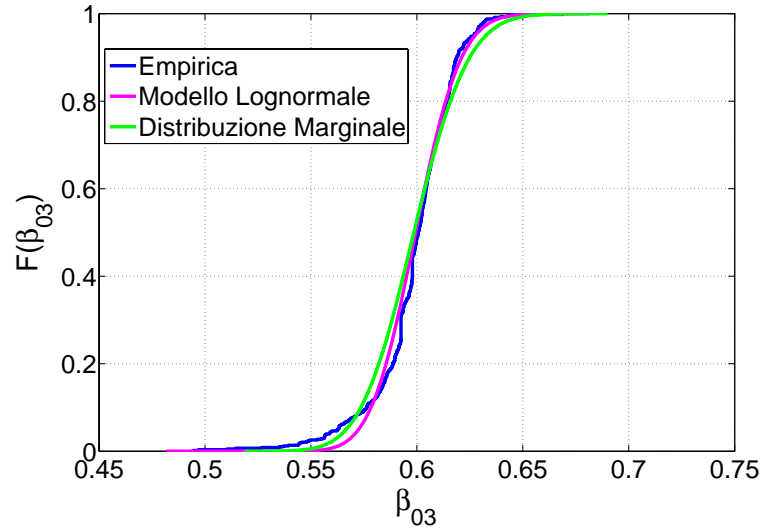


Figura 5.32 Funzione di densità di probabilità cumulata del parametro β_{03} . La linea blu rappresenta la curva empirica, la linea magenta la distribuzione Lognormale del parametro indipendente, la linea verde la distribuzione marginale ottenuta dalla distribuzione Lognormale multivariata.

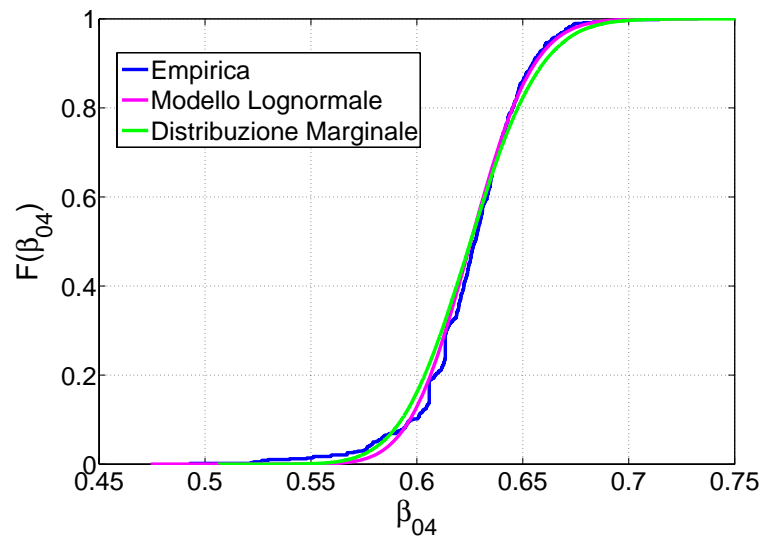


Figura 5.33 Funzione di densità di probabilità cumulata del parametro β_{04} . La linea blu rappresenta la curva empirica, la linea magenta la distribuzione Lognormale del parametro indipendente, la linea verde la distribuzione marginale ottenuta dalla distribuzione Lognormale multivariata.

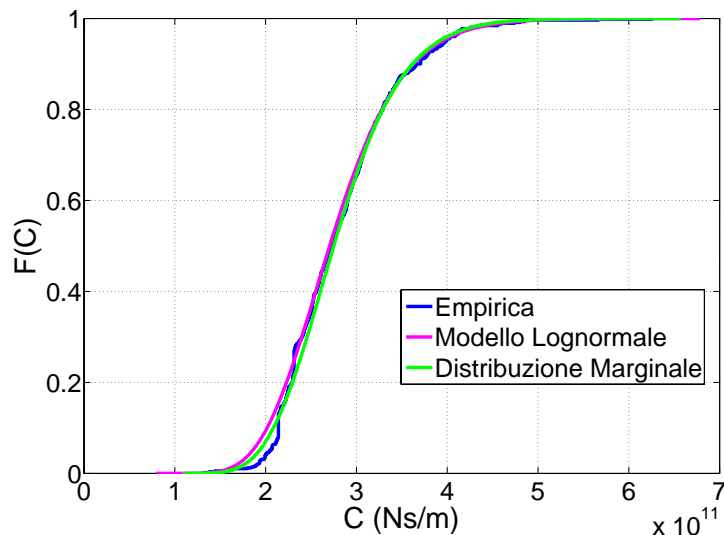


Figura 5.34 Funzione di densità di probabilità cumulata del parametro C . La linea blu rappresenta la curva empirica, la linea magenta la distribuzione Lognormale del parametro indipendente, la linea verde la distribuzione marginale ottenuta dalla distribuzione Lognormale multivariata.

trodotta l'informazione ottenuta dall'analisi "semi-probabilistica". I due casi sono illustrati di seguito nel dettaglio.

5.4.1 Caso 1: matrice di covarianza dei residui non nota

Nel primo caso si è ipotizzato non avere nessuna informazione circa la matrice di covarianza dei residui, per cui si è assunto che la varianza dell'errore fosse non nota e costante nel tempo. Nel processo di calibrazione probabilistico essa è stata considerata, quindi, come variabile casuale. Sotto queste ipotesi, la matrice di covarianza dei residui risulta diagonale e costituita da elementi tutti uguali tra loro, per cui l'espressione della funzione di verosimiglianza 3.18 può essere

così semplificata (a meno di costanti):

$$f(\mathbf{d}_{obs}|\mathbf{m}, \mathbf{f}) \propto \frac{1}{\sigma^n} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (\mathbf{d}_{obs} - \mathbf{f}(\mathbf{m}))_i^2 \right] \quad (5.3)$$

dove $(\mathbf{d}_{obs} - \mathbf{f}) = \Delta \mathbf{d}$ è il vettore dei residui, σ è la deviazione standard dei residui (la stessa per ogni residuo) ed n è il numero di osservazioni.

Per quanto riguarda la probabilità a priori della variabile casuale σ , è stato fatto riferimento alla cosiddetta priori non-informativa (cfr. paragrafo 3.3.1), come suggerito in letteratura [45]. Essa, a meno di costanti, risulta così definita:

$$\pi(\sigma) \propto \frac{1}{\sigma} \quad (5.4)$$

Moltiplicando, dunque, la funzione di verosimiglianza 5.3 con la funzione a priori dei parametri del modello 3.17 e con quella della variabile casuale σ 5.4, si ottiene la distribuzione di probabilità a posteriori. La sua integrazione è stata eseguita mediante il metodo *Markov Chain Monte Carlo* e l'algoritmo Metropolis-Hastings, ampiamente illustrati nel paragrafo 3.3.2.

Generalmente, la distribuzione di proposta coincide con la distribuzione Gaussiana o con la distribuzione *t-Student*, a meno che non si conosca esattamente la forma della distribuzione obiettivo. La definizione della sua scala, ovvero della sua deviazione standard, è molto importante in quanto influisce sull'efficienza dell'algoritmo. Se questa risulta troppo bassa, i passi di campionamento sono piccoli, per cui la probabilità di accettare il punto candidato è molto alta e la catena converge lentamente alla distribuzione obiettivo. Al contrario, se la distribuzione di proposta genera dei passi di campionamento troppo grandi (cioè deviazione standard alta), la probabilità di accettare il punto candidato è molto bassa e di nuovo la catena converge lentamente alla distribuzione di interesse [40]. Da letteratura, un passo di campionamento ottimale è quello che garantisce una probabilità di accettazione del 50-60%.

Nel presente lavoro, come distribuzione di proposta è stata scelta un distribuzione Gaussiana e la deviazione standard di ogni parametro, indicata con σ_{m_i} , è stata fissata attraverso un'analisi di sensitività. In particolare, per tenere conto, nella scelta dei punti candidati, della correlazione esistente tra i parametri, si è considerata una distribuzione Normale multivariata, la cui matrice di covarianza Σ è così definita:

$$\Sigma_{i,j} = \sigma_{m_i} \cdot \sigma_{m_j} \cdot \rho_{i,j} \quad (5.5)$$

dove σ_{m_i} e σ_{m_j} sono le deviazioni standard della distribuzione di proposta rispettivamente per il parametro m_i ed m_j , mentre $\rho_{i,j}$ rappresenta il loro coefficiente di correlazione.

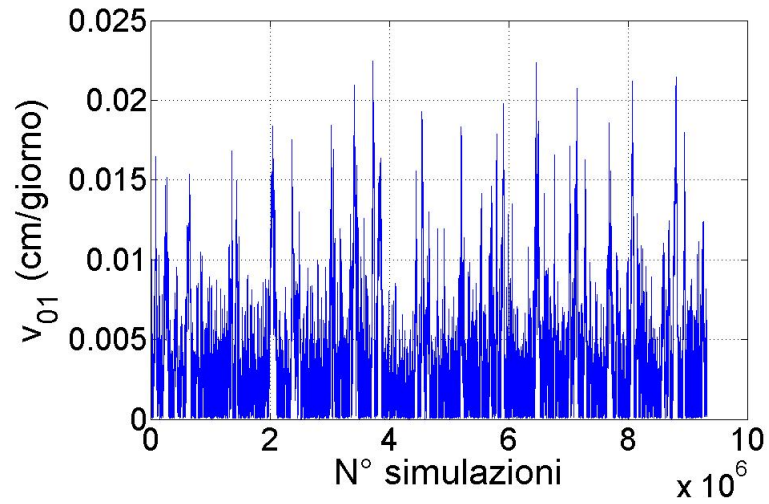
A questo punto, il campionamento dei punti candidati dalla distribuzione Gaussiana multivariata può essere così effettuato:

$$\mathbf{y} = \mathbf{m}_t + \mathbf{R}\mathbf{z} \quad (5.6)$$

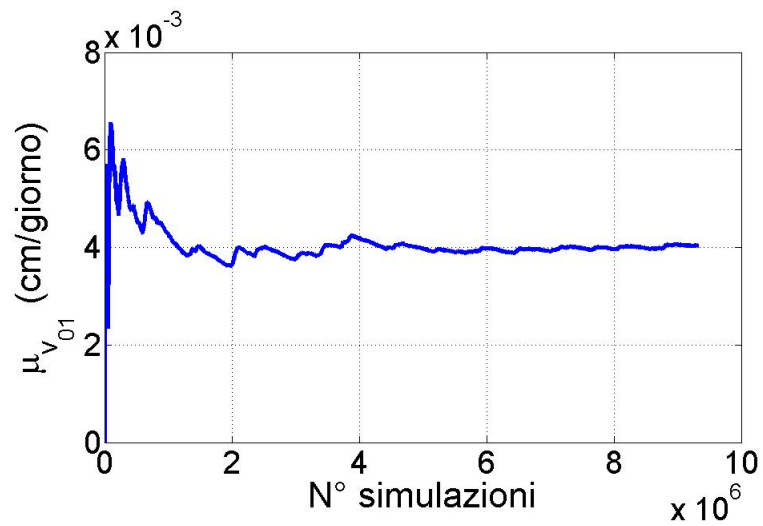
dove \mathbf{y} è il vettore dei valori dei parametri proposti, \mathbf{m}_t è il vettore dei valori dei parametri allo stato precedente, \mathbf{z} è un vettore di numeri casuali normali standard, \mathbf{R} è una matrice tale per cui $\mathbf{R}^T\mathbf{R} = \Sigma$. La matrice \mathbf{R} può essere ottenuta attraverso la fattorizzazione di Cholesky della matrice di covarianza Σ .

Implementando, sotto tali condizioni, l'algoritmo Metropolis-Hastings (cfr. paragrafo 3.3.2) in un codice MatLab, è stato possibile effettuare il campionamento della funzione a posteriori. I risultati dell'analisi sono mostrati nelle figure 5.35-5.44, in cui sono riportate le sequenze dei valori dei parametri campionati durante il processo di simulazione (figure (a)). Per controllare la convergenza del metodo, ad ogni passo di simulazione si è registrata, per ogni parametro, la media dei valori campionati fino a quello stato (figure (b)). Questi grafici mostrano come essa tenda ad una condizione di stazionarietà, per cui la convergenza può essere ritenuta raggiunta.

L'inferenza statistica sui parametri del modello, ovvero la determinazione della forma della distribuzione di probabilità e la stima

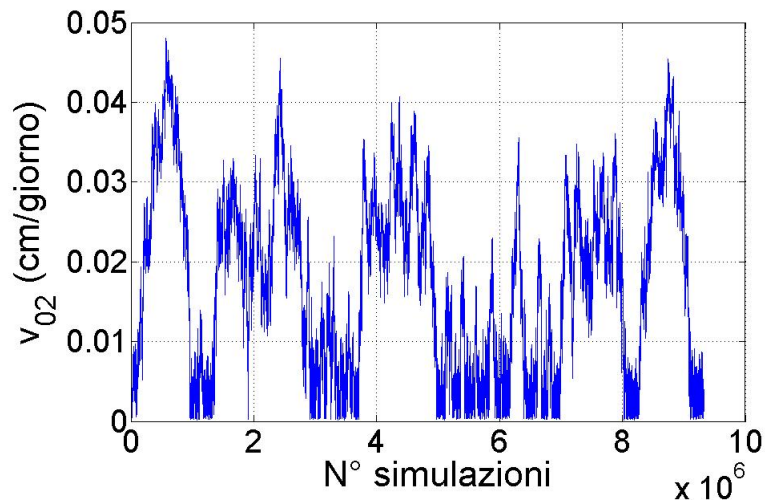


(a) Sequenza dei valori campionati durante la simulazione.

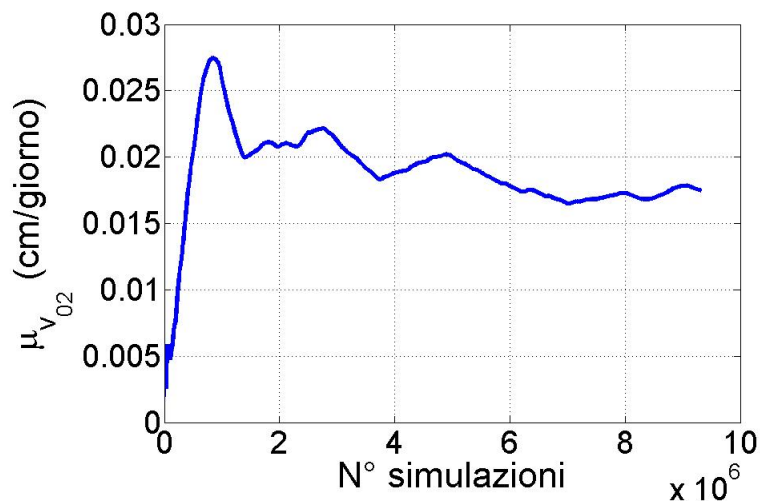


(b) Sequenza dei valori della media durante la simulazione.

Figura 5.35 Campionamento del parametro v_{01} , mediante il metodo MCMC basato sull'algoritmo Metropolis-Hastings (caso 1).

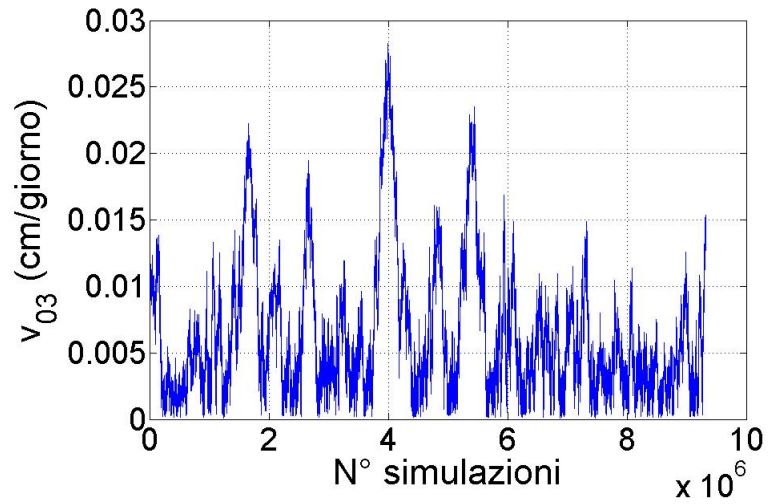


(a) Sequenza dei valori campionati durante la simulazione.

