

Università degli Studi di Parma
Facoltà di Ingegneria

Dottorato di Ricerca in Ingegneria Civile
(XVI Ciclo)

Andrea Maranzoni

Modellazione numerica e fisica di moti bidimensionali a pelo libero

Dissertazione per il conseguimento del titolo di Dottore di Ricerca

Tutore: Prof. Ing. Paolo Mignosa
Coordinatore del Dottorato: Prof. Ing. Paolo Mignosa

Parma, Gennaio 2004

L'ultimo passo della ragione è di riconoscere
che c'è un'infinità di cose che la sorpassano.

B. PASCAL

Indice

Introduzione	1
1 Le equazioni di base	5
1.1 Le equazioni bidimensionali alle acque basse	5
1.2 Le proprietà delle equazioni	8
1.2.1 Struttura caratteristica e iperbolicità delle equazioni	8
1.2.2 Relazioni caratteristiche	10
1.2.3 Il problema di Riemann bidimensionale	15
1.2.4 L'invarianza rotazionale	25
1.3 Il trasporto di scalari passivi	25
2 La soluzione numerica delle equazioni	29
2.1 Il metodo ai volumi finiti	29
2.2 I modelli numerici di simulazione	33
2.2.1 Trattamento della parte omogenea	33
2.2.2 Convergenza, accuratezza e stabilità	40
2.2.3 Condizioni al contorno	43
2.2.4 Trattamento del termine sorgente	46
2.2.5 Lo schema SGM	49
2.2.6 Discretizzazione spaziale non uniforme	52
3 Validazione dei codici di calcolo	57
3.1 Confronto con casi di letteratura	57
3.1.1 Casi monodimensionali	57
3.1.2 Problema di <i>dam-break</i> circolare	65
3.1.3 Problema di implosione cilindrica	67
3.1.4 Corrente stazionaria su salto di fondo	70
3.1.5 Risalto idraulico stazionario in canale scabro	71
3.1.6 Deviazione brusca in corrente veloce	76
3.2 Confronto con casi di laboratorio	78
3.2.1 Test CADAM relativo a brusco cambiamento di direzione a 90°	79
3.2.2 Test IMPACT relativo ad ostacolo isolato	80

4 Le esperienze di laboratorio	89
4.1 L'apparato sperimentale	89
4.2 La tecnica di acquisizione	94
4.3 I risultati	101
Conclusioni	119
Bibliografia	121

Elenco delle figure

1.1	Superfici caratteristiche di flusso [104].	12
1.2	Superfici caratteristiche d'onda e conoide caratteristico [104].	13
1.3	Zona di influenza e dominio di dipendenza relativi al punto P [104].	14
1.4	Problema di <i>dam-break</i> con $h_l = 3.0$ m e $h_r = 1.0$ m: a) luogo di <i>Hugoniot</i> connesso con lo stato sinistro \mathbf{U}_l , b) luogo di <i>Hugoniot</i> connesso con lo stato destro \mathbf{U}_r , c) curva integrale connessa con lo stato \mathbf{U}_l , d) curva integrale connessa con lo stato \mathbf{U}_r . In tratteggio gli stati che non soddisfano l' <i>entropy-condition</i>	21
1.5	Costruzione della soluzione del problema di <i>dam-break</i> con $h_l = 3.0$ m e $h_r = 1.0$ m: a) coppia di <i>shocks</i> , b) <i>shock</i> sinistro e rarefazione destra, c) rarefazione sinistra e <i>shock</i> destro, d) coppia di rarefazioni. Solo il caso c) ha validità fisica.	22
1.6	Evoluzione del problema di <i>dam-break</i> : a) condizione iniziale, b) profilo di altezze d'acqua all'istante $t = \bar{t}$, c) profilo di velocità all'istante $t = \bar{t}$, d) diagramma d'onda del fenomeno nel piano (x, t) . Linee caratteristiche per i campi associati agli autovettori: e) r_{x_1} , f) r_{x_2} , g) r_{x_3}	23
2.1	Discretizzazione cartesiana <i>cell-centered</i> ai volumi finiti del dominio di calcolo: elemento tipo $C_{i,j}$ con i relativi flussi intercella.	31
2.2	Estrapolazione lineare della variabile u sui contorni intercella per $\kappa = -1$	35
2.3	Elemento quadrilatero appartenente a reticolo strutturato non cartesiano.	54
3.1	Test 1: confronto tra soluzione esatta e soluzioni numeriche.	59
3.2	Test 2: confronto tra soluzione esatta e soluzioni numeriche.	60
3.3	Test 3: confronto tra soluzione esatta e soluzioni numeriche.	61
3.4	Test 4: confronto tra soluzione esatta e soluzioni numeriche.	62
3.5	Test 5: confronto tra soluzione esatta e soluzioni numeriche.	63
3.6	Test 6: confronto tra soluzione esatta e soluzioni numeriche.	64
3.7	Problema di <i>dam-break</i> circolare: profili assiale e diagonale per altezza d'acqua e velocità all'istante $t = 0.69$ s. Risultati ottenuti dall'impiego di schemi MUSCL-Hancock con calcolo dei flussi eseguito con metodo FORCE e con solutore approssimato di Riemann HLLC. La soluzione numerica monodimensionale radiale approssima quella esatta.	66
3.8	Diagrammi tridimensionali dell'altezza idrica per problema di esplosione cilindrica: a) condizione iniziale, b) risultato ottenuto dal modello SLIC all'istante $t = 0.69$ s.	68
3.9	Diagrammi tridimensionali dell'altezza idrica per problema di implosione cilindrica ottenuti mediante modello SLIC agli istanti: a) $t = 0.2$, b) $t = 0.4$, c) $t = 1.0$	69

3.10	<i>Problema di shock-focusing: profili assiale e diagonale per altezza d'acqua e velocità all'istante $t = 1.00$. Risultati ottenuti dall'impiego di schemi MUSCL-Hancock con calcolo dei flussi eseguito con metodo FORCE e con solutore approssimato di Riemann HLLC. La soluzione numerica monodimensionale radiale approssima quella esatta.</i>	70
3.11	<i>Caso a): confronto (condotto per due metodi, uno di tipo DGM, l'altro di tipo SGM) tra soluzione di riferimento e risultati numerici per flusso monodimensionale stazionario transcritico (in presenza di risalto) su irregolarità di fondo parabolica.</i>	72
3.12	<i>Caso b): confronto (condotto per due metodi, uno di tipo DGM, l'altro di tipo SGM) tra soluzione di riferimento e risultati numerici per flusso monodimensionale stazionario transcritico (senza risalto) su irregolarità di fondo parabolica.</i>	73
3.13	<i>Caso c): confronto (condotto per due metodi, uno di tipo DGM, l'altro di tipo SGM) tra soluzione di riferimento e risultati numerici per flusso monodimensionale stazionario subcritico su irregolarità di fondo parabolica.</i>	74
3.14	<i>Caso d): confronto (condotto per due metodi, uno di tipo DGM, l'altro di tipo SGM) tra soluzione di riferimento e risultati numerici per flusso monodimensionale stazionario supercritico su irregolarità di fondo parabolica.</i>	75
3.15	<i>Risalto idraulico in corrente stazionaria: confronto tra profilo idrico di riferimento e profili numerici calcolati col codice SLIC associato a trattamento <i>splitting</i> semi-implicito del termine sorgente.</i>	76
3.16	<i>Reticolo di calcolo adottato per la descrizione di una brusca deviazione di angolo $\alpha = 8.95^\circ$.</i>	77
3.17	<i>Corrente veloce ($Fr_m = 2.74$) in regime permanente che subisce una deviazione di $\alpha = 8.95^\circ$: mappe a curve di livello calcolate a) per l'altezza idrica (in m) e b) per il modulo della velocità (in m/s). In tratteggio il fronte d'onda analitico.</i>	78
3.18	<i>Apparato sperimentale e posizione dei trasduttori per il Test CADAM con brusca deviazione a 90°.</i>	79
3.19	<i>Risultati numerici per $t = 7.0$s relativi al Test CADAM con brusca deviazione a 90°: a) mappa a curve di livello per l'altezza idrica (in m), b) dettaglio del campo di velocità in corrispondenza del gomito.</i>	81
3.20	<i>Test CADAM relativo a brusca deviazione a 90°: confronto tra idrogrammi sperimentali ed idrogrammi numerici.</i>	82
3.21	<i>Apparato sperimentale per il Test IMPACT relativo ad ostacolo isolato (dimensioni in cm).</i>	83
3.22	<i>Test IMPACT relativo ad ostacolo isolato: dettaglio a) della mappa delle altezze idriche (in m), b) del campo di velocità, all'istante $t = 20.0$s.</i>	85
3.23	<i>Dettaglio della griglia strutturata non cartesiana adottata nei pressi dell'ostacolo.</i>	86
3.24	<i>Test IMPACT relativo ad ostacolo isolato: confronto tra idrogrammi sperimentali e numerici ottenuti sia su reticolo strutturato non cartesiano che su griglia cartesiana.</i>	87
3.25	<i>Mappe del modulo della velocità (in m/s) per il Test IMPACT agli istanti: a) $t = 1.0$s, b) $t = 5.0$s, c) $t = 10.0$s; confronto tra dati sperimentali (a sinistra) e risultati numerici (a destra) ottenuti mediante codice numerico applicato a griglia cartesiana.</i>	88
4.1	<i>Immagine fotografica dell'apparato sperimentale.</i>	90
4.2	<i>Rappresentazione planimetrica dell'apparato sperimentale (dimensioni in cm) per il Test 3.</i>	91

4.3	Rappresentazione planimetrica dell'apparato sperimentale (dimensioni in cm) per il Test 4.	92
4.4	Posizionamento dell'ostacolo sormontabile.	93
4.5	Sezione longitudinale media dell'ostacolo sormontabile (dimensioni in cm).	93
4.6	Sezione trasversale dell'ostacolo sormontabile (dimensioni in cm).	93
4.7	Posizionamento dell'ostacolo insormontabile.	94
4.8	Fotografia relativa al Test 3 scattata all'istante $t = 4.77$ s.	95
4.9	Fotografia relativa al Test 4 scattata all'istante $t = 2.51$ s.	96
4.10	Immagine fotografiche utilizzate in fase di calibrazione spaziale durante il Test 4.	97
4.11	Esempi di funzioni di conversione tono di grigio-altezza d'acqua per pixel centrale, pixel di bordo e pixel posizionato sull'ostacolo sormontabile.	98
4.12	Relazione tra le coordinate dei punti immagine e dei punti oggetto [107].	99
4.13	Sequenza delle tre rotazioni della terna xyz	99
4.14	Risultati numerici relativi al Test 3 all'istante $t = 4.77$ s : a) mappa delle altezze idriche (in m), b) campo di velocità.	102
4.15	Risultati numerici relativi al Test 3 all'istante $t = 4.77$ s : a) mappa del modulo della velocità (in m/s), b) mappa del numero di Froude (con indicata la linea per $Fr = 1$).	103
4.16	Mappe sperimentali (a sinistra) e numeriche (a destra) delle altezze idriche (in m) per il Test 1 agli istanti $t = 0.11$ s, $t = 0.46$ s, $t = 0.81$ s e $t = 1.16$ s.	105
4.17	Mappe sperimentali (a sinistra) e numeriche (a destra) delle altezze idriche (in m) per il Test 1 agli istanti $t = 1.51$ s, $t = 1.87$ s, $t = 2.22$ s e $t = 2.57$ s.	106
4.18	Mappe sperimentali (a sinistra) e numeriche (a destra) delle altezze idriche (in m) per il Test 1 agli istanti $t = 2.92$ s e $t = 4.77$ s.	107
4.19	Mappe sperimentali (a sinistra) e numeriche (a destra) delle altezze idriche (in m) per il Test 2 agli istanti $t = 0.24$ s, $t = 0.59$ s, $t = 0.94$ s e $t = 1.29$ s.	108
4.20	Mappe sperimentali (a sinistra) e numeriche (a destra) delle altezze idriche (in m) per il Test 2 agli istanti $t = 1.64$ s, $t = 2.00$ s, $t = 2.35$ s e $t = 2.70$ s.	109
4.21	Mappe sperimentali (a sinistra) e numeriche (a destra) delle altezze idriche (in m) per il Test 2 agli istanti $t = 3.05$ s e $t = 4.89$ s.	110
4.22	Mappe sperimentali (a sinistra) e numeriche (a destra) delle altezze idriche (in m) per il Test 3 agli istanti $t = 0.10$ s, $t = 0.46$ s, $t = 0.81$ s e $t = 1.16$ s.	111
4.23	Mappe sperimentali (a sinistra) e numeriche (a destra) delle altezze idriche (in m) per il Test 3 agli istanti $t = 1.51$ s, $t = 1.86$ s, $t = 2.21$ s e $t = 2.58$ s.	112
4.24	Mappe sperimentali (a sinistra) e numeriche (a destra) delle altezze idriche (in m) per il Test 3 agli istanti $t = 2.93$ s e $t = 4.77$ s.	113
4.25	Mappe sperimentali (a sinistra) e numeriche (a destra) delle altezze idriche (in m) per il Test 4 agli istanti $t = 0.40$ s, $t = 0.75$ s, $t = 1.10$ s e $t = 1.45$ s.	114
4.26	Mappe sperimentali (a sinistra) e numeriche (a destra) delle altezze idriche (in m) per il Test 4 agli istanti $t = 1.81$ s, $t = 2.16$ s, $t = 2.51$ s e $t = 2.86$ s.	115
4.27	Mappe sperimentali (a sinistra) e numeriche (a destra) delle altezze idriche (in m) per il Test 4 agli istanti $t = 3.22$ s e $t = 5.06$ s.	116
4.28	Confronto tra idrogrammi numerici e sperimentali per: a) Test 1, b) Test 2.	117
4.29	Confronto tra idrogrammi numerici e sperimentali per: a) Test 3, b) Test 4.	118

Elenco delle tabelle

3.1	<i>Dati per sei test monodimensionali dotati di soluzione analitica.</i>	58
3.2	<i>Dati per due test bidimensionali a simmetria radiale.</i>	65
3.3	<i>Coordinate dei quattro vertici dell'ostacolo per il Test IMPACT.</i>	83
3.4	<i>Coordinate dei punti di misura dell'altezza idrica per il Test IMPACT.</i>	84
4.1	<i>Caratteristiche principali dei test sperimentali.</i>	94
4.2	<i>Impostazioni dei parametri di scatto.</i>	96
4.3	<i>Parametri di orientamento interno della fotocamera.</i>	100
4.4	<i>Parametri di orientamento esterno della fotocamera.</i>	100

Prefazione

La presente dissertazione si pone come compendio dei risultati principali dell'attività di ricerca svolta dallo scrivente durante il corso di Dottorato di Ricerca in Ingegneria Civile (XVI Ciclo) nell'ambito della modellazione matematica e fisica di fenomeni idrici bidimensionali a superficie libera, dipendenti dal tempo e governati dalla gravità, nell'approssimazione di acque basse.

Tali fenomeni sono retti, come ben noto, da un sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali del primo ordine, non omogeneo, non lineare, di tipo iperbolico. Gli attinenti aspetti matematici di maggiore rilievo sono raccolti nel Cap. 1. Sistemi appartenenti a questa categoria suscitano notevole interesse presso le comunità scientifica e tecnica, dal momento che forniscono un'interpretazione matematica ad una vasta gamma di problemi non lineari in cui risultano fondamentali gli effetti di propagazione e di interazione di perturbazioni o di trasporto advettivo di informazioni; non a caso, infatti, riguardano un vasto spettro di discipline oltre l'idraulica a pelo libero, tra cui la gasdinamica, l'acustica, la chimica, la geofisica, la dinamica elastica, ecc.

Diverse metodologie, per lo più sviluppate in applicazioni di dinamica dei fluidi comprimibili, sono state proposte in passato per la risoluzione numerica di questo tipo di problemi; negli ultimi anni, del resto, anche in relazione alla crescente efficienza dei mezzi informatici, la fluidodinamica computazionale ha riscosso sempre maggiori attenzioni e molti ricercatori hanno dedicato risorse e sforzi al perfezionamento di nuove tecniche, fornendo contributi originali nelle tematiche ancora oggetto di ricerca. Il Cap. 2 si occupa di delineare i tratti caratteristici dei codici, facenti parte della classe dei metodi ai volumi finiti, che sono stati implementati al calcolatore; essi trovano validazione nel Cap. 3 per confronto con casi significativi, sia teorici che sperimentali, ben documentati in letteratura.

Inoltre, un'attenta indagine di laboratorio, le fasi salienti ed i risultati della quale sono descritti nel Cap. 4, ha procurato ulteriore materiale di raffronto per appurare le capacità predittive e la robustezza degli stessi modelli numerici di simulazione.

L'intero lavoro è stato condotto presso il Dipartimento di Ingegneria Civile, dell'Ambiente, del Territorio e Architettura dell'Università degli Studi di Parma e guidato con competenza, assiduità, attenzione e disponibilità dal Prof. Ing. Paolo Mignosa, a cui rivolgo con stima e cordialità un pensiero di profonda e viva riconoscenza. Non posso dimenticare il personale docente, tecnico e amministrativo del Dipartimento, senza il quale il mio percorso di studi sarebbe stato meno ricco e proficuo: in particolare, un'espressione speciale di gratitudine vada ai Proff. Ingg. Maria Giovanna Tanda e Sandro Longo per l'incoraggiamento prezioso ed il sostegno costante. Ancora un grazie sentito ai colleghi dottorandi, ai tesisti e soprattutto all'insostituibile Ing. Francesca Aureli che ha quotidianamente condiviso con me le soddisfazioni e le fatiche di questi ultimi tre anni. Infine, un pensiero affettuoso alla mia famiglia a cui devo e dedico questo traguardo.