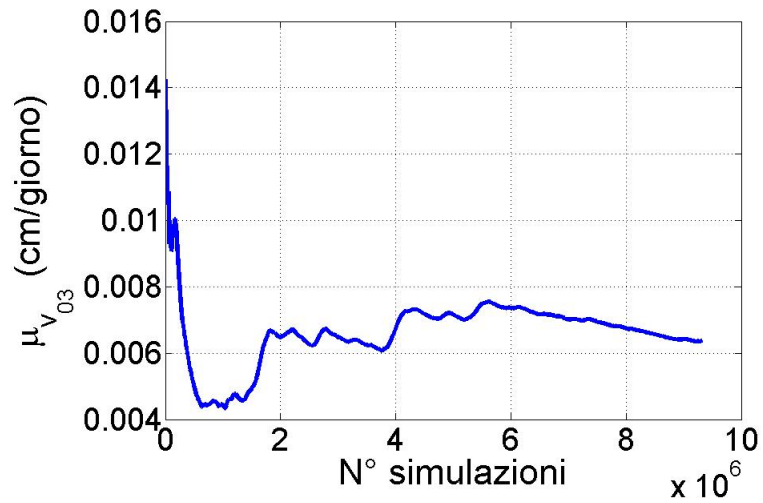


(b) Sequenza dei valori della media durante la simulazione.

Figura 5.36 Campionamento del parametro v_{02} , mediante il metodo MCMC basato sull'algoritmo Metropolis-Hastings (caso 1).

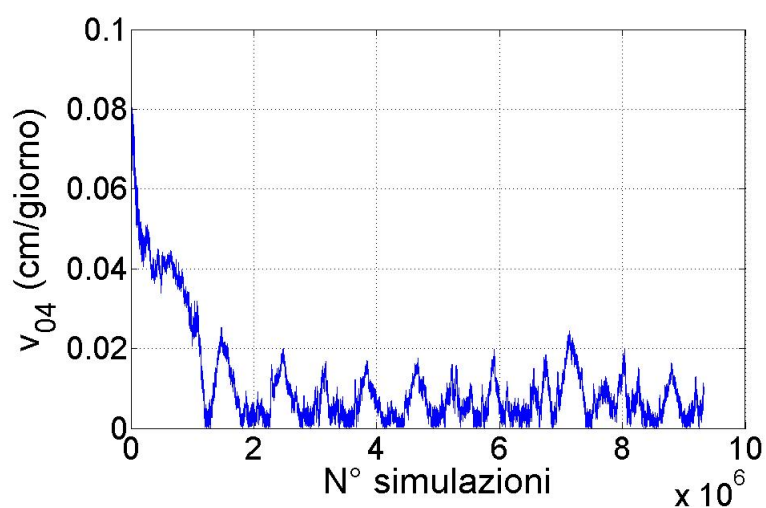


(a) Sequenza dei valori campionati durante la simulazione.

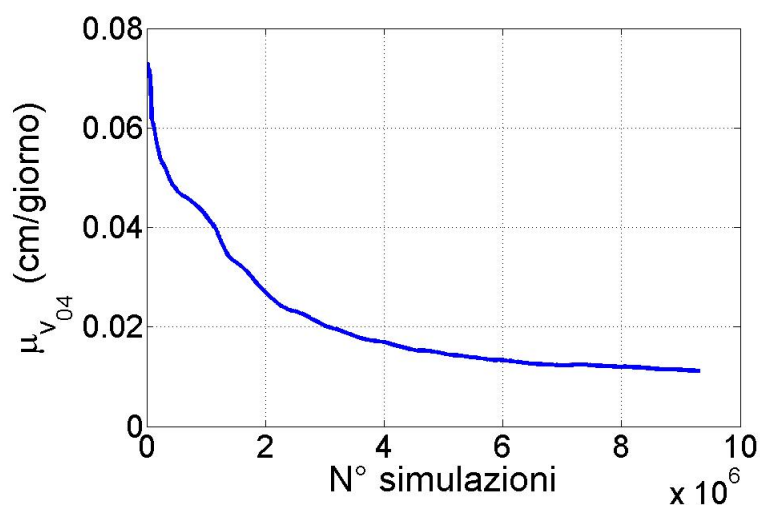


(b) Sequenza dei valori della media durante la simulazione.

Figura 5.37 Campionamento del parametro v_{03} , mediante il metodo MCMC basato sull'algoritmo Metropolis-Hastings (caso 1).

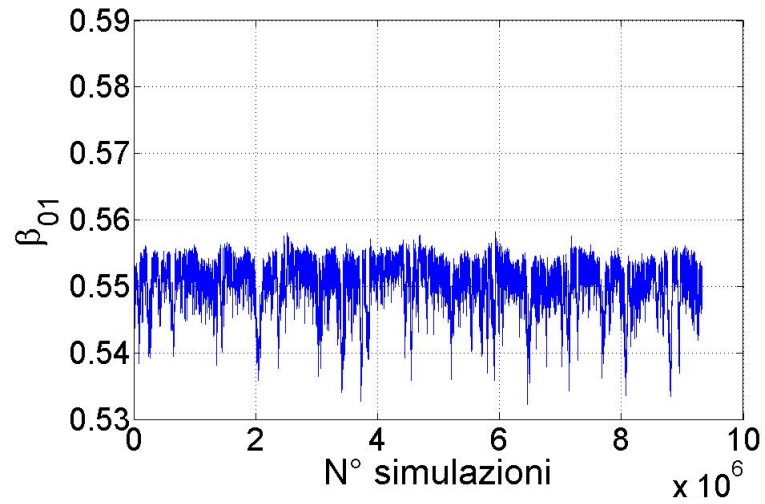


(a) Sequenza dei valori campionati durante la simulazione.

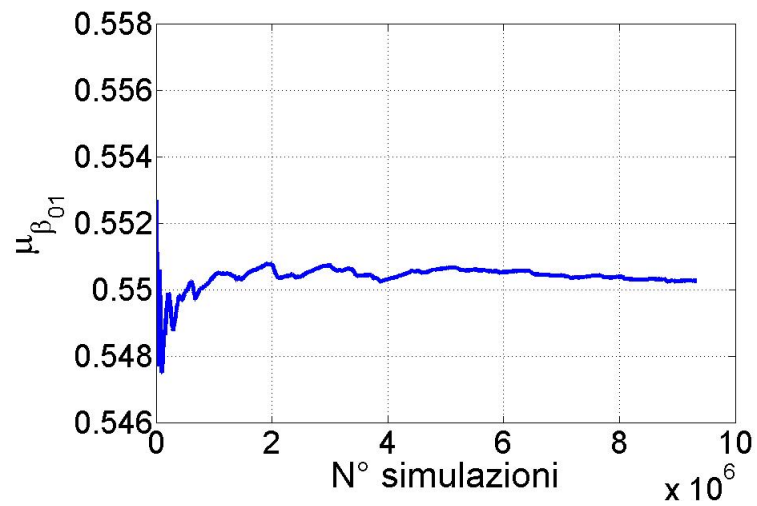


(b) Sequenza dei valori della media durante la simulazione.

Figura 5.38 Campionamento del parametro v_{04} , mediante il metodo MCMC basato sull'algoritmo Metropolis-Hastings (caso 1).

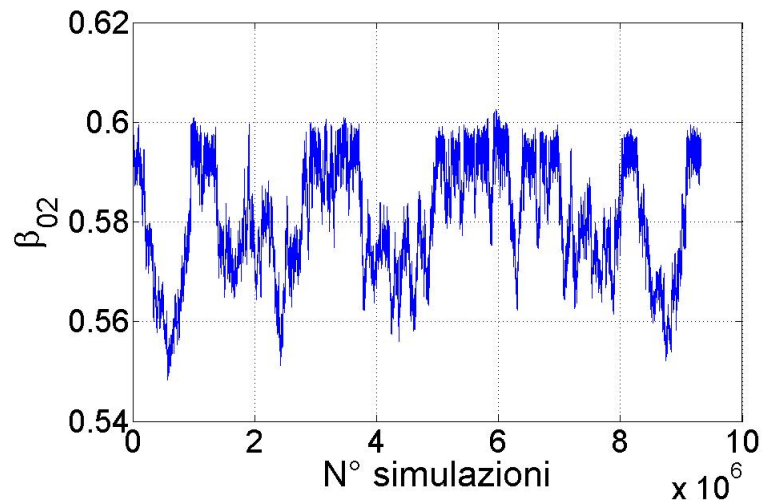


(a) Sequenza dei valori campionati durante la simulazione.

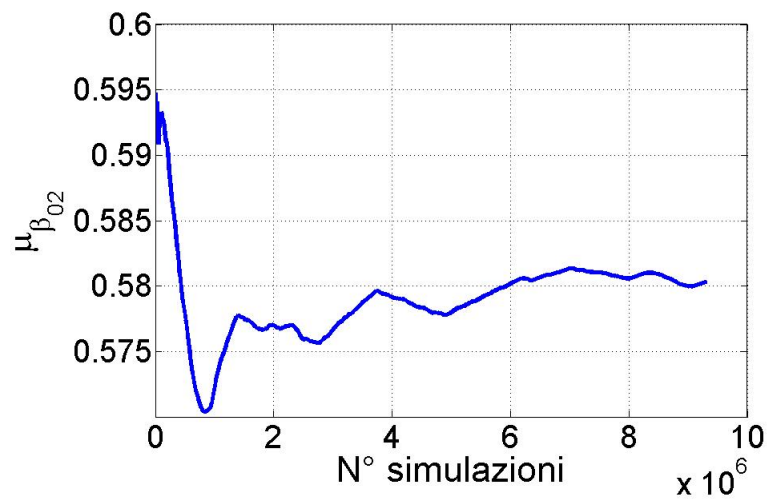


(b) Sequenza dei valori della media durante la simulazione.

Figura 5.39 Campionamento del parametro β_{01} , mediante il metodo MCMC basato sull'algoritmo Metropolis-Hastings (caso 1).

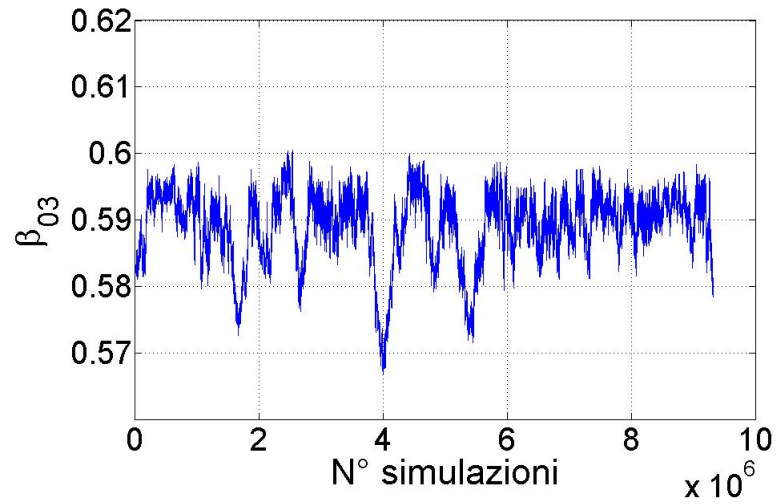


(a) Sequenza dei valori campionati durante la simulazione.

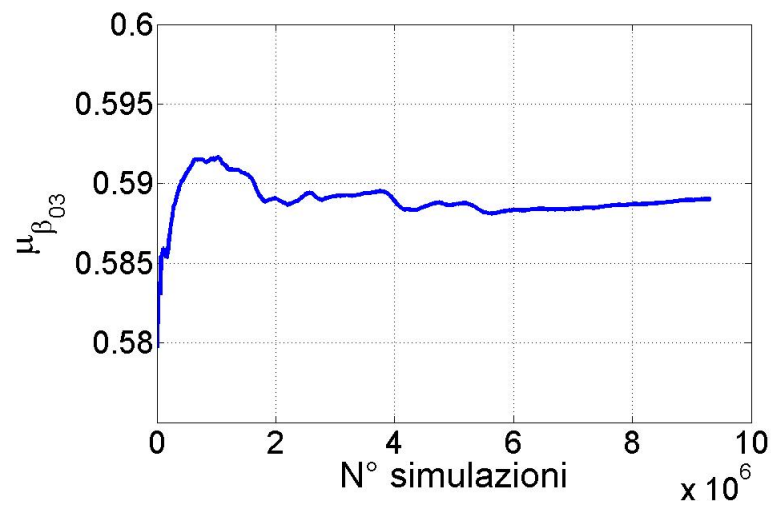


(b) Sequenza dei valori della media durante la simulazione.

Figura 5.40 Campionamento del parametro β_{02} , mediante il metodo MCMC basato sull'algoritmo Metropolis-Hastings (caso 1).

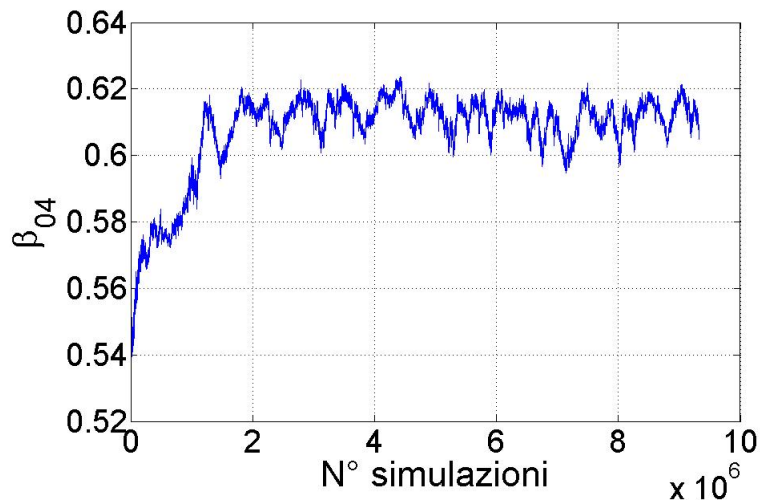


(a) Sequenza dei valori campionati durante la simulazione.

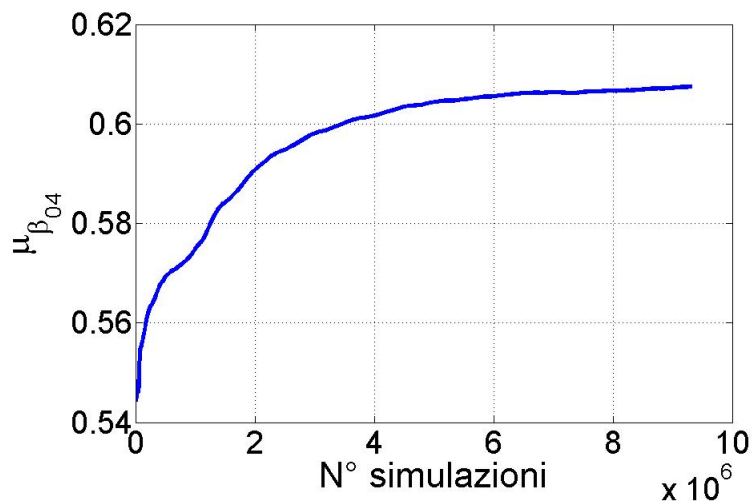


(b) Sequenza dei valori della media durante la simulazione.

Figura 5.41 Campionamento del parametro β_{03} , mediante il metodo MCMC basato sull'algoritmo Metropolis-Hastings (caso 1).