Parma, Gennaio 2004

Introduzione

I flussi idrici a superficie libera, soggetti al campo della gravità, in regime di moto rapidamente vario, come quelli conseguenti al rapido rilascio di masse d'acqua raccolte a tergo di sistemi di ritenuta, presentano sovente evoluzioni talmente complesse nelle concrete situazioni tecniche da renderne ardua la codifica in termini matematici: infatti, nei casi pratici, si verificano usualmente la formazione e la propagazione di onde a fronte ripido, lo sviluppo di moti vorticosi, l'allagamento di zone inizialmente asciutte dalla topografia accidentata, l'aggiramento di ostacoli insormontabili, ecc. Lo studio e la previsione degli aspetti principali di tali eventi catastrofici assumono un'importanza del tutto particolare, risultando essenziali per delimitare le aree potenzialmente inondabili, valutare il livello connesso di rischio idraulico ed i possibili danni arrecabili alla comunità civile, ai beni immobili ed alle attività economiche e produttive, pianificare le modalità operative di intervento, attivare idonee misure di prevenzione e controllo.

La schematizzazione matematica a cui si ricorre di frequente, cosiddetta “alle acque basse”, si basa sull'ipotesi che le altezze d'acqua coinvolte siano piccole rispetto alla curvatura della superficie libera, autorizzando a trascurare l'accelerazione in direzione verticale e a considerare la distribuzione delle pressioni idrostatica sulla verticale stessa: in tal caso, l'accostamento dell'equazione di continuità all'equazione del moto dà luogo ad un sistema non omogeneo di tipo iperbolico di equazioni differenziali non lineari del primo ordine alle derivate parziali che, scritto in forma conservativa, sviluppa spontaneamente soluzioni discontinue anche partendo da condizioni iniziali regolari. Questa tipologia di leggi di conservazione, nell'approccio monodimensionale, dette t ed x le variabili indipendenti temporale e spaziale, si esplicita nella relazione:

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{U}(t, x) + \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{F}(\mathbf{U}(t, x)) = \mathbf{S}(\mathbf{U}(t, x)), \quad (1)$$

che nella forma integrale:

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \mathbf{U}(t, x) dx = \mathbf{F}(\mathbf{U}(t, x_1)) - \mathbf{F}(\mathbf{U}(t, x_2)) + \int_{x_1}^{x_2} \mathbf{S}(\mathbf{U}(t, x)) dx \quad (2)$$

stabilisce come la quantità conservata $\mathbf{U}(t, x) : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ ($m \in \mathbb{N}$) complessivamente contenuta nell'intervallo $[x_1, x_2]$ vari in seguito agli scambi attuati attraverso i bordi dalla funzione di flusso $\mathbf{F}(\mathbf{U}(t, x)) \in \mathbb{R}^m$ e per l'aumento (o diminuzione) operato dal termine sorgente $\mathbf{S}(\mathbf{U}(t, x)) \in \mathbb{R}^m$.

Le (1) - (2) trovano applicazione in numerosissime discipline per l'interpretazione di fenomeni di carattere ondulatorio, cioè accomunati dal fatto di comportare la propagazione di perturbazioni ed il trasporto advettivo di sostanze. Esse ammettono soluzione analitica in un numero esiguo di casi semplici e schematici; per questa ragione, negli ultimi decenni, incoraggiata dalle sempre più potenti risorse di calcolo messe a disposizione dai mezzi informatici, molta attenzione è stata dedicata da parte della comunità scientifica allo sviluppo di tecniche computazionali finalizzate alla risoluzione numerica del problema.

A tale scopo varie metodologie, la maggior parte delle quali concepite nel campo dell'Aerodinamica, possono essere adottate: recentemente rapidi progressi sono stati compiuti nella direzione del perfezionamento di interessanti ed innovative tecniche (metodi agli elementi finiti alla *Galerkin*, metodi spettrali) [50, 51, 179] che in parte combinano le proprietà caratteristiche dei metodi classici (alle differenze finite, ai volumi finiti, agli elementi finiti). Tuttavia il metodo ai volumi finiti è attualmente tra i più diffusi e costituisce il principale oggetto della presente dissertazione.

Se il metodo alle differenze finite si fonda sull'equazione differenziale (1) e su una logica di approssimazione puntuale dell'incognita $\mathbf{U}(t, x)$ sui nodi della griglia di discretizzazione spaziale, il metodo ai volumi finiti, invece, fa riferimento alla forma integrale (2) e ricorre alla suddivisione del dominio di calcolo in elementi spaziali (nell'approccio monodimensionale trattasi di intervalli $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$ etichettati dall'indice $i = 1, \dots, n_x$), ad ognuno dei quali si attribuisce, per ogni generico istante $t = t_n$, un valor medio integrale \mathbf{U}_i^n della variabile $\mathbf{U}(t, x)$:

$$\mathbf{U}_i^n = \frac{1}{x_{i+1/2} - x_{i-1/2}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \mathbf{U}(t_n, x) dx. \quad (3)$$

In tal caso, l'evoluzione temporale dei valori medi si può ottenere direttamente dallo sviluppo al discreto della (2) secondo l'algoritmo esplicito:

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n - \frac{t_{n+1} - t_n}{x_{i+1/2} - x_{i-1/2}} \left(\mathbf{f}_{i+1/2}^n - \mathbf{f}_{i-1/2}^n \right), \quad (4)$$

dove si introduce il contributo fornito da funzioni numeriche di flusso \mathbf{f} le quali, essendo calcolate sulla base degli stessi valori medi \mathbf{U}_i^n all'istante corrente $t = t_n$, devono essere convenientemente costruite in modo da restituire una stima corretta dei flussi fisici che si scambiano due celle adiacenti attraverso il bordo comune.

Dal momento che l'equazione (2), come già osservato, ammette soluzioni discontinue, cioè soluzioni *deboli* che soddisfano le (1) tranne che sulle superfici di discontinuità [47], lo schema di calcolo deve essere in grado di coglierle, riproducendo con accuratezza l'altezza e la velocità di propagazione delle discontinuità (*shocks* e onde di contatto). A questo proposito il teorema di *Lax-Wendroff* [112] assicura che una successione di soluzioni numeriche $\mathbf{U}^{(k)}$, calcolate mediante un metodo consistente e conservativo su una sequenza di griglie di indice $k \in \mathbb{N}$ con parametri $\Delta t^{(k)}$ e $\Delta x^{(k)} \rightarrow 0$ per $k \rightarrow \infty$, converge per $k \rightarrow \infty$ alle soluzioni deboli del sistema (1) associato ad opportune condizioni iniziali e al contorno; quella fisicamente rilevante viene isolata se lo schema numerico incorpora implicitamente un criterio di entropia.

Metodi cosiddetti *shock-tracking*, nell'intento di posizionare le discontinuità ed imporre attraverso di esse le appropriate relazioni matematiche, risultano particolarmente laboriosi e talora inapplicabili soprattutto in ambito multidimensionale. Per contro un approccio *shock-capturing* unisce la semplicità operativa e l'utilità della ricostruzione automatica delle discontinuità agli svantaggi consistenti nella dilatazione delle discontinuità stesse su un certo numero (dipendente dal metodo) di elementi di griglia e nell'introduzione, non eliminabile secondo il teorema di *Godunov* [85], di oscillazioni spurie in prossimità dei forti gradienti qualora la procedura di calcolo lineare presenti un ordine di accuratezza superiore ad uno.

Tali oscillazioni non fisiche, oltre a fornire una rappresentazione imprecisa della soluzione esatta, sono responsabili dell'insorgenza di instabilità non lineari che rendono l'algoritmo meno efficiente, se non addirittura inutilizzabile. Pertanto, per eliminarle mantenendo un alto ordine di accuratezza, è necessario avvalersi di metodi numerici non lineari, detti "ad alta risoluzione", che garantiscono prestazioni notevoli in molti casi di interesse pratico, nonostante i relativi presupposti teorici abbiano validità ristretta a situazioni modellabili con equazioni tipo piuttosto semplici. Altri

metodi (UNO, ENO, WENO) [93] sono essenzialmente non oscillatori e nel contempo consentono di raggiungere un alto ordine di accuratezza.

Nel seguito si descrivono gli schemi numerici ai volumi finiti, conservativi, *shock-capturing*, ad alta risoluzione che sono stati implementati su calcolatore e dei quali sono state confermate l'affidabilità e l'efficienza mediante raffronto con soluzioni di riferimento (eventualmente analitiche) relative a casi test particolarmente significativi e con dati sperimentali.

A questo proposito è stata svolta un'attività *ad hoc* presso il laboratorio di Idraulica dell'Università degli Studi di Parma con il duplice obiettivo di fornire nuovi risultati sperimentali utili alla convalida dei codici numerici e di valutare l'applicabilità di una tecnica di acquisizione non invasiva di tipo colorimetrico [33]. Quest'ultima consiste nell'elaborazione di una serie di fotografie digitali ad alta risoluzione scattate dall'alto, ritraenti un campo di moto illuminato uniformemente dal basso. Avendo colorato la massa idrica coinvolta mediante una nota quantità di tracciante, l'intensità di colore rilevata sulle immagini *pixel per pixel* ha permesso di ricostruire il campo di profondità idriche da funzioni di trasferimento locali tracciate in base ad una preliminare procedura di calibrazione spaziale.

I risultati ottenuti confermano che la metodologia di indagine è in grado di restituire informazioni globali quantitativamente accurate sulla distribuzione dei livelli idrici e di porsi come valida alternativa alla semplice misurazione degli idrogrammi in un numero limitato di punti sperimentali.

Capitolo 1

Le equazioni di base

Il presente capitolo contiene uno sviluppo introduttivo dei principali concetti matematici utili a comprendere le prerogative e le caratteristiche dei sistemi non lineari di equazioni differenziali alle derivate parziali di tipo iperbolico, espressi in forma conservativa e definiti su dominio spaziale multidimensionale, con particolare attenzione alla corrispondente formulazione integrale.

Di norma si ricorre a tali strumenti per la modellazione matematica di fenomeni di propagazione di perturbazioni o di trasporto di scalari passivi (traccianti, sostanze inquinanti, ecc.).

Nella fattispecie, si discuterà l'applicazione a fenomeni idrici bidimensionali a pelo libero, in regime di moto rapidamente vario, sottoposti all'effetto del campo di gravità: il fatto che l'ampiezza d'onda figuri molto ridotta rispetto alle dimensioni planimetriche autorizza a trascurare la componente verticale della velocità e ad assumere che la distribuzione delle pressioni sia idrostatica lungo la verticale.

Questo approccio, noto in letteratura come alle “acque basse” o *shallow water* [7, 43, 57, 94, 116, 118, 122, 125, 161, 179, 199], riscuote una vasta popolarità in virtù della relativa facilità di implementazione [2, 98, 146, 147, 202, 204] e si mostra particolarmente adatta alle applicazioni pratiche in cui si intendano simulare onde di marea, il movimento di onde basse in prossimità delle spiagge prima del frangimento, la propagazione di onde di piena nei corsi d'acqua, *roll-waves* nei canali, la diffusione di sostanze inquinanti, flussi di miscugli eterogenei (*debris-flow*), onde di sommersione e scenari di allagamento, fenomeni di rapido rilascio di opere di ritenuta (*dam-break*).

Non si trascurerà, infine, un sintetico cenno alle proprietà matematiche ed alla struttura caratteristica delle equazioni su menzionate [47, 84, 99, 116, 126, 177, 179], dal momento che questi aspetti condizionano la dinamica fisica dei fenomeni oggetto d'indagine e l'impiego delle tecniche di discretizzazione numerica che verranno presentate.

1.1 Le equazioni bidimensionali alle acque basse

La dinamica dei fluidi è governata da relazioni matematiche non lineari che nel continuo traducono i principi fisici di conservazione della massa e di bilancio la quantità di moto, del momento angolare e dell'energia totale [6, 14, 47, 49, 99, 118, 129, 145, 177, 179, 199].

In particolare, per fluidi viscosi, isotropi ed omogenei, per i quali si possa avanzare l'ipotesi di densità di massa ρ approssimativamente costante (pertanto di incomprimibilità) e di comportamento reologico newtoniano, ammesso che il processo di moto si svolga in condizioni isoterme,

due sole equazioni (*equazione di continuità* ed *equazione di Navier-Stokes*) sono sufficienti per risolvere il problema della determinazione del campo di moto e di pressione, cioè delle funzioni pressione relativa $p : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R} \mid p = p(t, x, y, z)$ e velocità $\mathbf{v} : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{v} = \mathbf{v}(t, x, y, z) = [u(t, x, y, z), v(t, x, y, z), w(t, x, y, z)]$, le quali dipendono dalla variabile temporale t e dalle tre coordinate spaziali (x, y, z) , riferite ad un sistema di riferimento ortogonale euleriano ove l'asse z , diretto verso l'alto, materializza la direzione verticale.

Sotto le ipotesi enunciate, definito con $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z}$ l'operatore di derivazione sostanziale, in forma differenziale (*forte*) conservativa il problema si esprime come di seguito [49]:

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad (1.1)$$

$$\rho \left(\mathbf{f}_e - \frac{D\mathbf{v}}{Dt} \right) = \operatorname{grad} p - \mu \nabla^2 \mathbf{v}, \quad (1.2)$$

dove μ denota la viscosità dinamica (considerata costante) e $\mathbf{f}_e : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{f}_e = \mathbf{f}_e(t, x, y, z)$ rappresenta la distribuzione delle forze esterne di massa per unità di massa applicate al volume fluido che occupa il dominio (variabile nel tempo):

$$\Omega_d(t) = \{(x, y, z) : (x, y) \in \Omega(t) \wedge z \in (b(t, x, y), H(t, x, y))\}. \quad (1.3)$$

Tale campo è delimitato dai bordi costituiti:

- dalla superficie del fondo (anch'essa eventualmente dipendente dal tempo, se mobile):

$$\Gamma_b(t) = \{(x, y, z) : (x, y) \in \Omega(t) \wedge z - b(t, x, y) = 0\}, \quad (1.4)$$

su cui vale la condizione al contorno: $D\Gamma_b/Dt = 0$;

- dalla superficie libera:

$$\Gamma_s(t) = \{(x, y, z) : (x, y) \in \Omega(t) \wedge z - H(t, x, y) = 0\}, \quad (1.5)$$

su cui si ammette insista la pressione atmosferica relativa $p = 0$ ed attraverso la quale è continua la componente del tensore degli sforzi lungo una qualsiasi direzione tangente (condizioni dinamiche); alla stessa si applica inoltre la condizione cinematica: $D\Gamma_s/Dt = 0$;

- dalle superfici laterali:

$$\Gamma_l(t) = \{(x, y, z) : (x, y) \in \gamma_d(t) \wedge z \in (b(t, x, y), H(t, x, y))\}. \quad (1.6)$$

Nella precedente simbologia $\Omega(t)$ indica la proiezione orizzontale del campo di moto racchiusa da linee di bordo $\gamma_d(t)$ fisiche o di contatto acqua-acqua, $b : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \mid b = b(t, x, y)$ la superficie del letto di fondo e $H : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \mid H(t, x, y) = h(t, x, y) + b(t, x, y)$ la quota idrica totale, essendo $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \mid h = h(t, x, y)$ il tirante idrico.

Per un fluido ideale l'equazione (1.2) di *Navier-Stokes* si semplifica nell'equazione detta di *Eulero* [49]:

$$\rho \left(\mathbf{f}_e - \frac{D\mathbf{v}}{Dt} \right) = \operatorname{grad} p. \quad (1.7)$$

La formulazione integrale (*debole*) dello stesso problema esprime i bilanci di massa e di quantità di moto per un arbitrario volume V di controllo fluido, fisso rispetto al sistema di riferimento e delimitato da una superficie chiusa A di contorno. Sempre nel caso di fluido ideale si conclude [49]:

$$\int_A \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dS = 0, \quad (1.8)$$

$$\int_V \rho \mathbf{f}_e \, dV - \int_A p \mathbf{n} \, dS - \int_A \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, \mathbf{v} \, dS - \int_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{v}) \, dV = \mathbf{0}, \quad (1.9)$$

dove $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^3$ individua il versore normale uscente in ogni punto del contorno A .