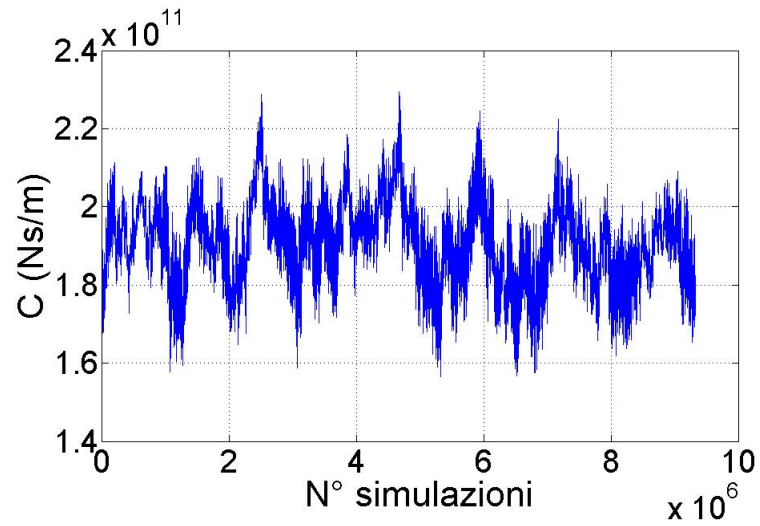


(a) Sequenza dei valori campionati durante la simulazione.

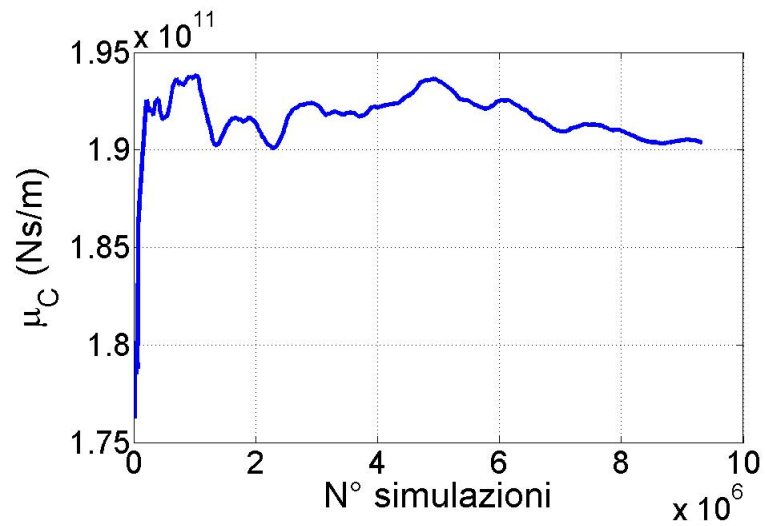


(b) Sequenza dei valori della media durante la simulazione.

Figura 5.42 Campionamento del parametro β_{04} , mediante il metodo MCMC basato sull'algoritmo Metropolis-Hastings (caso 1).

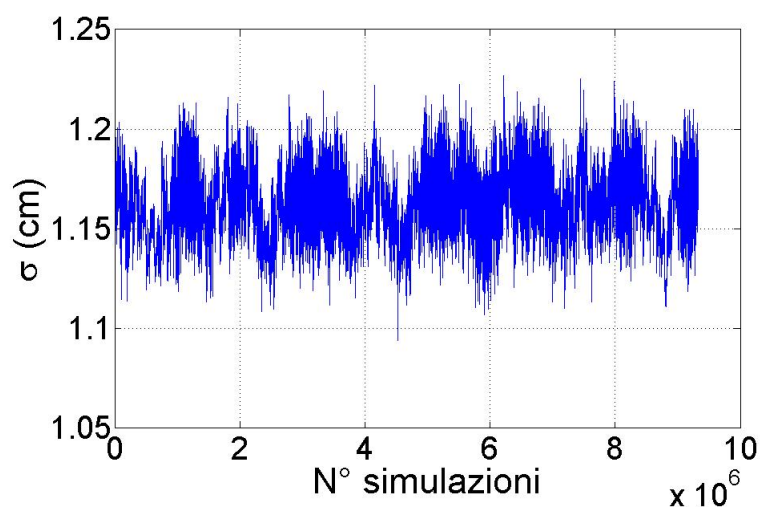


(a) Sequenza dei valori campionati durante la simulazione.

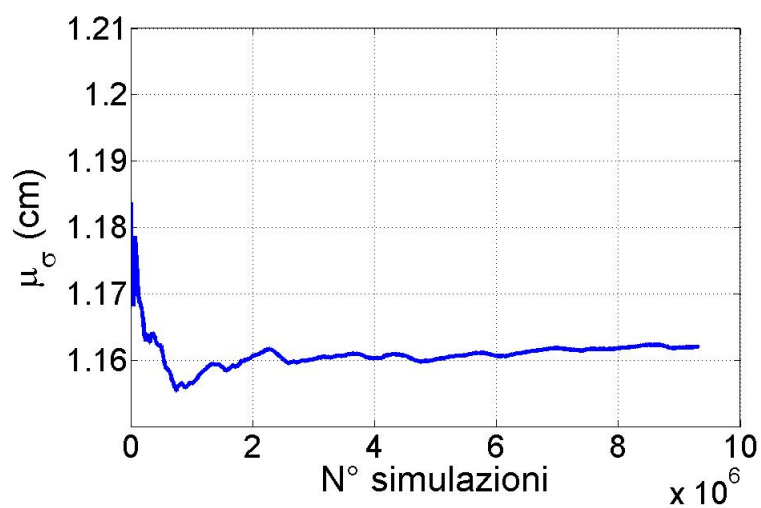


(b) Sequenza dei valori della media durante la simulazione.

Figura 5.43 Campionamento del parametro C , mediante il metodo MCMC basato sull'algoritmo Metropolis-Hastings (caso 1).



(a) Sequenza dei valori campionati durante la simulazione.



(b) Sequenza dei valori della media durante la simulazione.

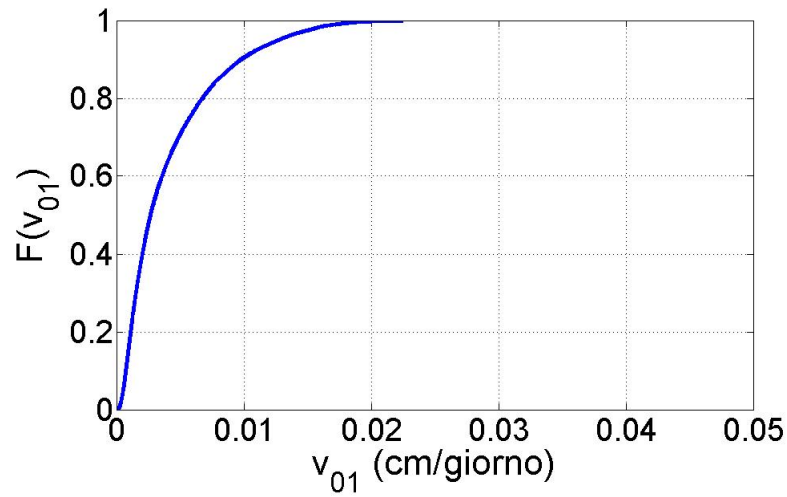
Figura 5.44 Campionamento del parametro σ , mediante il metodo MCMC basato sull'algoritmo Metropolis-Hastings (caso 1).

dei parametri statistici (come la media, la varianza, la matrice di correlazione, ecc.), deve essere effettuata eliminando il numero di simulazioni che sono state necessarie per raggiungere la condizione di stazionarietà. In questo caso, è stato considerato un *burn-in* di circa 3.000.000 di simulazioni. Come si può notare, lo sforzo computazionale richiesto per arrivare alla soluzione è stato abbastanza importante.

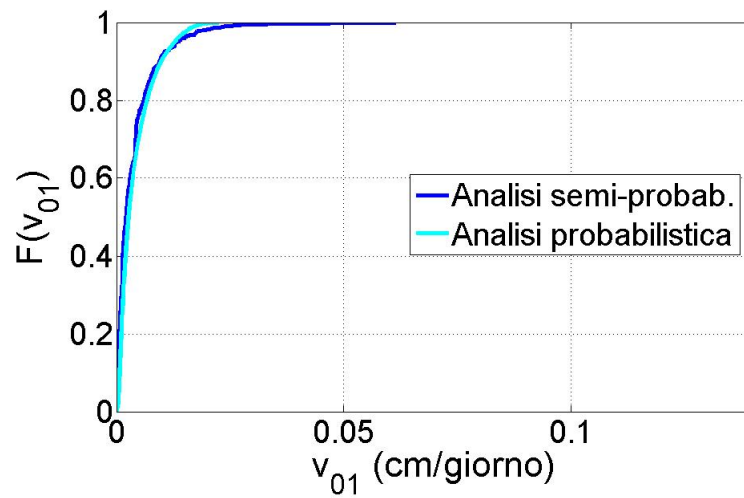
La calibrazione probabilistica appena descritta restituisce una soluzione completa del problema inverso, in quanto permette di definire la forma delle distribuzioni di probabilità marginali dei parametri del modello, riportate nelle figure 5.45-5.54 sotto forma di funzioni di densità cumulate (CDF). In questi grafici viene riportato anche un confronto tra la soluzione probabilistica e quella ottenuta con l'approccio "semi-probabilistico" (figure (b)): è evidente la riduzione dell'incertezza nella definizione dei parametri dovuta all'introduzione ed alla combinazione di una nuova informazione (le osservazioni di campo) con quella a priori. Inoltre, da questa analisi è possibile stimare le statistiche relative ai parametri (ovvero la media e la deviazione standard), compendiate in tabella 5.7, nonché valutare la loro struttura di correlazione, riportata in forma di matrice in tabella ???. Da quest'ultima si apprende, in particolare, lo stato di forte correlazione negativa esistente tra la velocità iniziale v_0 ed il livello di falda di soglia, rappresentato dal termine β_0 .

Poiché il modello in esame restituisce una stima dell'angolo di attrito mobilitato, anche per questo parametro si sono ottenute delle informazioni statistiche. Le curve di densità di probabilità sono riportate nelle figure 5.56-5.59, mentre in tabella 5.9 sono riassunti i valori medi e le deviazioni standard per i quattro periodi. Si nota come ϕ'_0 tenda, ragionevolmente, a diminuire nel tempo, aspetto che era già stato osservato con le precedenti analisi.

Infine, la soluzione probabilistica restituisce un'informazione circa le prestazioni del modello, in quanto con questo tipo di approccio si è in grado di associare ad ogni previsione un grado di incertezza.

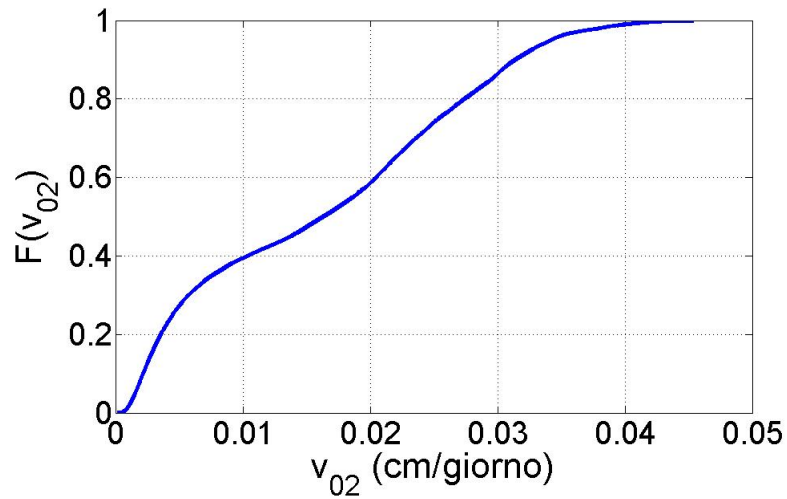


(a) Funzione di densità cumulata (CDF).

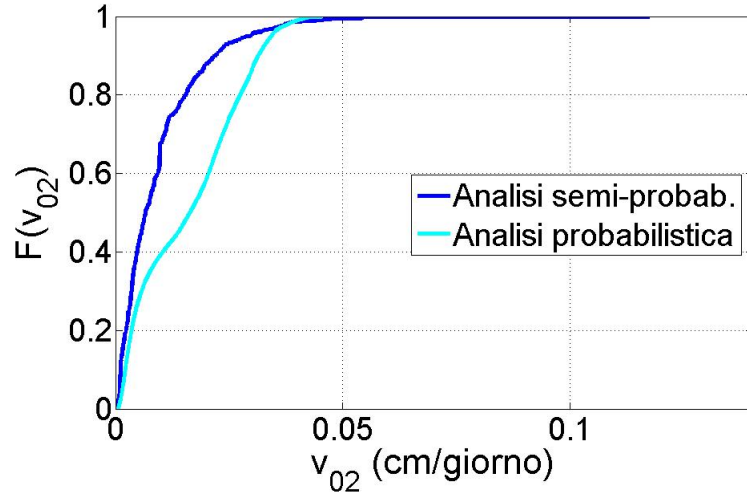


(b) Confronto tra approccio probabilistico (linea azzurra) e approccio “semi-probabilistico” (linea blu), in termini di funzioni di densità cumulate.

Figura 5.45 Soluzione della calibrazione probabilistica per il parametro v_{01} (caso 1).

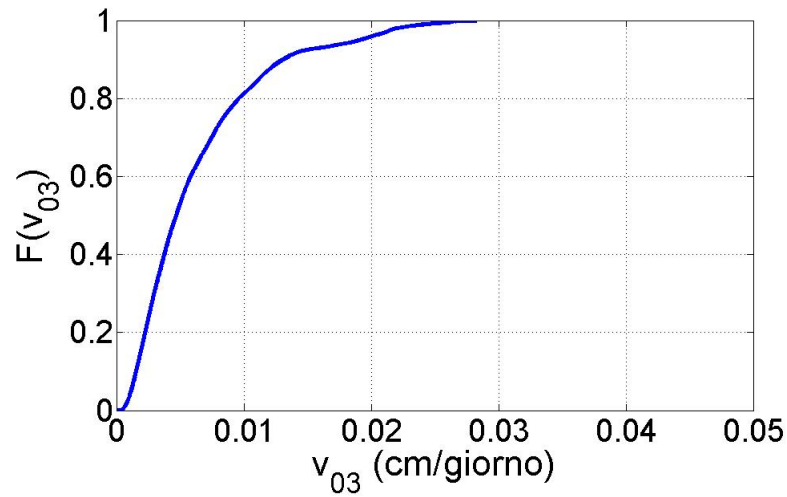


(a) Funzione di densità cumulata (CDF).

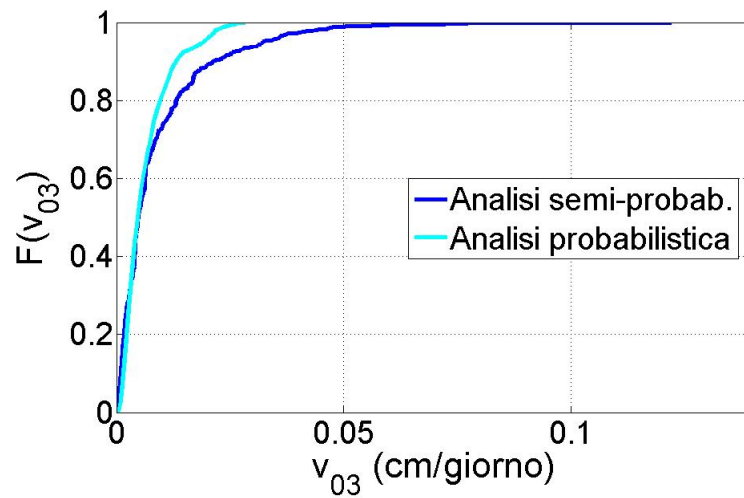


(b) Confronto tra approccio probabilistico (linea azzurra) e approccio “semi-probabilistico” (linea blu), in termini di funzioni di densità cumulate.

Figura 5.46 Soluzione della calibrazione probabilistica per il parametro $v_{02}(caso1)$.

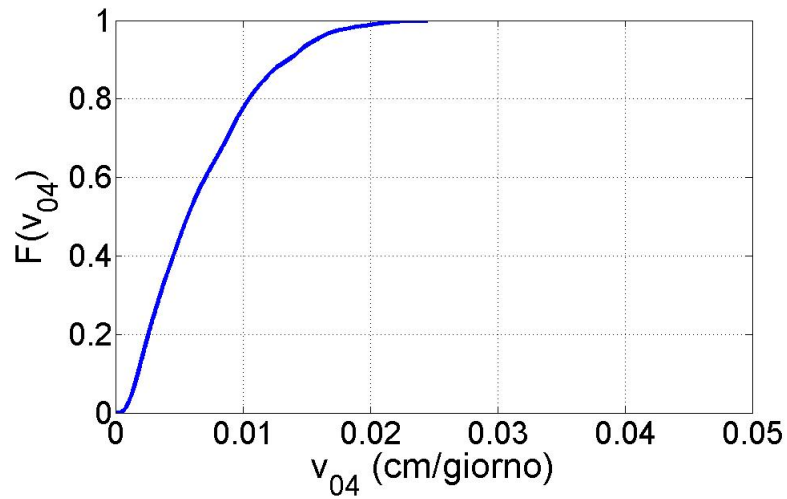


(a) Funzione di densità cumulata (CDF).