Manipolando la (1.1) e la (1.7) mediante integrazione sulla verticale, supposto che la componente verticale dell'accelerazione sia irrilevante e che la distribuzione delle pressioni sulla verticale sia idrostatica, si ricavano le equazioni bidimensionali del moto a superficie libera nell'approssimazione "alle acque basse" e nell'approccio differenziale [43, 118, 177, 179]:

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{U} + \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{F}(\mathbf{U}) + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{G}(\mathbf{U}) = \mathbf{S}(\mathbf{U}). \quad (1.10)$$

In forma integrale si ottiene [118, 177, 179]:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \mathbf{U} \, dx dy + \int_{\partial\Omega} \mathbf{v} \cdot \mathbf{H}(\mathbf{U}) \, ds = \int_{\Omega} \mathbf{S}(\mathbf{U}) \, dx dy, \quad (1.11)$$

da cui, per il teorema della divergenza, se la funzione $\mathbf{U} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ è *smooth* (di classe C^∞) si desume:

$$\int_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{U} + \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{F}(\mathbf{U}) + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{G}(\mathbf{U}) \right] dx dy = \int_{\Omega} \mathbf{S}(\mathbf{U}) \, dx dy. \quad (1.12)$$

Nelle relazioni su introdotte, $\mathbf{U} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{U}(t, x, y) = [h, uh, vh]^T$ è il vettore delle variabili conservate (altezza idrica e portate specifiche nelle direzioni x e y), dove $u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \mid u = u(t, x, y)$ e $v : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \mid v = v(t, x, y)$ indicano le componenti planimetriche del vettore velocità $\mathbf{v} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \mid \mathbf{v}(t, x, y) = [u(t, x, y), v(t, x, y)]$ (è nulla la componente verticale, approssimandosi il moto a piano), mentre $\mathbf{H} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 2} \mid \mathbf{H}(\mathbf{U}) = [\mathbf{F}(\mathbf{U}), \mathbf{G}(\mathbf{U})]$ rappresenta il vettore di flusso che raggruppa le funzioni di flusso nelle due direzioni coordinate: $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{F}(\mathbf{U}(t, x, y)) = [uh, u^2h + \frac{1}{2}gh^2, uwh]^T$ e $\mathbf{G} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{G}(\mathbf{U}(t, x, y)) = [vh, uvh, v^2h + \frac{1}{2}gh^2]^T$. Inoltre con Ω si intende un'arbitraria regione del campo di moto circoscritta dalla linea chiusa $\partial\Omega$; $\mathbf{v}(s) \in \mathbb{R}^2$ è il versore normale a $\partial\Omega$ uscente da ogni suo punto di coordinate $(x(s), y(s))$, dettando $s \in \mathbb{R}$ la parametrizzazione della stessa curva mediante un sistema di ascisse curvilinee. Infine $\mathbf{S} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{S}(\mathbf{U}(t, x, y)) = [0, gh(S_{0_x} - S_{f_x}), gh(S_{0_y} - S_{f_y})]^T$ individua il vettore dei termini forzanti (*sorgente*), nel quale, trascurando gli effetti indotti dalla forza di *Coriolis*, dall'azione del vento e da fenomeni di turbolenza, si annoverano solo gli effetti introdotti dal campo di gravità (di accelerazione g) in virtù della pendenza del fondo e dalla resistenza offerta dal fondo stesso. In definitiva [7, 32, 36, 43, 136, 140, 188, 189], le pendenze geometriche (*bottom slopes*) nelle due direzioni coordinate valgono:

$$S_{0_x} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \mid S_{0_x}(t, x, y) = -\frac{\partial b(t, x, y)}{\partial x} \quad e \quad S_{0_y} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \mid S_{0_y}(t, x, y) = -\frac{\partial b(t, x, y)}{\partial y}; \quad (1.13)$$

le cadenti energetiche (*friction slopes*) nelle stesse direzioni (x, y) , adottata la formula di resistenza di *Strickler* nonostante la sua validità limitata a regimi di moto uniformi assolutamente turbolenti,

e denotato con $n : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \mid n = n(x, y)$ il coefficiente di resistenza di *Manning*, si esprimono secondo le seguenti uguaglianze:

$$S_{f_x} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \mid S_{f_x}(t, x, y) = \frac{n^2 u \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{4/3}} \quad e \quad S_{f_y} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \mid S_{f_y}(t, x, y) = \frac{n^2 v \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{4/3}}. \quad (1.14)$$

In letteratura sono reperibili diversi approfondimenti sulle (1.14) allo scopo di tenere in considerazione anche l'effetto della resistenza al moto introdotta da eventuali pareti solide [34, 73, 134].

1.2 Le proprietà delle equazioni

Il sistema differenziale (1.10) determina un problema dipendente dal tempo, solitamente definito su dominio limitato, che necessita di condizioni iniziali [118, 135, 146]:

$$\mathbf{U}(0, x, y) = \mathbf{U}_0, \quad \mathbf{U}_0 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{U}_0 = \mathbf{U}_0(x, y) \quad \text{con } (x, y) \in \Omega(0) \quad (1.15)$$

e di condizioni al contorno in numero pari, per ogni direzione, alle equazioni del sistema stesso.

La scelta delle condizioni di bordo è dettata dalla fisica del fenomeno descritto matematicamente dalle (1.10) e, se inappropriata in termini di tipologia, di codifica o di numerosità, può inficiare l'esistenza o l'unicità della soluzione del problema [56].

Di seguito si discutono le principali proprietà matematiche delle equazioni "alle acque basse", utili in fase di messa a punto di schemi di calcolo finalizzati alla risoluzione numerica delle stesse.

1.2.1 Struttura caratteristica e iperbolicità delle equazioni

Il sistema non lineare (1.10) può essere ridotto, in assenza di termine sorgente, alla seguente forma omogenea di primo ordine:

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{U} + \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{F}(\mathbf{U}) + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{G}(\mathbf{U}) = \mathbf{0}, \quad (1.16)$$

dalla quale si ricava la forma non conservativa quasi-lineare (cioè lineare nelle derivate di ordine 1, con coefficienti dipendenti da \mathbf{U}), equivalente alla precedente quando la funzione incognita \mathbf{U} è regolare [118]:

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{U} + \mathbf{A}(\mathbf{U}) \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} + \mathbf{B}(\mathbf{U}) \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial y} = \mathbf{0}, \quad (1.17)$$

dove:

$$\mathbf{A} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3} \mid \mathbf{A}(\mathbf{U}(t, x, y)) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -u^2 + gh & 2u & 0 \\ -uv & v & u \end{bmatrix}, \quad (1.18)$$

$$\mathbf{B} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3} \mid \mathbf{B}(\mathbf{U}(t, x, y)) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -uv & v & u \\ -v^2 + gh & 0 & 2v \end{bmatrix}, \quad (1.19)$$

sono le matrici Jacobiane rispettivamente delle funzioni di flusso $\mathbf{F}(\mathbf{U})$ e $\mathbf{G}(\mathbf{U})$ [43, 99, 118, 177, 179].

Detta $c : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \mid c = c(t, x, y) = \sqrt{g h(t, x, y)}$ la velocità (*celerità*) relativa di propagazione delle piccole perturbazioni di gravità, la matrice $\mathbf{A}(\mathbf{U})$ ammette gli autovalori $\lambda_{x_i} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \mid \lambda_{x_i} = \lambda_{x_i}(\mathbf{U}(t, x, y))$, ($i = 1, 2, 3$):

$$\lambda_{x_1} = u - c, \quad \lambda_{x_2} = u, \quad \lambda_{x_3} = u + c, \quad (1.20)$$

da cui discendono, a meno di fattori numerici di scala, i corrispondenti autovettori destri $\mathbf{r}_{x_i} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{r}_{x_i} = \mathbf{r}_{x_i}(\mathbf{U}(t, x, y))$, ($i = 1, 2, 3$):

$$\mathbf{r}_{x_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ u - c \\ v \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_{x_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_{x_3} = \begin{bmatrix} 1 \\ u + c \\ v \end{bmatrix}. \quad (1.21)$$

Similmente, per la matrice $\mathbf{B}(\mathbf{U})$ si calcola:

$$\lambda_{y_1} = v - c, \quad \lambda_{y_2} = v, \quad \lambda_{y_3} = v + c, \quad (1.22)$$

$$\mathbf{r}_{y_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ u \\ v - c \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_{y_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_{y_3} = \begin{bmatrix} 1 \\ u \\ v + c \end{bmatrix}. \quad (1.23)$$

In entrambi i casi, sono onde gravitazionali non lineari quelle associate agli autovettori di pedici 1 e 3, dal momento che $\text{grad } \lambda_{x_i}(\mathbf{U}) \cdot \mathbf{r}_{x_i}(\mathbf{U}) \neq 0$ e $\text{grad } \lambda_{y_i}(\mathbf{U}) \cdot \mathbf{r}_{y_i}(\mathbf{U}) \neq 0$, $\forall \mathbf{U} \in \mathbb{R}^3$ per $i = 1, 3$ (le velocità caratteristiche λ_{x_i} e λ_{y_i} , per $i = 1, 3$, subiscono cioè variazione monotona lungo le curve integrali dei rispettivi autovettori), mentre è onda di contatto degenerare linearmente quella di pedice 2, per la quale: $\text{grad } \lambda_{x_2}(\mathbf{U}) \cdot \mathbf{r}_{x_2}(\mathbf{U}) = 0$ e $\text{grad } \lambda_{y_2}(\mathbf{U}) \cdot \mathbf{r}_{y_2}(\mathbf{U}) = 0$, $\forall \mathbf{U} \in \mathbb{R}^3$ (le velocità caratteristiche λ_{x_2} e λ_{y_2} risultano cioè costanti distintamente lungo le curve integrali dei rispettivi autovettori).

Il sistema quasi-lineare (1.17) è iperbolico in una certa regione del campo bidimensionale di definizione del problema qualora una qualsiasi combinazione lineare $\mathbf{C}(\mathbf{U})$ delle matrici $\mathbf{A}(\mathbf{U})$ e $\mathbf{B}(\mathbf{U})$ sia diagonalizzabile ed ammetta autovalori reali, qualunque valore assuma il vettore delle variabili conservate $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^3$ [118, 177, 179]. In simboli:

$$\mathbf{C} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3} \mid \mathbf{C}(\mathbf{U}(t, x, y)) = \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{D}(\mathbf{U}) = \begin{bmatrix} 0 & \mu_x & \mu_y \\ \mu_x gh - u \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{v} & \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{v} + \mu_x u & \mu_y u \\ \mu_y gh - v \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{v} & \mu_x v & \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{v} + \mu_y v \end{bmatrix}, \quad (1.24)$$

dove $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^2 \mid \boldsymbol{\mu} = [\mu_x, \mu_y]$ è un versore che specifica un'arbitraria direzione sul piano e $\mathbf{D} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3} \mid \mathbf{D}(\mathbf{U}(x, y, t)) = [\mathbf{A}(\mathbf{U}), \mathbf{B}(\mathbf{U})]$ il vettore delle matrici Jacobiane (1.18) e (1.19). La (1.24) ha autovalori:

$$\lambda_{c_1} = \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{v} - c, \quad \lambda_{c_2} = \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{v}, \quad \lambda_{c_3} = \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{v} + c, \quad (1.25)$$

con relativi autovettori destri (a meno di fattori numerici di scala):

$$\mathbf{r}_{c_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ u - \mu_x c \\ v - \mu_y c \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_{c_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mu_y \\ \mu_x \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_{c_3} = \begin{bmatrix} 1 \\ u + \mu_x c \\ v + \mu_y c \end{bmatrix}. \quad (1.26)$$

E' immediato verificare che le precedenti relazioni (1.20) e (1.21), così come le (1.22) e (1.23), possono essere interpretate come casi particolari delle (1.25) e (1.26), rispettivamente per $\boldsymbol{\mu} = [1, 0]$ e $\boldsymbol{\mu} = [0, 1]$.

Pertanto, essendo $\mathbf{C}(\mathbf{U})$ diagonalizzabile con autovalori reali (distinti tra loro per letto bagnato), il sistema non lineare bidimensionale “alle acque basse” (1.16) è di tipo iperbolico (strettamente, per letto bagnato) ed il comportamento del sistema fisico descritto dalle equazioni (1.17) è contraddistinto da fenomeni di trasporto di onde con velocità finita.

Inoltre, poiché $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$, non è possibile diagonalizzare le due matrici Jacobiane simultaneamente, ma solo singolarmente:

$$\mathbf{A}(\mathbf{U}) = \mathbf{R}_x(\mathbf{U}) \mathbf{\Lambda}_x(\mathbf{U}) \mathbf{R}_x(\mathbf{U})^{-1}, \quad \mathbf{B}(\mathbf{U}) = \mathbf{R}_y(\mathbf{U}) \mathbf{\Lambda}_y(\mathbf{U}) \mathbf{R}_y(\mathbf{U})^{-1}, \quad (1.27)$$

dove $\mathbf{\Lambda}_x(\mathbf{U})$ e $\mathbf{\Lambda}_y(\mathbf{U})$ rappresentano le matrici diagonali degli autovalori:

$$\mathbf{\Lambda}_x : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3} \mid \mathbf{\Lambda}_x(\mathbf{U}(x, y, t)) = \text{diag}(\lambda_{x_1}, \lambda_{x_2}, \lambda_{x_3}), \quad (1.28)$$

$$\mathbf{\Lambda}_y : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3} \mid \mathbf{\Lambda}_y(\mathbf{U}(x, y, t)) = \text{diag}(\lambda_{y_1}, \lambda_{y_2}, \lambda_{y_3}), \quad (1.29)$$

e $\mathbf{R}_x(\mathbf{U})$ ed $\mathbf{R}_y(\mathbf{U})$ le matrici non singolari (quindi invertibili) degli autovettori linearmente indipendenti:

$$\mathbf{R}_x : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3} \mid \mathbf{R}_x(\mathbf{U}(t, x, y)) = [\mathbf{r}_{x_1}, \mathbf{r}_{x_2}, \mathbf{r}_{x_3}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ u-c & 0 & u+c \\ v & 1 & v \end{bmatrix}, \quad (1.30)$$

$$\mathbf{R}_y : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3} \mid \mathbf{R}_y(\mathbf{U}(t, x, y)) = [\mathbf{r}_{y_1}, \mathbf{r}_{y_2}, \mathbf{r}_{y_3}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ u & 1 & u \\ v-c & 0 & v+c \end{bmatrix}. \quad (1.31)$$

Le equazioni (1.17) risultano di conseguenza, anche in virtù della loro non linearità, intimamente accoppiate.

In definitiva, le onde di gravità definite dagli autovettori \mathbf{r}_{c_1} ed \mathbf{r}_{c_3} ammettono componenti di velocità nella generica direzione (μ_x, μ_y) e si propagano in tale direzione con velocità $c(t, x, y)$ rispetto al fluido in movimento; invece l'onda relativa all'autovettore \mathbf{r}_{c_2} trasferisce semplicemente col flusso perturbazioni di velocità in direzione ortogonale (onda di contatto) [118].

1.2.2 Relazioni caratteristiche

La proprietà di iperbolicità del sistema di equazioni differenziali (1.17) è strettamente legata al concetto matematico di superficie caratteristica nello spazio (x, y, t) , superficie lungo la quale certe proprietà si conservano o attraverso cui possono verificarsi discontinuità nelle derivate [1, 56, 99]. In particolare, garanzia di iperbolicità risiede nella possibilità di ridurre le equazioni di conservazione di base, applicate a un dominio tridimensionale, a relazioni differenziali “di compatibilità” valide sulle superfici caratteristiche, cioè su sottospazi bidimensionali [37, 104, 171].

Un fronte d'onda che interpreti la propagazione non lineare di un disturbo nella variabile \mathbf{U} , ha espressione nello spazio orario (x, y, t) :

$$S = \{(t, x, y) : S(t, x, y) = 0\}; \quad (1.32)$$

l'onda corrispondente ha forma:

$$\mathbf{U} = \widehat{\mathbf{U}} e^{i(\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\nu} - \omega t)}, \quad (1.33)$$

dove $\widehat{\mathbf{U}} \in \mathbb{R}^3$ indica l'ampiezza dell'onda, i rappresenta l'unità immaginaria, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \mathbf{x} = [x, y]$ il vettore posizione sul piano fisico, $\omega \in \mathbb{R} \mid \omega = -\frac{\partial S(t,x,y)}{\partial t}$ simboleggia la frequenza d'onda, mentre $\varkappa \in \mathbb{R}^2 \mid \varkappa = \left[\frac{\partial S(t,x,y)}{\partial x}, \frac{\partial S(t,x,y)}{\partial y} \right]$ il numero d'onda che individua la direzione fisica di propagazione. Affinché tale fenomeno ondulatorio sia soluzione generale delle (1.17) [99,205], il sistema omogeneo:

$$\left(\mathbf{I} \frac{\partial S}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial S}{\partial x} + \mathbf{B} \frac{\partial S}{\partial y} \right) \widehat{\mathbf{U}} = \mathbf{0}, \quad (1.34)$$

in cui \mathbf{I} indica la matrice identità di ordine 3, deve ammettere soluzione non banale, cioè deve essere soddisfatta la relazione:

$$\det \left(\mathbf{I} \frac{\partial S}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial S}{\partial x} + \mathbf{B} \frac{\partial S}{\partial y} \right) = 0. \quad (1.35)$$

Una volta definiti nello spazio (x, y, t) il vettore velocità $\mathbf{V} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{V}(t, x, y) = [1, u, v]$ e la normale $\mathbf{n} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{n}(t, x, y) = [n_t, n_x, n_y] = [-\omega, \varkappa]$ ai fronti d'onda (superfici caratteristiche), la (1.35) equivale alla:

$$\det (\mathbf{I} n_t + \mathbf{A} n_x + \mathbf{B} n_y) = 0, \quad (1.36)$$

che, dopo passaggi algebrici, porge la seguente equazione nel vettore \mathbf{n} [104]:

$$(\mathbf{V} \cdot \mathbf{n})^2 \left[(\mathbf{V} \cdot \mathbf{n})^2 - c^2 (n_x^2 + n_y^2) \right] = 0. \quad (1.37)$$

La legge di annullamento del prodotto applicata alla (1.37) permette di ravvisare l'esistenza di due famiglie distinte di superfici caratteristiche lungo cui si trasmettono le informazioni [104].