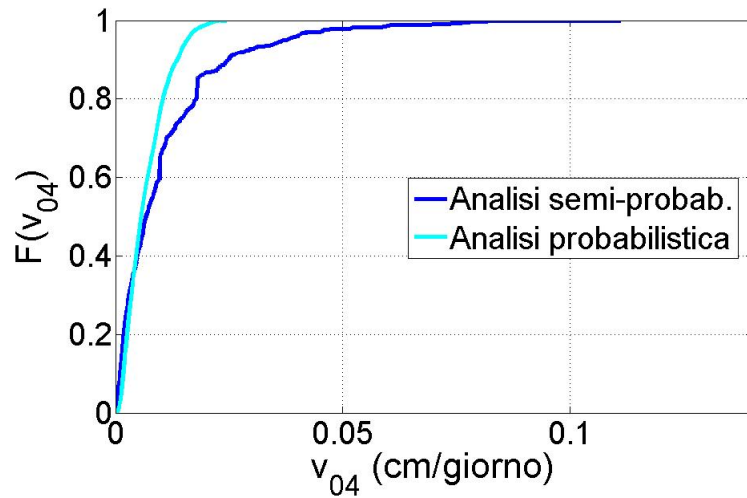


(b) Confronto tra approccio probabilistico (linea azzurra) e approccio “semi-probabilistico” (linea blu), in termini di funzioni di densità cumulate.

Figura 5.47 Soluzione della calibrazione probabilistica per il parametro $v_{03}(caso1)$.

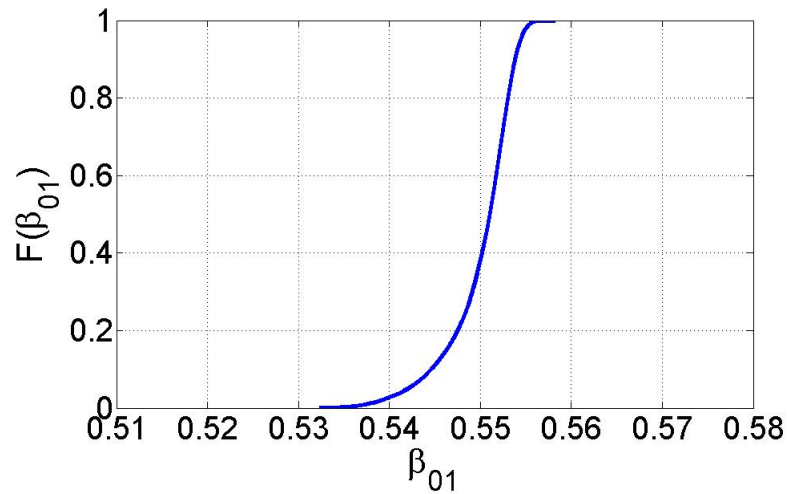


(a) Funzione di densità cumulata (CDF).

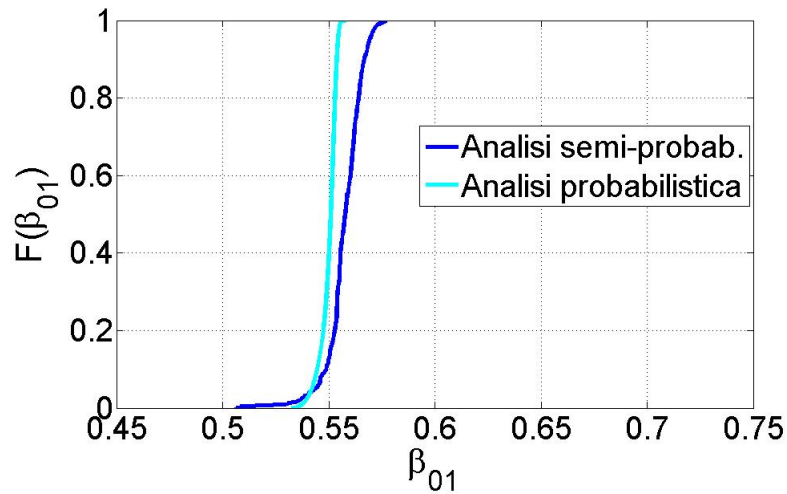


(b) Confronto tra approccio probabilistico (linea azzurra) e approccio “semi-probabilistico” (linea blu), in termini di funzioni di densità cumulate.

Figura 5.48 Soluzione della calibrazione probabilistica per il parametro $v_{04}(caso1)$.

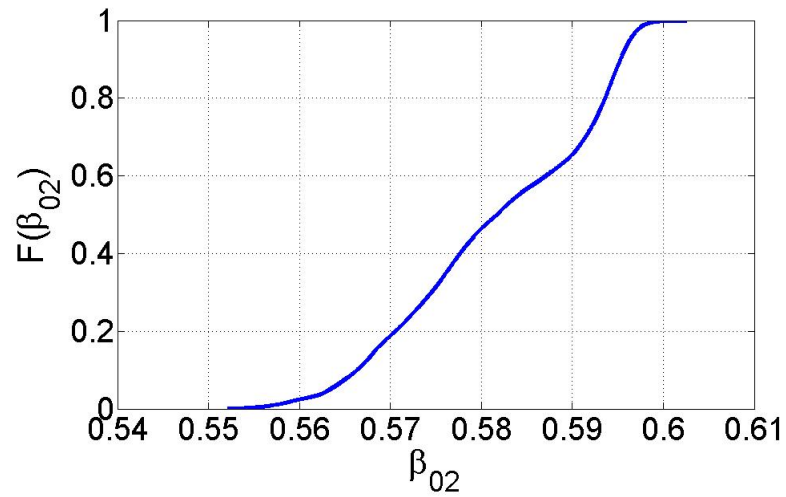


(a) Funzione di densità cumulata (CDF).

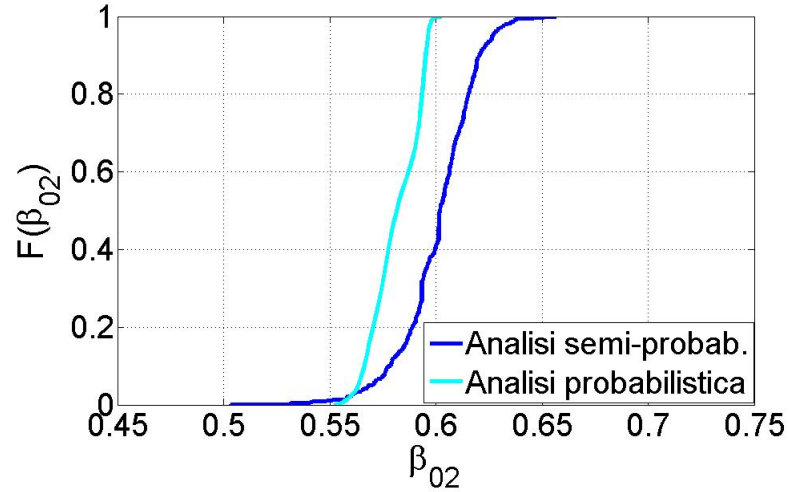


(b) Confronto tra approccio probabilistico (linea azzurra) e approccio “semi-probabilistico” (linea blu), in termini di funzioni di densità cumulate.

Figura 5.49 Soluzione della calibrazione probabilistica per il parametro β_{01} (caso1).

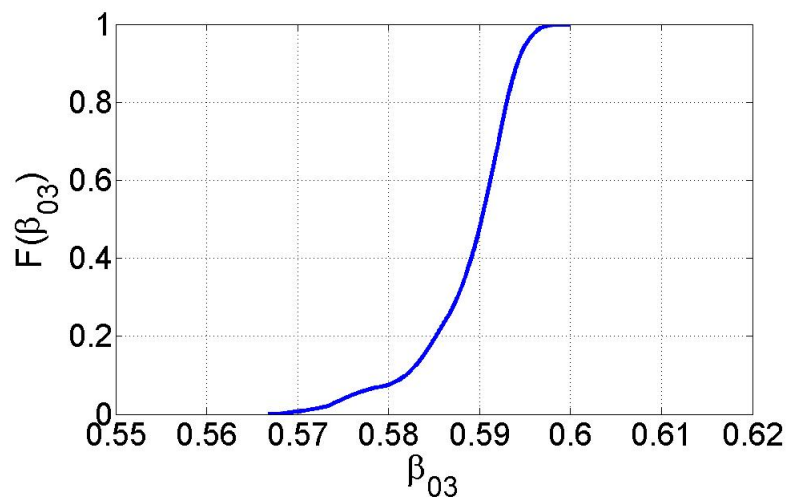


(a) Funzione di densità cumulata (CDF).

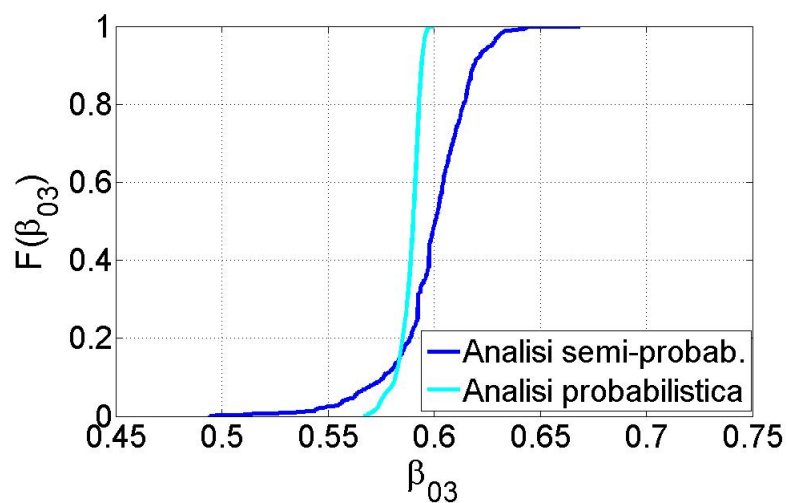


(b) Confronto tra approccio probabilistico (linea azzurra) e approccio "semi-probabilistico" (linea blu), in termini di funzioni di densità cumulate.

Figura 5.50 Soluzione della calibrazione probabilistica per il parametro $\beta_{02}(caso1)$.

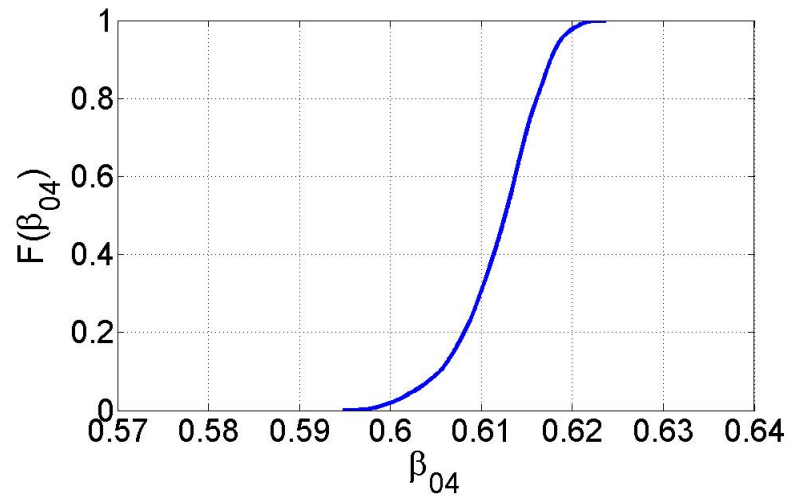


(a) Funzione di densità cumulata (CDF).

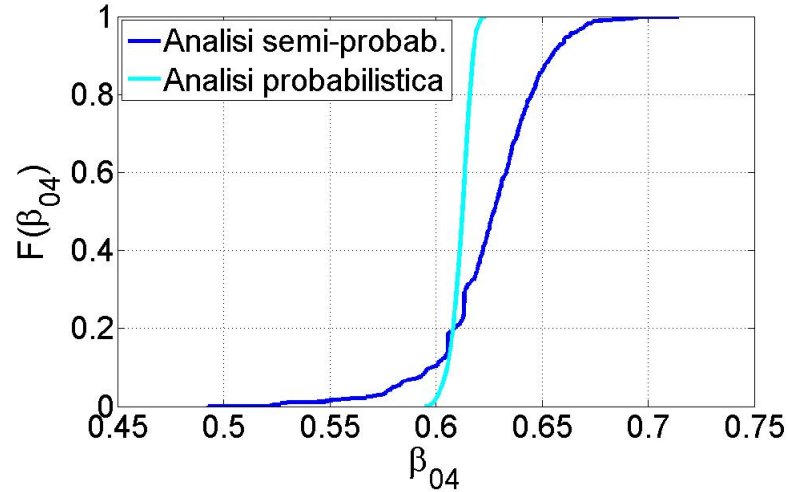


(b) Confronto tra approccio probabilistico (linea azzurra) e approccio “semi-probabilistico” (linea blu), in termini di funzioni di densità cumulate.

Figura 5.51 Soluzione della calibrazione probabilistica per il parametro $\beta_{03}(caso1)$.

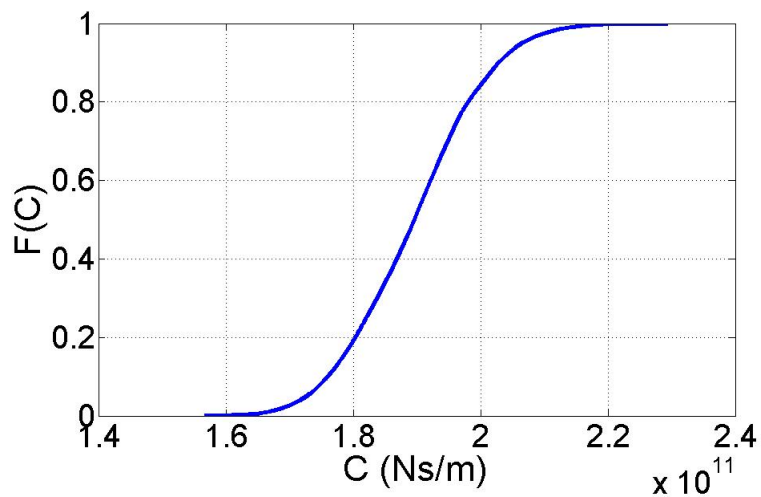


(a) Funzione di densità cumulata (CDF).

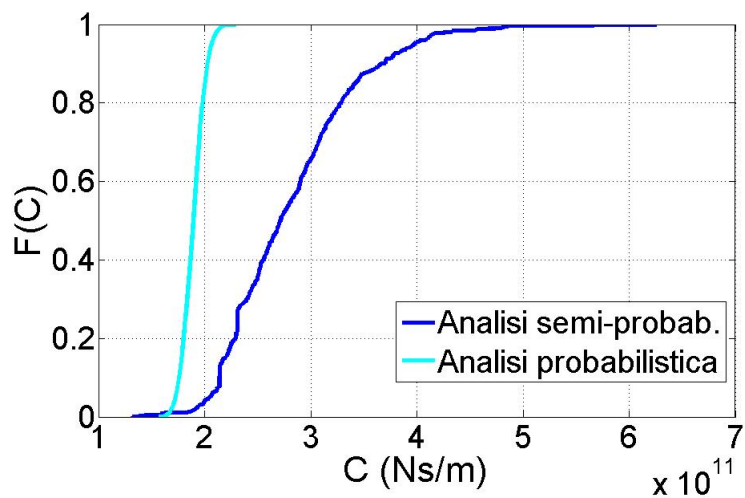


(b) Confronto tra approccio probabilistico (linea azzurra) e approccio “semi-probabilistico” (linea blu), in termini di funzioni di densità cumulate.