La prima proviene dall'uguaglianza:

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (1.38)$$

che, accoppiata alla condizione di normalizzazione per la componente fisica di \mathbf{n} :

$$n_x^2 + n_y^2 = 1, \quad (1.39)$$

isola localmente ∞^1 normali collocate sul *piano delle normali* ortogonale al vettore \mathbf{V} e delimitate dal cilindro avente generatrici parallele all'asse t e direttrice circolare di raggio unitario. Tale famiglia è costituita pertanto da una semplice infinità di *superfici* piane *di flusso* aventi sostegno sul vettore \mathbf{V} (Fig. 1.1); le mutue intersezioni tra le superfici stesse individuano nello spazio (x, y, t) curve (*world lines*), localmente tangenti a \mathbf{V} , le cui proiezioni sul piano fisico (x, y) disegnano le traiettorie del flusso. Lungo queste curve vale l'equazione di bilancio dell'energia meccanica per unità di peso [49]:

$$-\frac{\partial h}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \text{grad} \left(h + \frac{\sqrt{u^2 + v^2}}{2g} \right) + u(S_{f_x} - S_{0_x}) + v(S_{f_y} - S_{0_y}) = 0. \quad (1.40)$$

La seconda famiglia (Fig. 1.2) è specificata dal cono (*cono delle normali*) [104]:

$$(\mathbf{V} \cdot \mathbf{n})^2 - c^2 (n_x^2 + n_y^2) = 0, \quad (1.41)$$

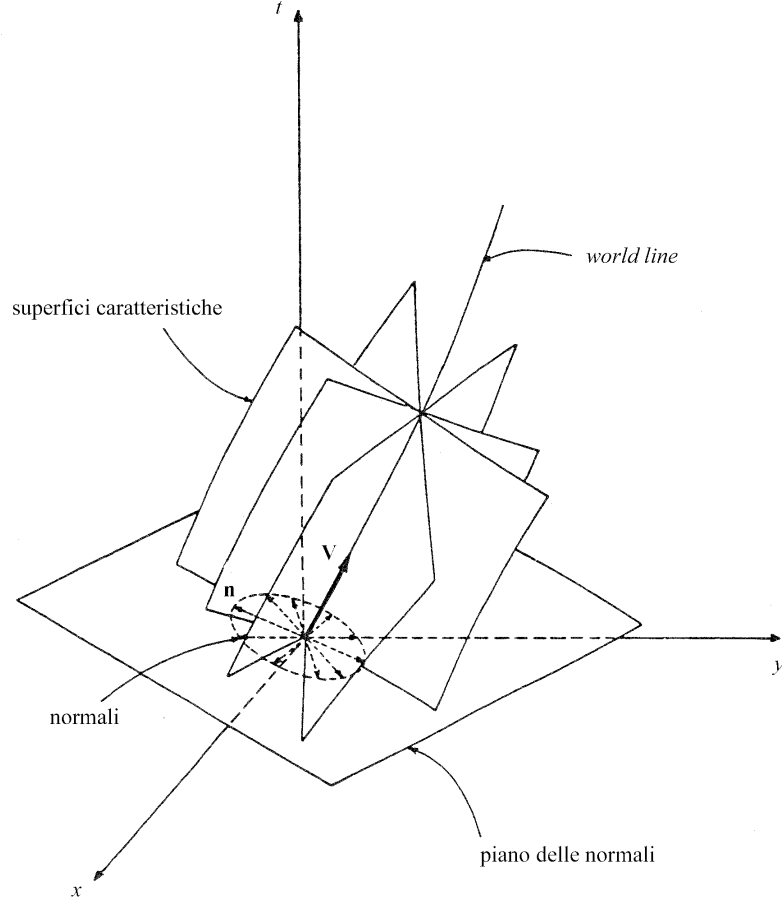


Figura 1.1: *Superfici caratteristiche di flusso* [104].

che si può scrivere anche:

$$\mathbf{n} \mathbf{E} \mathbf{n}^T = 0, \quad (1.42)$$

dove:

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & u & v \\ u & u^2 - c^2 & uv \\ v & uv & v^2 - c^2 \end{bmatrix}, \quad (1.43)$$

sulle cui generatrici giacciono le normali \mathbf{n} . Queste ultime sono perpendicolari alla semplice infinità di piani caratteristici localmente tangenti alle superfici caratteristiche (*superfici d'onda*): l'involuppo dei piani caratteristici produce un cono (detto *cono caratteristico*), reciproco ed ortogonale a quello delle normali, che ha equazione:

$$\mathbf{n} \mathbf{E}^{-1} \mathbf{n}^T = 0, \quad (1.44)$$

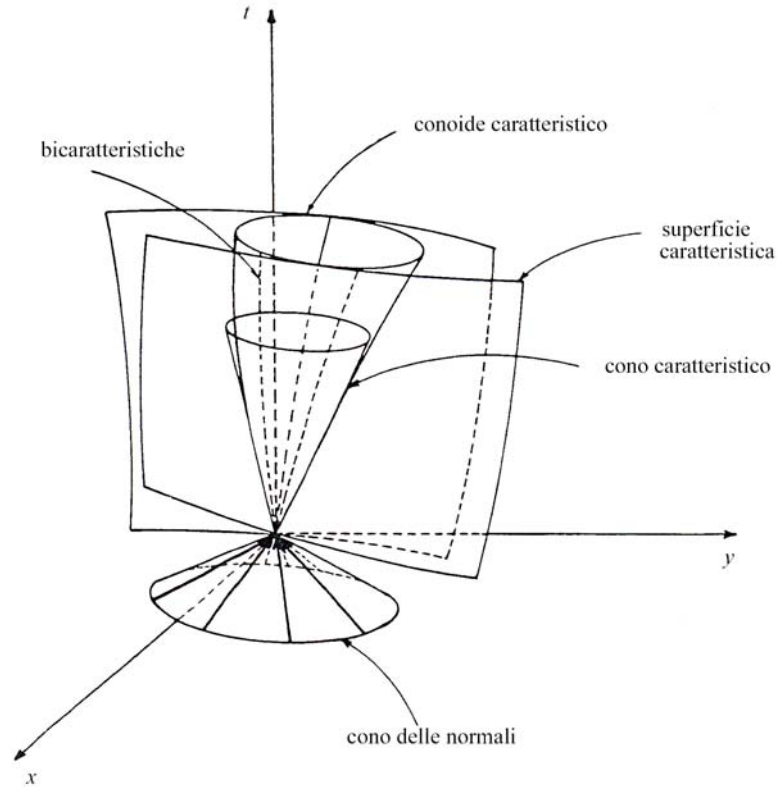


Figura 1.2: Superfici caratteristiche d'onda e conoide caratteristico [104].

in cui:

$$\mathbf{E}^{-1} = \frac{1}{c^2} \begin{bmatrix} c^2 - u^2 - v^2 & u & v \\ u & -1 & 0 \\ v & 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (1.45)$$

Le relative generatrici risultano pertanto tangenti alle superfici d'onda. Le linee nello spazio \$(x, y, t)\$ le cui tangenti in ogni punto materializzano la linea di tangenza tra tale cono ed i piani caratteristici sono responsabili, analogamente al caso monodimensionale, della trasmissione delle informazioni e sono dette *curve bicaratteristiche*. L'infinità di queste curve individua un *conoide caratteristico* (Fig. 1.2) che risponde al sistema di equazioni differenziali:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = u + n_x c \\ \frac{dy}{dt} = v + n_y c \end{cases}. \quad (1.46)$$

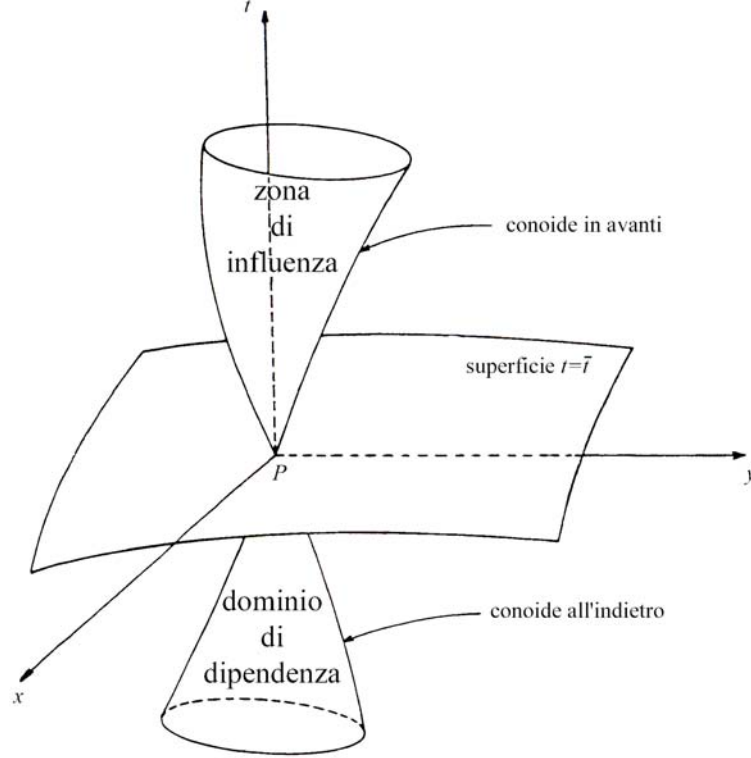


Figura 1.3: Zona di influenza e dominio di dipendenza relativi al punto P [104].