Figura 5.52 Soluzione della calibrazione probabilistica per il parametro $\beta_{04}(caso1)$.



(a) Funzione di densità cumulata (CDF).



(b) Confronto tra approccio probabilistico (linea azzurra) e approccio “semi-probabilistico” (linea blu), in termini di funzioni di densità cumulate.

Figura 5.53 Soluzione della calibrazione probabilistica per il parametro C (caso 1).

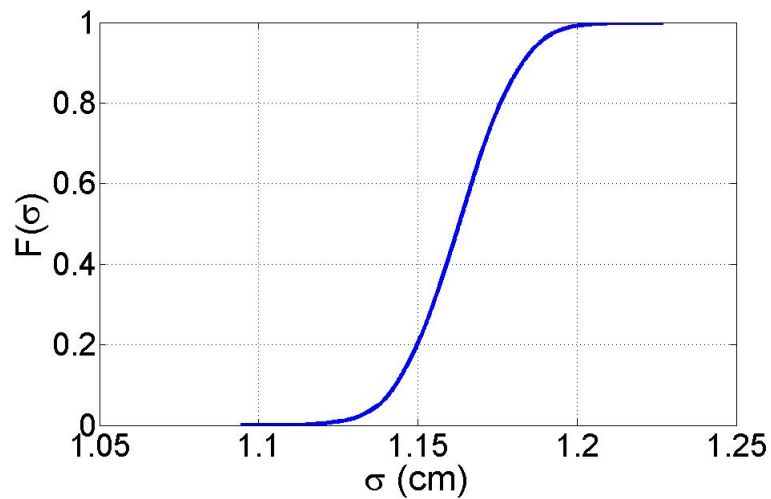


Figura 5.54 Soluzione della calibrazione probabilistica per il parametro σ , in termini di funzione di densità cumulata (CDF) (caso 1).

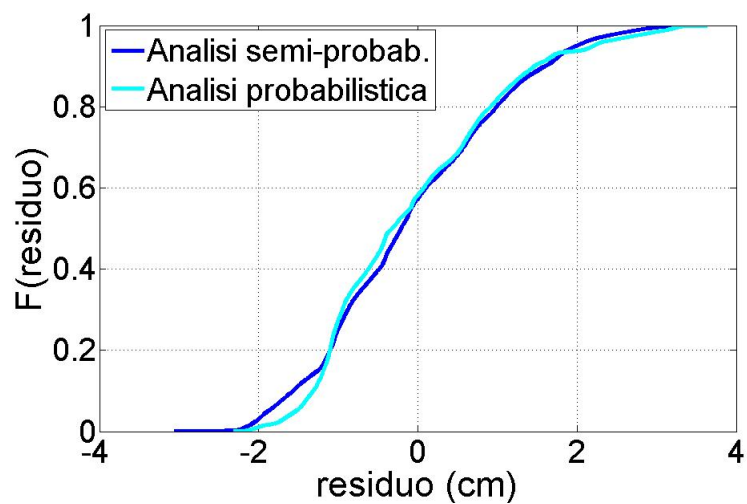


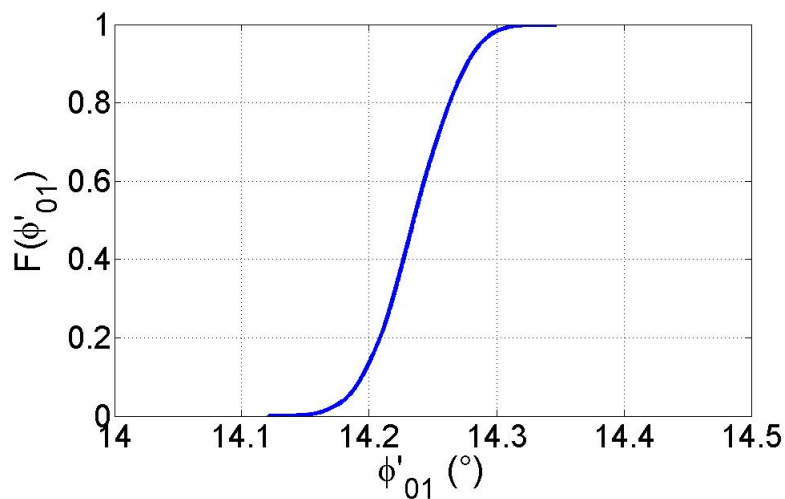
Figura 5.55 Funzione di densità cumulata (CDF) dei residui. Confronto tra approccio probabilistico (linea azzurra) e approccio "semi-probabilistico" (linea blu) (caso 1).

Statistiche	v_{01} [cm/g.]	v_{02} [cm/g.]	v_{03} [cm/g.]	v_{04} [cm/g.]	β_{01} [adim]	β_{02} [adim]	β_{03} [adim]	β_{04} [adim]	C [N · s/m]
Media (μ)	0,0041	0,0161	0,0064	0,0068	0,5501	0,5817	0,5888	0,6120	1, 89 · 10 ¹¹
Dev. St. (σ)	0,0039	0,0114	0,0053	0,0046	0,0038	0,0112	0,0055	0,0048	1, 03 · 10 ¹⁰
Coefficiente di Variazione	0,9438	0,7051	0,8288	0,6795	0,0069	0,0193	0,0093	0,0079	0,0547

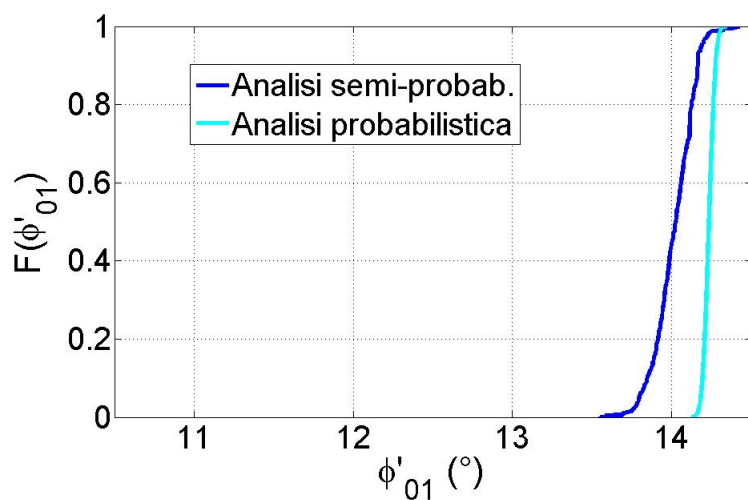
Tabella 5.7 Statistiche relative ai parametri del modello, ottenute dalla calibrazione probabilistica (caso 1).

Parametri	v_{01}	v_{02}	v_{03}	v_{04}	β_{01}	β_{02}	β_{03}	β_{04}	C
v_{01}	1	0,09	0,05	0,21	-0,96	-0,10	-0,05	-0,23	-0,01
v_{02}		1	-0,01	0,10	0,02	-0,99	0,24	0,07	0,49
v_{03}			1	0,15	-0,05	0,00	-0,87	-0,17	0,00
v_{04}				1	-0,14	-0,09	0,00	-0,93	0,30
β_{01}					1	0,00	0,16	0,25	0,25
β_{02}						1	-0,20	-0,06	-0,44
β_{03}							1	0,17	0,47
β_{04}								1	0,04
C									1

Tabella 5.8 Matrice di correlazione dei parametri, ottenuta dalla calibrazione probabilistica (caso 1).

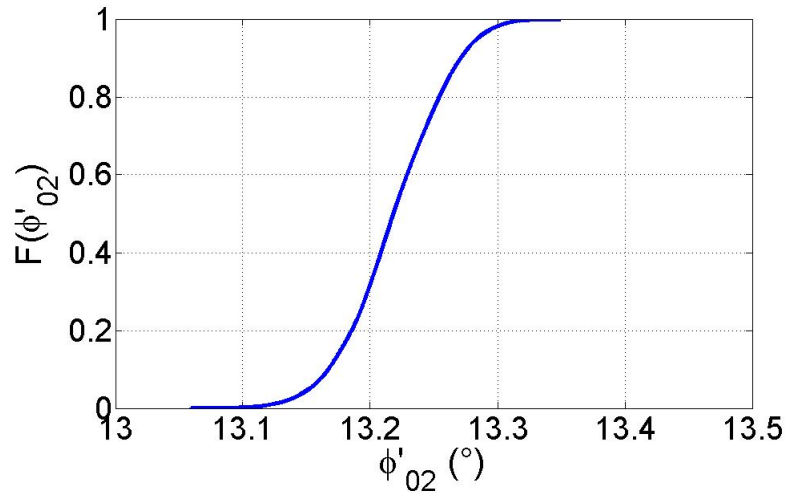


(a) Funzione di densità cumulata (CDF).

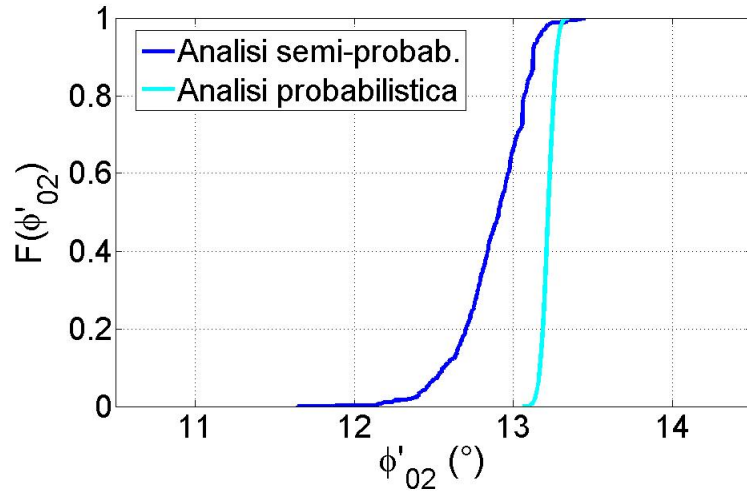


(b) Confronto tra approccio probabilistico (linea azzurra) e approccio “semi-probabilistico” (linea blu), in termini di funzioni di densità cumulate.

Figura 5.56 Soluzione della calibrazione probabilistica per il parametro ϕ'_{01} (caso 1).

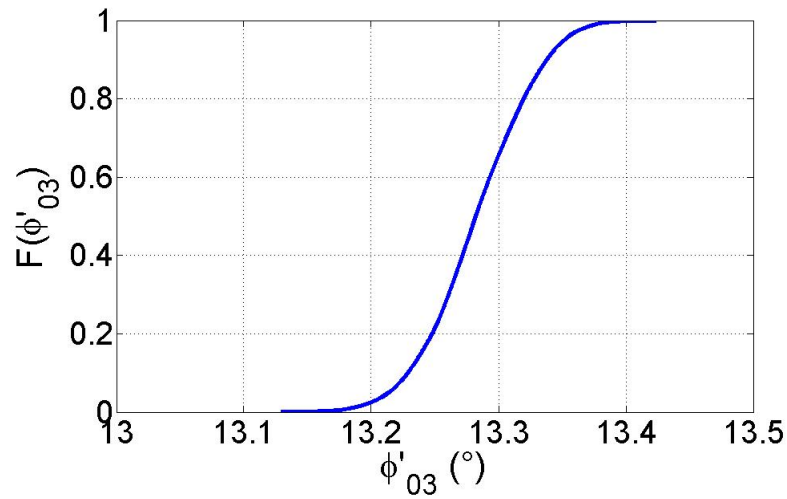


(a) Funzione di densità cumulata (CDF).

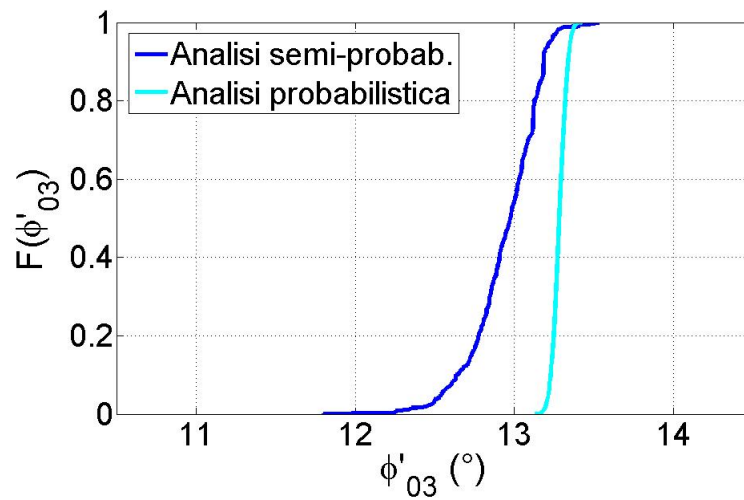


(b) Confronto tra approccio probabilistico (linea azzurra) e approccio "semi-probabilistico" (linea blu), in termini di funzioni di densità cumulate.

Figura 5.57 Soluzione della calibrazione probabilistica per il parametro ϕ'_{02} (caso 1).

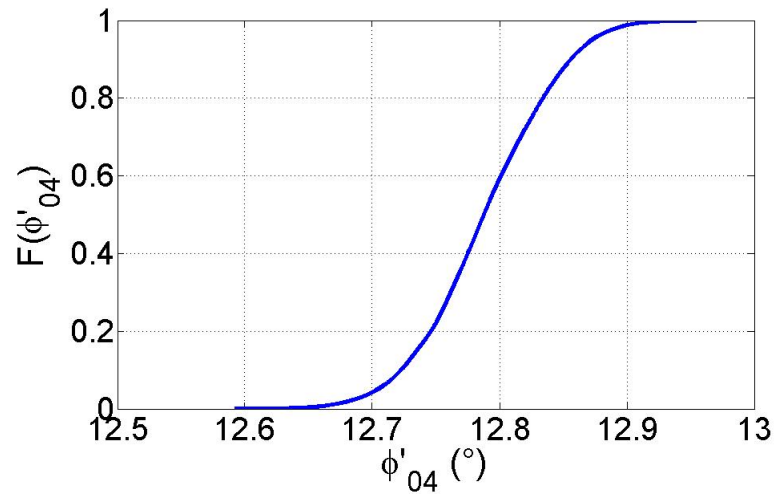


(a) Funzione di densità cumulata (CDF).

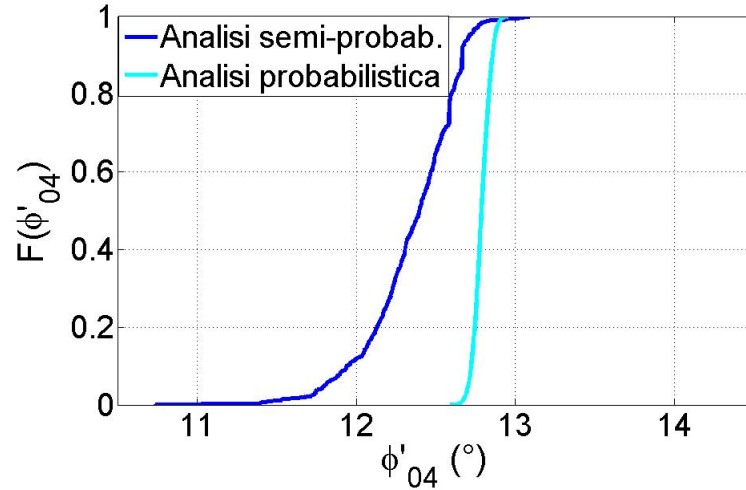


(b) Confronto tra approccio probabilistico (linea azzurra) e approccio “semi-probabilistico” (linea blu), in termini di funzioni di densità cumulate.

Figura 5.58 Soluzione della calibrazione probabilistica per il parametro $\phi'_{03}(caso1)$.



(a) Funzione di densità cumulata (CDF).



(b) Confronto tra approccio probabilistico (linea azzurra) e approccio "semi-probabilistico" (linea blu), in termini di funzioni di densità cumulate.

Figura 5.59 Soluzione della calibrazione probabilistica per il parametro $\phi'_{04}(casol)$.

In figura 5.60 sono riportate le previsioni del modello ottenute con la soluzione probabilistica, confrontate con i dati osservati. L'andamento dell'errore nel tempo ed il suo grado di dispersione sono meglio visibili in figura 5.61, dove sono riportate la media e la deviazione standard dei residui.

5.4.2 Caso 2: matrice di covarianza dei residui nota

Nel secondo caso è stata introdotta l'informazione circa la matrice di covarianza dei residui, ottenuta dall'analisi "semi-probabilistica". In particolare, è stata presa in considerazione la matrice diagonale, il che significa considerare la varianza dell'errore variabile nel tempo ma indipendente da giorno a giorno. La funzione di verosimiglianza è stata allora definita nel seguente modo, come peraltro già accennato nel paragrafo 3.3.1:

$$f(\mathbf{d}_{obs}|\mathbf{m}, \mathbf{f}) \propto \exp \left[-\frac{1}{2} (\mathbf{d}_{obs} - \mathbf{f}(\mathbf{m}))^T (\Sigma_{\Delta \mathbf{d}})^{-1} (\mathbf{d}_{obs} - \mathbf{f}(\mathbf{m})) \right] \quad (5.7)$$

dove $(\mathbf{d}_{obs} - \mathbf{f}) = \Delta \mathbf{d}$ e $\Sigma_{\Delta \mathbf{d}}$ sono rispettivamente il vettore e la matrice di covarianza dei residui (in questo caso diagonale).

La probabilità a priori e la distribuzione di proposta sono state definite alla stessa maniera del caso 1. Anche in questa analisi, facendo ricorso all'algoritmo Metropolis-Hastings, è stato possibile effettuare il campionamento della funzione a posteriori. I risultati delle simulazioni fino ad ora ottenuti, riportati nelle figure 5.62-5.70, mostrano come la condizione di convergenza non possa essere ritenuta raggiunta, in quanto i termini v_{01} e v_{02} sono ancora lontani dalla condizione di stazionarietà, nonostante si siano già eseguiti circa 13.000.000 di campionamenti. Per poter stimare le statistiche dei parametri del modello è necessario, allora, proseguire le simulazioni: lo sforzo computazionale richiesto da questa analisi risulta, pertanto, molto oneroso.

Statistiche	ϕ'_{01} [°]	ϕ'_{02} [°]	ϕ'_{03} [°]	ϕ'_{04} [°]
Media (μ)	14,2354	13,2190	13,2830	12,7889
Dev. St. (σ)	0,0317	0,0402	0,0420	0,0514
Coefficiente di Variazione	0,0022	0,0030	0,0032	0,0040

Tabella 5.9 Statistiche relative all'angolo di attrito mobilitato, ottenute dalla calibrazione probabilistica (caso 1).

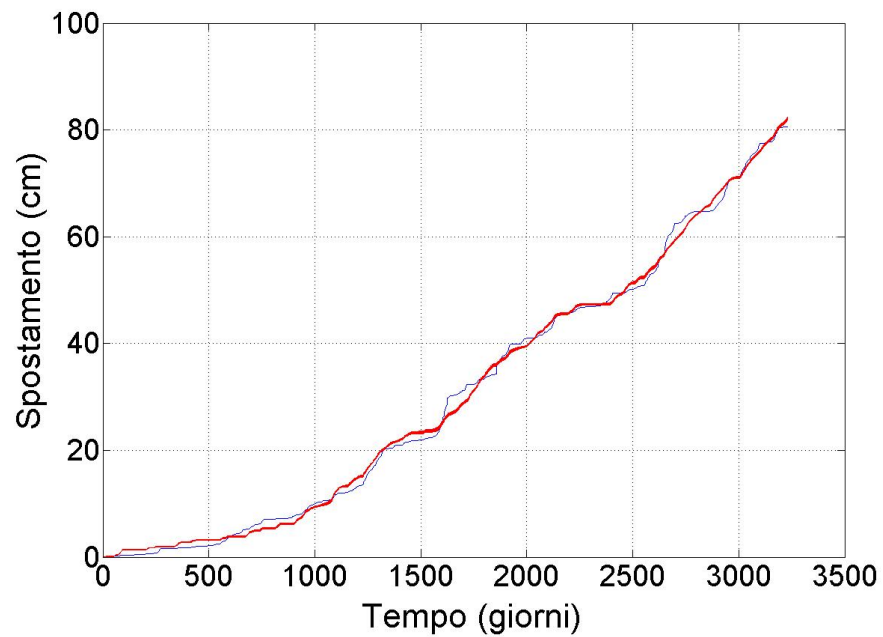
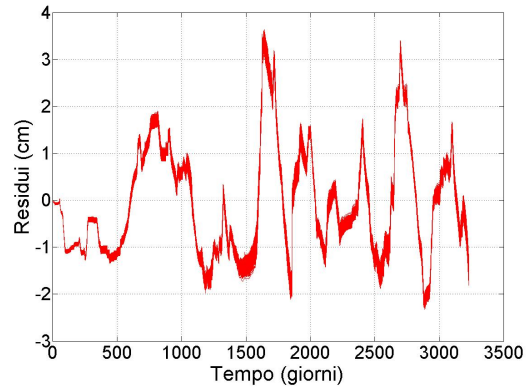
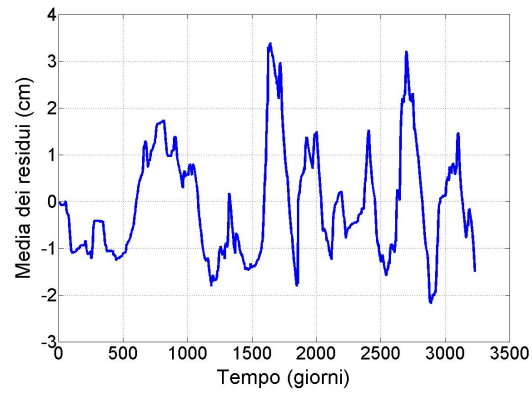


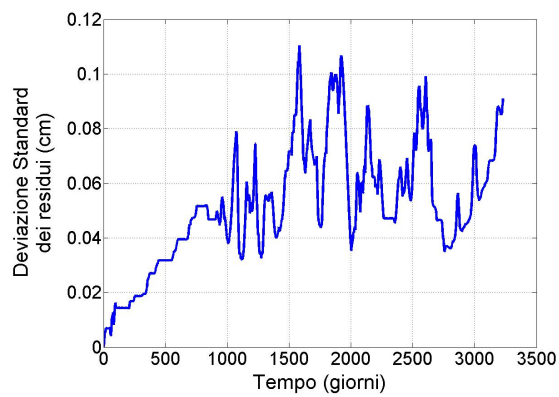
Figura 5.60 Confronto tra gli spostamenti misurati (linea blu) e le previsioni del modello (linee rosse) ottenute con la soluzione probabilistica (caso 1).



(a) Andamento dei residui nel tempo.



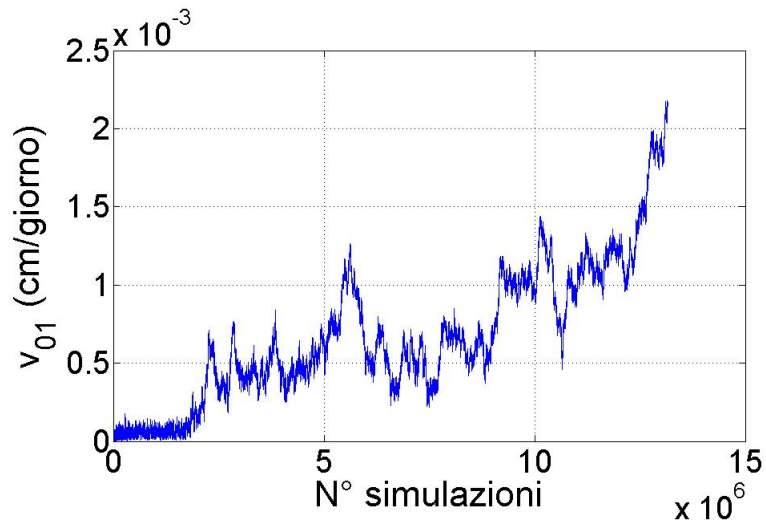
(b) Media dei residui nel tempo.



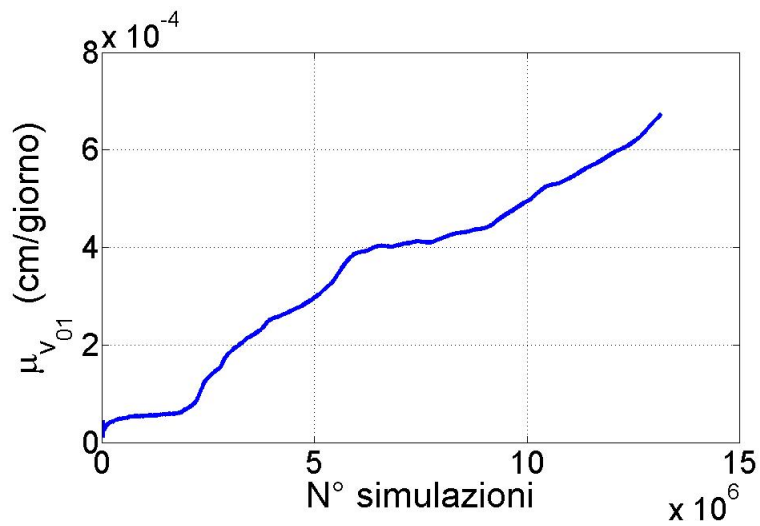
(c) Deviazione standard dei residui nel tempo.

Figura 5.61 Statistiche ed andamento dell'errore del modello nel tempo, ottenuti dalla calibrazione probabilistica (caso 1).

Da questo secondo caso è possibile, comunque, trarre delle conclusioni. Dalle figure 5.62-5.70(a) si nota, infatti, come la variabilità dei parametri sia sensibilmente minore rispetto al primo caso di studio (cfr. figure 5.35-5.43(a)), implicando una riduzione dell'incertezza nella definizione di questi termini. Ciò è dovuto all'introduzione di una ulteriore forma di informazione (ovvero la matrice di covarianza dei residui) e dimostra la rigorosità del metodo: maggiore è l'informazione disponibile, maggiore è l'accuratezza e l'affidabilità nella definizione della soluzione, in quanto minore è il suo grado di incertezza.

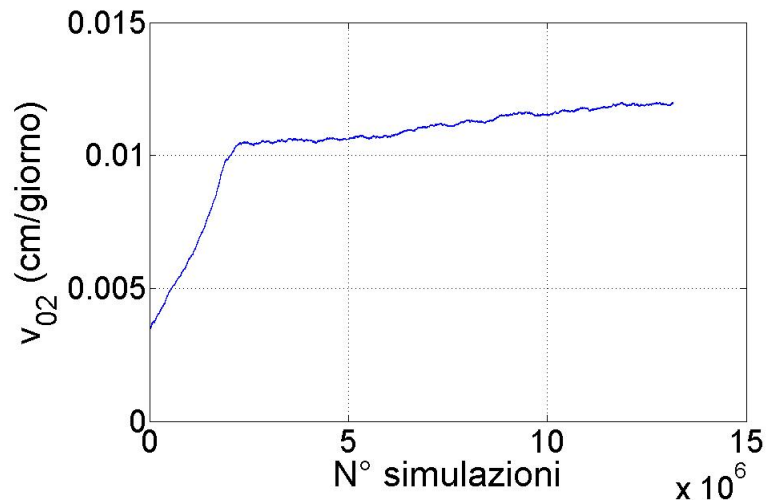


(a) Sequenza dei valori campionati durante la simulazione.

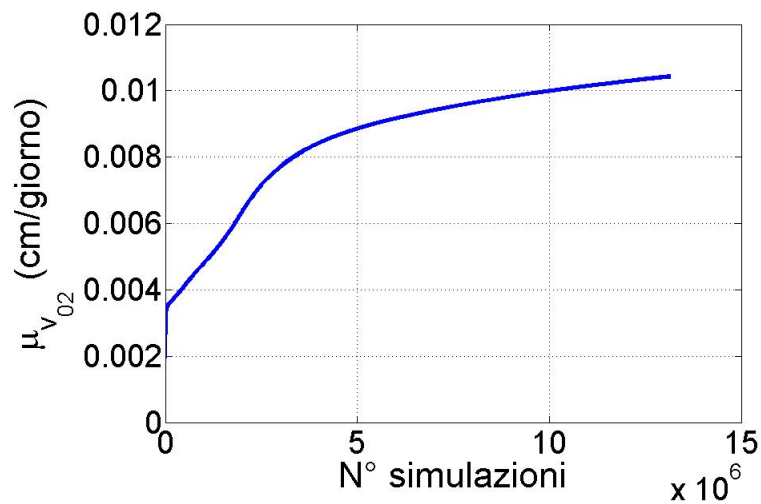


(b) Sequenza dei valori della media durante la simulazione.

Figura 5.62 Campionamento del parametro v_{01} , mediante il metodo MCMC basato sull'algoritmo Metropolis-Hastings (caso 2).

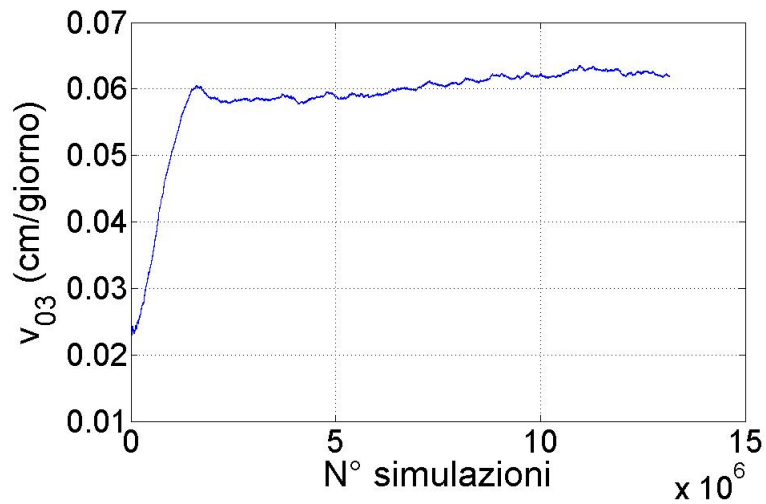


(a) Sequenza dei valori campionati durante la simulazione.

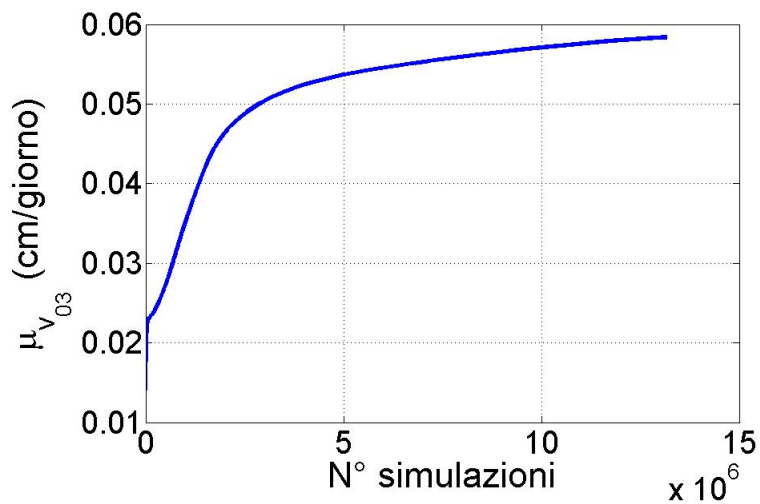


(b) Sequenza dei valori della media durante la simulazione.

Figura 5.63 Campionamento del parametro v_{02} , mediante il metodo MCMC basato sull'algoritmo Metropolis-Hastings (caso 2).

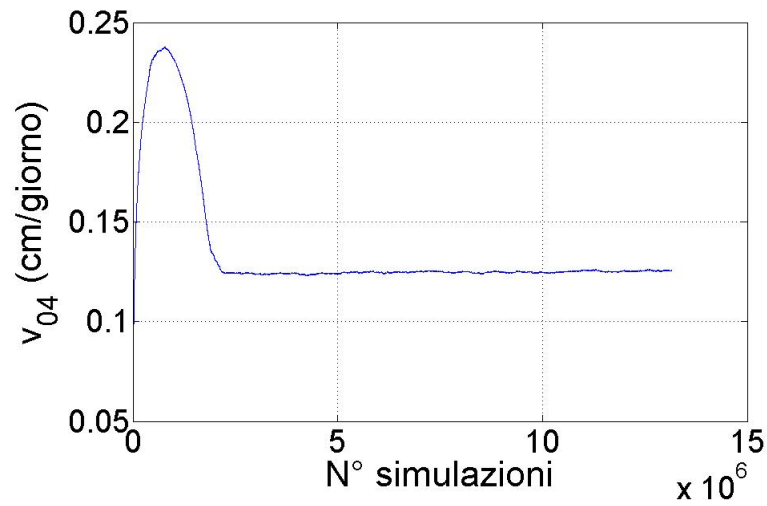


(a) Sequenza dei valori campionati durante la simulazione.

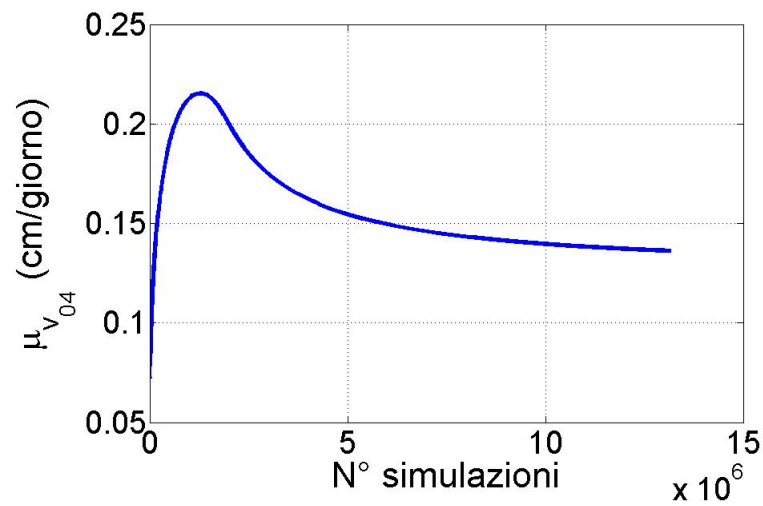


(b) Sequenza dei valori della media durante la simulazione.

Figura 5.64 Campionamento del parametro v_{03} , mediante il metodo MCMC basato sull'algoritmo Metropolis-Hastings (caso 2).

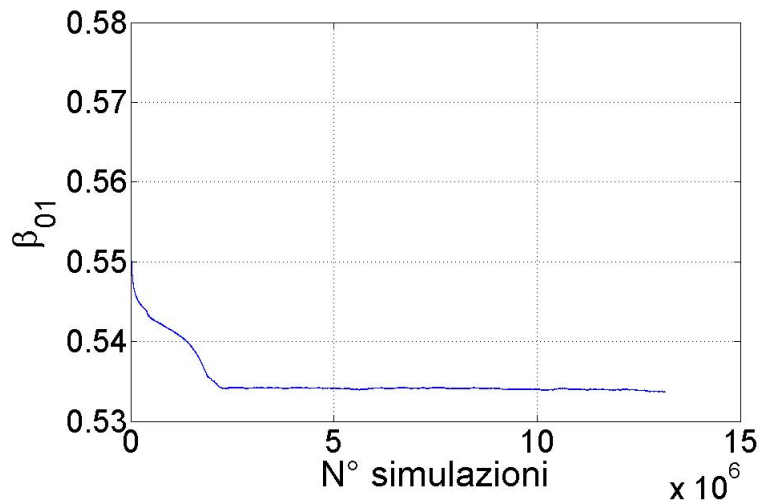


(a) Sequenza dei valori campionati durante la simulazione.

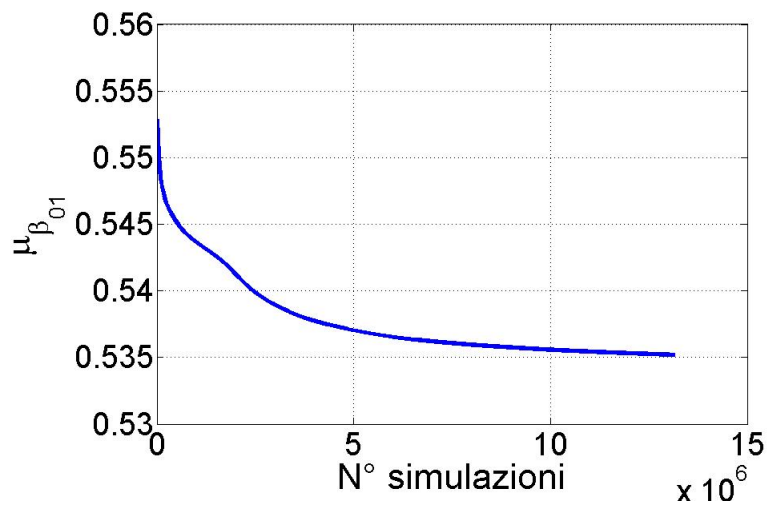


(b) Sequenza dei valori della media durante la simulazione.

Figura 5.65 Campionamento del parametro v_{04} , mediante il metodo MCMC basato sull'algoritmo Metropolis-Hastings (caso 2).

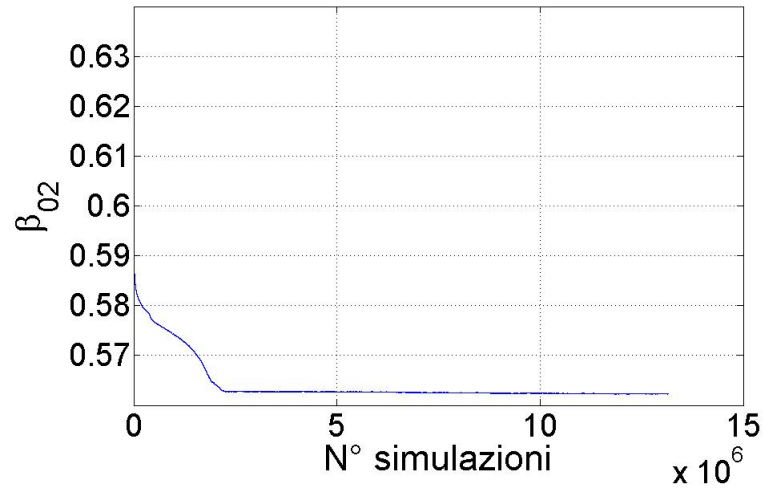


(a) Sequenza dei valori campionati durante la simulazione.

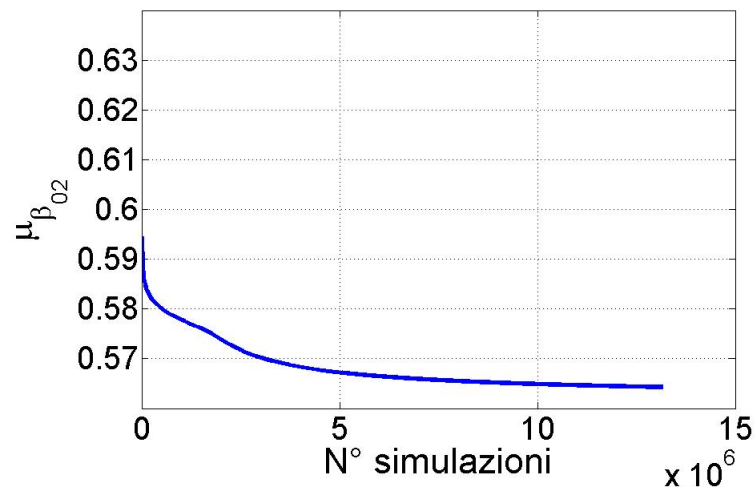


(b) Sequenza dei valori della media durante la simulazione.

Figura 5.66 Campionamento del parametro β_{01} , mediante il metodo MCMC basato sull'algoritmo Metropolis-Hastings (caso 2).

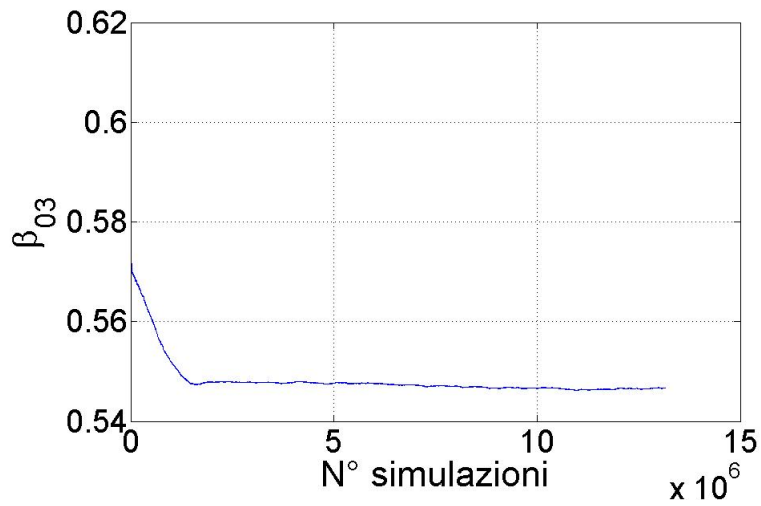


(a) Sequenza dei valori campionati durante la simulazione.

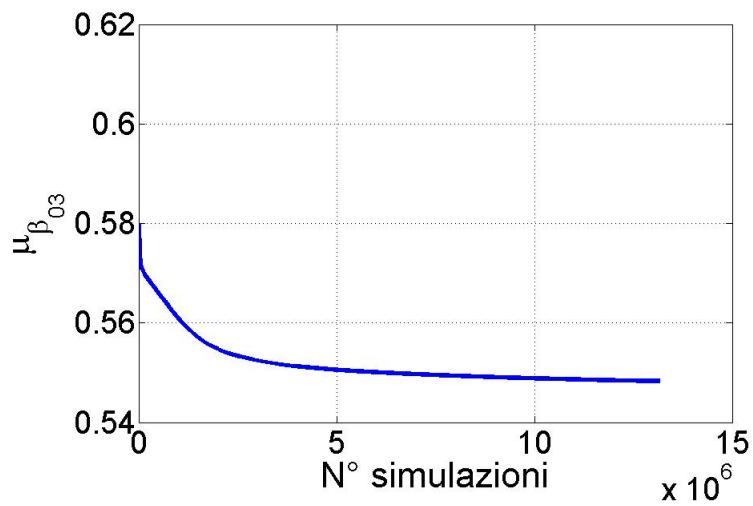


(b) Sequenza dei valori della media durante la simulazione.

Figura 5.67 Campionamento del parametro β_{02} , mediante il metodo MCMC basato sull'algoritmo Metropolis-Hastings (caso 2).

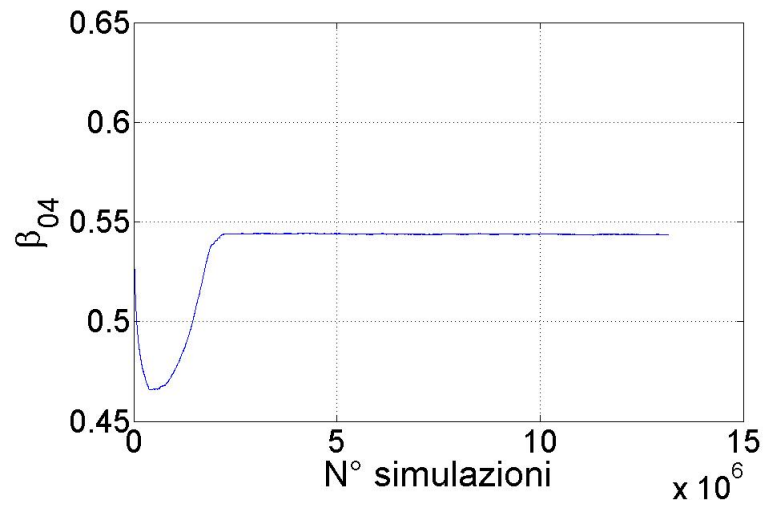


(a) Sequenza dei valori campionati durante la simulazione.

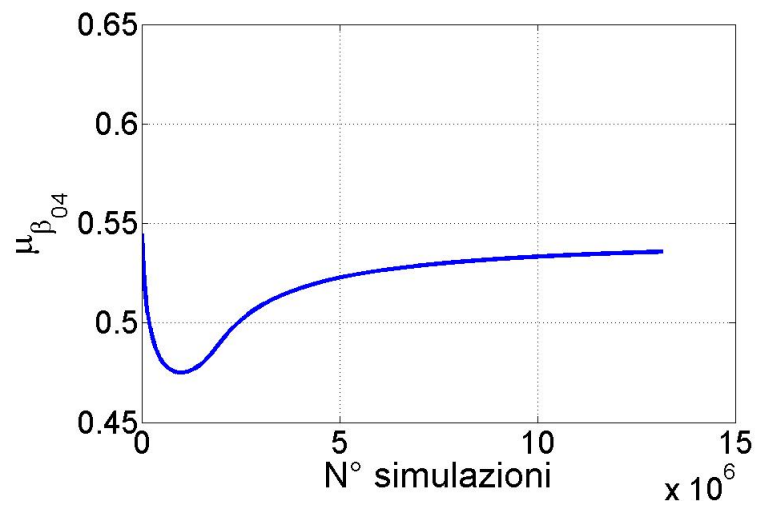


(b) Sequenza dei valori della media durante la simulazione.

Figura 5.68 Campionamento del parametro β_{03} , mediante il metodo MCMC basato sull'algoritmo Metropolis-Hastings (caso 2).

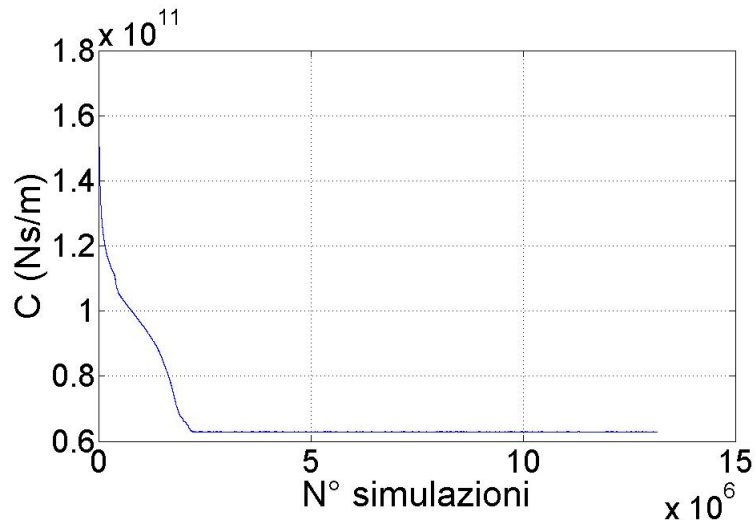


(a) Sequenza dei valori campionati durante la simulazione.

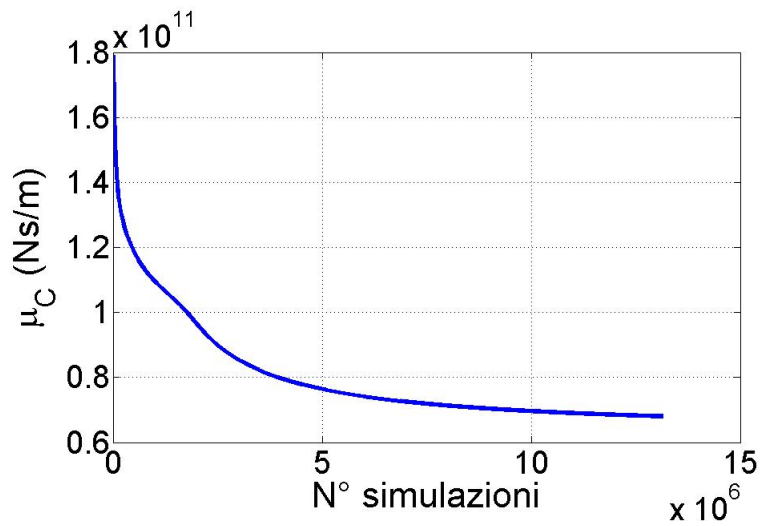


(b) Sequenza dei valori della media durante la simulazione.

Figura 5.69 Campionamento del parametro β_{04} , mediante il metodo MCMC basato sull'algoritmo Metropolis-Hastings (caso 2).



(a) Sequenza dei valori campionati durante la simulazione.



(b) Sequenza dei valori della media durante la simulazione.

Figura 5.70 Campionamento del parametro C , mediante il metodo MCMC basato sull'algoritmo Metropolis-Hastings (caso 2).

Osservazioni Conclusive

Nel presente lavoro è stata illustrata una nuova metodologia di analisi dei movimenti di versante di tipo viscoso, da inserirsi all'interno del processo di gestione del rischio frane. In particolare, lo studio ha riguardato la messa a punto di un modello analitico dinamico, capace di simulare il comportamento di questa tipologia di fenomeni gravitativi, caratterizzati da movimenti lenti e periodici, in quanto fortemente legati al regime pluviometrico. Per illustrare l'applicabilità di tale metodologia è stato introdotto un caso di studio ben noto in letteratura, ovvero la frana di Alverà, situata in località Cortina d'Ampezzo, per la quale si dispone di un ricco e dettagliato *database* di monitoraggio.

La calibrazione del modello è stata effettuata mediante un approccio di tipo probabilistico, basato sull'applicazione del teorema di Bayes. Esso prevede la combinazione di due sorgenti di informazione: la prima concerne la conoscenza a priori circa i parametri del modello (probabilità a priori), la seconda l'informazione ottenibile da una nuova osservazione (funzione di verosimiglianza); il risultato coincide con la soluzione probabilistica al problema inverso (probabilità a posteriori). L'integrazione di quest'ultima è stata ottenuta attraverso una tecnica numerica basata sul metodo *Markov Chain Monte Carlo* e sull'algoritmo Metropolis-Hastings, che ha richiesto sforzi computazionali abbastanza rilevanti.

Una prima analisi, denominata "semi-probabilistica", ha permesso di avere una iniziale conoscenza circa i due elementi della formula-

zione Bayesiana: la probabilità a priori e la funzione di verosimiglianza. Successivamente è stata eseguita la vera e propria calibrazione probabilistica, con riferimento a due casi che si differenziano per il diverso livello di informazione considerato.

Nel primo caso si è introdotta la conoscenza disponibile sulla probabilità a priori, ma non quella sulla funzione di verosimiglianza. La soluzione probabilistica ottenuta ha portato, comunque, ad una descrizione completa dei parametri del modello, rappresentata dalle loro distribuzioni di probabilità marginali e dalla loro struttura di correlazione. Inoltre, l'analisi ha permesso di descrivere l'errore del modello in termini statistici, attraverso la sua distribuzione di probabilità, consentendo di associare alle previsioni un grado di incertezza. Ciò risulta fondamentale, soprattutto quando il modello è utilizzato come strumento previsionale nell'ambito del processo di analisi del rischio.

Nel secondo caso, invece, è stata introdotta anche la conoscenza sulla funzione di verosimiglianza. Per questa analisi il metodo ha richiesto uno sforzo computazionale notevole. La condizione di convergenza non è stata ancora raggiunta e sono necessari ulteriori campionamenti. Nonostante, quindi, non sia stato possibile eseguire l'inferenza statistica sui parametri del modello, si è potuto comunque osservare come l'introduzione di un'altra sorgente di informazione implichi una riduzione della variabilità dei parametri. Una volta arrivati alla condizione di stazionarietà, si otterrà, pertanto, una definizione della soluzione più accurata ed affidabile, in quanto caratterizzata da una minore incertezza. Ciò dimostra la forza di tale approccio, che tiene in considerazione, in maniera rigorosa ed ottimale, di tutte le informazioni disponibili riguardo lo studio di un particolare fenomeno.

Gli sviluppi futuri della ricerca sono una conseguenza diretta dei vantaggi di una simile metodologia. Al contrario del classico approccio di tipo deterministico, l'informazione ottenuta circa la forma della

distribuzione di probabilità dei parametri e la loro matrice di covarianza può essere esportata, come informazione a priori, ad un altro caso di frana, per cui un ulteriore studio può riguardare l'estensione del metodo ad altri siti monitorati, senza la necessità di avere una quantità di registrazioni elevata come il caso qui preso in esame. Questo metodo di aggiornamento statistico dei dati consentirà di migliorare la definizione e la conoscenza del modello.

Un altro importante vantaggio di questo approccio riguarda la possibilità di indagare la bontà del modello considerato, in termini di eventuale presenza di errori sistematici e di incertezza legata alle previsioni. Ciò potrà consentire, in studi futuri, di confrontare diversi modelli di analisi, in una maniera quantitativa e rigorosa.

Bibliografia

- [1] AA. VV. (2000). *Landslide risk concepts and guidelines*. Australian Geomechanics Society, Sub-Committee on Landslide Risk Management.
- [2] Aleotti P., Chowdhury R. (1999). *Landslide hazard assessment: summary review and new perspectives*. Bulletin of Engineering Geology and the Environment, Springer-Verlag, Vol. 58, pp. 21-44.
- [3] Aleotti P., Polloni G. (2005). *Valutazione e mitigazione del rischio frane*. Hevelius Edizioni.
- [4] Angeli M.G., Gasparetto P., Menotti R.M., Pasuto A., Silvano S. (1996). *A visco-plastic model for slope analysis applied to a mudslide in Cortina d'Ampezzo, Italy*. Quarterly Journal of Engineering Geology, The Geological Society, Vol. 29, 233-240.
- [5] Angeli M.G., Buma J., Gasparetto P., Pasuto A. (1998). *A combined hillslope hydrology/stability model for low-gradient clay slopes in the Italian Dolomites*. Engineering Geology, Elsevier, Vol. 49, pp. 1-13.
- [6] Angeli M.G., Pasuto A., Silvano S. (1999). *Towards the definition of slope instability behaviour in the Alverà mudslide (Cortina d'Ampezzo, Italy)*. Geomorphology, Elsevier, Vol. 30, pp. 201-211.

- [7] Baecher G.B., Christian J.T. (2003). *Reliability and Statistics in Geotechnical Engineering*. John Wiley & Sons, 2003.
- [8] Butterfield R. (2000). *A dynamic model of shallow slope motion driven by fluctuating groundwater levels*. Proceedings of the 8th International Symposium on Landslides, Thomas Telford, London, Vol. 1, pp. 203-208, Cardiff, UK.
- [9] Calvello M., Cascini L., Sorbino G. (2008). *A numerical procedure for predicting rainfall-induced movements of active landslides along pre-existing slip surfaces*. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, Wiley InterScience, Vol. 32, pp. 327-351.
- [10] Canuti P., Casagli N. (1997). *Previsione e prevenzione del rischio da frana*. Atti del Convegno “La stabilità del suolo in Italia: zonazione sismica-frane”, Accademia Nazionale dei Lincei, Roma 30-31 maggio 1996, pp. 46-58.
- [11] Catenacci V. (1992). *Il dissesto geologico e geoambientale in Italia dal dopoguerra al 1990*. Memorie Descrittive della Carta Geologica d’Italia, Servizio Geologico Nazionale, 47, 301 pp.
- [12] Chowdhury R., Flentje P. (2003). *Role of slope reliability analysis in landslide risk management*. Bulletin of Engineering Geology and the Environment, Springer-Verlag, Vol. 62, pp. 41-46.
- [13] Clerc M. (1999). *The swarm and the queen: towards a deterministic and adaptive particle swarm optimization*. Proceedings 1999 Congress on Evolutionary Computation, Washington, DC, pp. 1951-1957.
- [14] Clerc M., Kennedy J. (2002). *The particle swarm - explosion, stability, and convergence in a multidimensional complex space*. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, pp. 58-73.

- [15] Congdon P. (2007). *Bayesian Statistical Modelling*. John Wiley & Sons, 2007.
- [16] Corominas J., Moya J., Ledesma A., Lloret A., Gili J.A. (2005). *Prediction of ground displacements and velocities from groundwater level changes at the Vallcebre landslide (Eastern Pyrenees, Spain)*. Landslides, Springer-Verlag, Vol. 2, pp. 83-96.
- [17] Dai F.C., Lee C.F., Ngai Y.Y. (2002). *Landslide risk assessment and management: an overview*. Engineering Geology, Elsevier, Vol. 64, pp. 65-87.
- [18] Dale A.I. (1999). *A History of Inverse Probability. From Thomas Bayes to Karl Pearson*. Springer Texts, 1999.
- [19] Davis R.O., Desai C.S., Smith N.R. (1993). *Stability of motions of translational landslides*. Journal of Geotechnical Engineering, ASCE, Vol. 119(3), pp. 420-432.
- [20] Deganutti A.M., Gasparetto P. (1992). *Some aspects of a mudslide in Cortina, Italy*. Proceedings of the 6th International Symposium on Landslides, Balkema, Rotterdam, Vol. 1, pp. 373-378, Christchurch, New Zealand.
- [21] Desai C.S., Samtani N.C., Vulliet L. (1995). *Constitutive modeling and analysis of creeping slopes*. Journal of Geotechnical Engineering, ASCE, Vol. 121(1), pp. 43-56.
- [22] Eberhart R.C., Kennedy J. (1995). *A new optimizer using particle swarm theory*. Proceedings of the 6th International Symposium on Micro Machine and Human Science, Nagoya, Japan, pp. 39-43.
- [23] Eberhart R.C., Shi Y. (1998). *Comparison between genetic algorithms and particle swarm optimization*. In V. W. Porto,

- N. Saravanan, D. Waagen, and A. E. Eiben, Eds. Evolutionary Programming VII: Proc. 7th Ann. Conf. on Evolutionary Programming Conf., San Diego, CA. Berlin: Springer-Verlag.
- [24] Eberhart R.C., Shi Y. (2001). *Particle swarm optimization: developments, applications and resources*. IEEE International Conference on Evolutionary Computation, Seoul, Korea, pp. 81-86.
- [25] Einstein H.H. (1998). *Special lecture: landslide risk assessment procedure*. Proc. V Int. Symp. on Landslides, Lausanne, Vol. 2, pp. 1075-1090.
- [26] Einstein H.H., Karam K.S. (2001). *Risk assessment and uncertainties*. In Proc. of the International Conference on Landslides: causes, impact and countermeasures, Davos, 17-21 June, 2001, pp. 457-488.
- [27] Fell R. (1994). *Landslide risk assessment and acceptable risk*. Canadian Geotechnical Journal, Vol. 31, pp. 261-274.
- [28] Fell R., Hartford D. (1997). *Landslide risk management*. Proc. of the International workshop on landslides risk assessment (Cruden and Fell eds.), Honolulu, 19-21 February 1997, Balkema Rotterdam, pp. 51-110.
- [29] Ferlisi S. (2004). *simple mechanical model for the interpretation of translational active landslides involving detrital covers*. Atti del IX International Symposium on Landslides, Lacerda, Ehrlich, Fontoura & Sayão (eds.), Vol. 2, pp. 1227-1232.
- [30] Gasparetto P., Mosselman M., Van Asch T.W.J. (1996). *The mobility of the Alverà landslide (Cortina d'Ampezzo, Italy)*. Geomorphology, Elsevier, Vol. 15, pp. 327-335.

-
- [31] Gentle J.E., Härdle W., Mori Y. (2004). *Handbook of Computational Statistics. Concepts and Methods*. Springer Texts, 2004.
- [32] Gottardi G., Butterfield R. (2001). *Modelling ten years of downhill creep data*. Proceedings of the 15th International Conference on Soil Mechanics and Geotechnical Engineering, Istanbul, Turkey, 27-31 August 2001. Volumes 1-3.
- [33] Guzzetti F., Cardinali M., Reichenbach P. (1994). *The AVI Project: A bibliographical and archive inventory of landslides and floods in Italy*. Environmental Management, Vol. 18(4), pp. 623-633.
- [34] Guzzetti F. (2000). *Landslide fatalities and the evaluation of landslide risk in Italy*. Engineering Geology, Elsevier, Vol. 58, pp. 89-107.
- [35] Kennedy J., Eberhart R.C. (1995). *Particle swarm optimization*. Proc. IEEE Int'l. Conf. on Neural Networks, Vol. 4, pp. 1942-1948.
- [36] Kennedy J., Eberhart R.C. (1997). *A discrete binary version of the particle swarm algorithm*. Proc. 1997 Conf. on Systems, Man and Cybernetics, pp. 4104-4109.
- [37] Kennedy J., Eberhart R.C., Shi Y. (2001). *Swarm Intelligence*. Morgan Kaufmann Publishers, San Francisco.
- [38] Kvalstad K.J., Nadim F., Kaynia A.M., Mokkelbost K.H., Bryn P. (2005). *Soil conditions and slope stability in the Ormen Lange area*. Marine and Petroleum Geology, Elsevier, Vol. 22, pp. 299-310.
- [39] Lee E.M., Jones D.K.C. (2004). *Landslide Risk Assessment*. Thomas Telford, 2004.

- [40] Martinez W.L., Martinez A.R. (2002). *Computational Statistics Handbook with Matlab*. Chapman & Hall/CRC, 2002.
- [41] Medina-Cetina Z. (2006). *Probabilistic calibration of a soil model*. Ph.D. Thesis, Johns Hopkins University, Baltimore, Maryland, 2006.
- [42] Nadim F., Kvalstad K.J., Guttormsen T. (2005). *Quantification of risks associated with seabed instability at Ormen Lange*. Marine and Petroleum Geology, Elsevier, Vol. 22, pp. 311-318.
- [43] Panizza M., Pasuto A., Silvano S., Soldati M. (1996). *Temporal occurrence and activity of landslides in the area of Cortina d'Ampezzo (Dolomites, Italy)*. Geomorphology, Elsevier, Vol. 15, pp. 311-326.
- [44] Press J. (2003). *Subjective and Objective Bayesian Statistics: Principles, Models, and Applications*. Wiley-Inter Science, New Jersey, 2003.
- [45] Robert C.P. (2007). *The Bayesian Choice: From Decision-Theoretic Foundations to Computational Implementation*. Springer Texts in Statistics, 2007.
- [46] Shi Y., Eberhart R.C. (1998). *A modified particle swarm optimizer*. Proceedings of the IEEE International Conference on Evolutionary Computation, pp. 69-73.
- [47] Shi Y., Eberhart R.C. (2001). *Particle swarm optimization with fuzzy adaptive inertia weight*. Proceedings of the Workshop on Particle Swarm Optimization. Indianapolis, IN: Purdue School of Engineering and Technology.
- [48] Tarantola A. (2005). *Inverse Problem Theory and Methods for Model Parameter Estimation*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, USA, 2005.

-
- [49] Turner A.K., Schuster R.L. (1996). *Landslides: Investigation and Mitigation*. Special Report 247, Transportation Research Board, National Research Council, 1996.
- [50] Van Asch T.W.J., Van Beek L.P.H., Bogaard T.A. (2007). *Problems in predicting the mobility of slow-moving landslides*. Engineering Geology, Elsevier, Vol. 91, pp. 46-55.
- [51] Van Beek L.P.H., Van Asch T.W.J. (2004). *Regional assessment of the effects of land-use change on landslide hazard by means of physically based modelling*. Natural Hazards, Kluwer Academic Publishers, Vol. 31, pp. 289-304.
- [52] Varnes D.J. and The International Association of Engineering Geology Commission on Landslides and Other Mass Movements (1984). *Landslide hazard zonation: A review of principles and practice*. Natural Hazards, Vol. 3, Paris, France, UNESCO, 63pp.
- [53] Vulliet L., Hutter K. (1988). *Viscous-type sliding laws for landslides*. Canadian Geotechnical Journal, Vol. 25, pp. 467-477.
- [54] Vulliet L., Hutter K. (1988). *Set of constitutive models for solid under slow movements*. Journal of Geotechnical Engineering, ASCE, Vol. 114(9), pp. 1022-1041.
- [55] Vulliet L., Hutter K. (1988). *Continuum models for natural slopes in slow movements*. Géotechnique, Thomas Telford, London, Vol. 38(2), pp. 199-217.
- [56] Yang C., Simon D. (2005). *A new particle swarm optimization technique*. Proceedings of the 18th International Conference on Systems Engineering, IEEE Computer Society, Washington, DC, USA, pp. 164-169.