Sulle superfici caratteristiche appartenenti a questa classe vale la relazione di compatibilità [104]:

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{V} + c\boldsymbol{\nu}) \cdot \left(\text{grad } h + \frac{c}{g} \text{grad } u + \frac{c}{g} \text{grad } v \right) = \\
 = \frac{c}{gh} \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{S}^T - \frac{c^2}{g} \left[(1 + n_x^2) \frac{\partial u}{\partial x} - n_x n_y \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + (1 + n_y^2) \frac{\partial v}{\partial y} \right],
 \end{aligned} \tag{1.47}$$

indicata con $\boldsymbol{\nu} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \mid \boldsymbol{\nu}(t, x, y) = [0, n_x, n_y]$ la proiezione di \mathbf{n} sul piano fisico.

Fissato un punto P nello spazio (x, y, t) , ogni perturbazione provocata sulle variabili conservate $\mathbf{U}(t, x, y)$ in corrispondenza dell'istante $t = \bar{t}$ si propaga con fronti circolari e si risente in una regione $\mathfrak{S}(t, x, y)$, detta *zona di influenza*, circoscritta dal conoide caratteristico centrato in P e con generatrici dirette nel verso del tempo crescente. Invece, l'entità delle variabili conservate $\mathbf{U}(t, x, y)$ in corrispondenza del generico punto P nello spazio orario dipende dal valore che lo stesso vettore \mathbf{U} assume nei punti appartenenti ad una regione $D(t, x, y)$, detta *dominio di dipendenza*, individuata dal conoide caratteristico che, centrato in P , si sviluppa nel verso del tempo decrescente (Fig. 1.3).

Inoltre, se la direzione dei tempi tracciata dal solito punto P è contenuta nei relativi conoidi caratteristici, la corrente è *subcritica* (*lenta*) nello stesso punto, cioè è contraddistinta da numero

di Froude $Fr : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \mid Fr(t, x, y) = \frac{\sqrt{[u(t,x,y)]^2 + [v(t,x,y)]^2}}{c(t,x,y)}$ minore di 1; se è esterna ai conoidi è *supercritica (veloce)* con numero di Froude superiore a 1; se infine è tangente ai conoidi, tracciandone una generatrice, la corrente (a cui compete $Fr = 1$) è critica.

1.2.3 Il problema di Riemann bidimensionale

Con l'espressione "problema di *Riemann*" [118, 177, 179], si intende il problema matematico costituito da un sistema iperbolico di equazioni differenziali, nella fattispecie il sistema (1.10), corredato di una speciale condizione iniziale monodimensionale rappresentata da due distinti stati uniformi, per esempio lungo la direzione x , separati da una discontinuità:

$$\mathbf{U}(0, x, y) = \begin{cases} \mathbf{U}_l & \text{per } x < 0 \\ \mathbf{U}_r & \text{per } x > 0 \end{cases}, \quad (1.48)$$

dove $\mathbf{U}_l = [h_l, u_l h_l, v_l h_l]^T$ e $\mathbf{U}_r = [h_r, u_r h_r, v_r h_r]^T$ simboleggiano gli stati iniziali rispettivamente a sinistra e a destra dell'ascissa $x = 0$.

In particolare, quando la (1.48) si traduce in una condizione di discontinuità iniziale tra diversi livelli idrici, come appare di seguito:

$$h(0, x, y) = \begin{cases} h_l & \text{per } x < 0 \\ h_r & \text{per } x > 0 \end{cases}, \quad (1.49)$$

$$u(0, x, y) = \begin{cases} u_l = 0 & \text{per } x < 0 \\ u_r = 0 & \text{per } x > 0 \end{cases}, \quad (1.50)$$

$$v(0, x, y) = \begin{cases} v_l = 0 & \text{per } x < 0 \\ v_r = 0 & \text{per } x > 0 \end{cases}, \quad (1.51)$$

essendo $h_l \geq 0$, $h_r \geq 0$ e $h_l \neq h_r$, si parla di "problema di *dam-break*".

Il problema di *Riemann* piano si affronta sviluppando nella direzione x il problema *splitting* monodimensionale aumentato:

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{U} + \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \mathbf{0}, \quad (1.52)$$

$$\mathbf{U}(0, x) = \begin{cases} \mathbf{U}_l & \text{per } x < 0 \\ \mathbf{U}_r & \text{per } x > 0 \end{cases}, \quad (1.53)$$

la cui struttura ammette in ogni punto fisico l'interazione di tre onde che procedono a diversa velocità: due gravitazionali non lineari, a fronte ripido (*shock*) oppure di rarefazione (onda di *depressione*), attraverso cui si realizza rispettivamente un'accelerazione netta o graduale del fluido, una linearmente degenera (onda di *contatto*), la quale viene trasportata passivamente dal flusso e non riveste, pertanto, un ruolo dinamico nel processo di propagazione delle onde di gravità.

La strategia risolutiva consta di due stadi [118]:

- il riconoscimento della tipologia delle onde coinvolte, una volta nota la loro configurazione geometrica;

- il calcolo degli stati intermedi $\mathbf{U}_l^* = [h^*, u^* h^*, v_l^* h^*]^T$ e $\mathbf{U}_r^* = [h^*, u^* h^*, v_r^* h^*]^T$, separati dalla discontinuità di contatto, che si stabiliscono nella regione del piano orario (x, t) compresa tra le due onde di gravità (*star region*).

L'interazione e la sovrapposizione di queste onde, unitamente alla loro tendenza a deformarsi indipendentemente (per la non linearità delle equazioni) propagandosi a diverse velocità (finite), rendono il problema della loro ricostruzione piuttosto ostico e, nella maggior parte di casi, non risolvibile analiticamente [118]. Nel seguito si esaminano brevemente le proprietà di ogni singola tipologia di onde.

Onda di *shock*. Consiste in un'onda gravitazionale non lineare discontinua che separa due stati costanti \mathbf{U}^* e \mathbf{U}_l (\mathbf{U}_r), se associata all'autovettore $\mathbf{r}_{x_1}(\mathbf{U})$ ($\mathbf{r}_{x_3}(\mathbf{U})$). Poiché attraverso di essa valgono le relazioni di *Rankine-Hugoniot* [118, 139, 179]:

$$\mathbf{F}(\mathbf{U}^*) - \mathbf{F}(\bar{\mathbf{U}}) = s(\mathbf{U}^* - \bar{\mathbf{U}}), \quad (1.54)$$

che nel caso in studio si traducono nelle:

$$\begin{aligned} u^* h^* - \bar{u} \bar{h} &= s(h^* - \bar{h}), \\ (u^*)^2 h^* - \bar{u}^2 \bar{h} + \frac{1}{2}g \left[(h^*)^2 - \bar{h}^2 \right] &= s(u^* h^* - \bar{u} \bar{h}), \\ u^* v^* h^* - \bar{u} \bar{v} \bar{h} &= s(v^* h^* - \bar{v} \bar{h}), \end{aligned} \quad (1.55)$$

dove $s \in \mathbb{R}$ indica la velocità di propagazione dell'onda, si dispone di un sistema di tre equazioni in quattro incognite (h^* , u^* , v^* ed s) al fine della determinazione dello stato \mathbf{U}^* coniugato nello *shock* a quello noto $\bar{\mathbf{U}}$ (coincidente con \mathbf{U}_l o \mathbf{U}_r). Parametrizzando le (1.55) rispetto ad h^* , si ottiene [118, 179]:

$$\begin{aligned} s(h^*) &= \frac{u^* h^* - \bar{u} \bar{h}}{h^* - \bar{h}}, \\ u^*(h^*) &= \bar{u} \pm (h^* - \bar{h}) \sqrt{\frac{1}{2}g \frac{h^* + \bar{h}}{h^* \bar{h}}}, \\ v^* &= \bar{v}, \end{aligned} \quad (1.56)$$

da cui si deduce come la componente tangenziale della velocità (e gli scalari passivi in genere, trattati nel paragrafo 1.3) resti invariata attraverso lo *shock* ed esistano, al variare di $h^* \neq \bar{h}$, due famiglie di stati \mathbf{U}^* , detti luoghi di *Hugoniot* nello spazio delle fasi (h, uh) (una, associata all'autovettore $\mathbf{r}_{x_1}(\mathbf{U}^*)$, costituita dalla semplice infinità di stati coniugati a \mathbf{U}_l , l'altra, associata all'autovettore $\mathbf{r}_{x_3}(\mathbf{U}^*)$, formata invece dagli ∞^1 stati coniugati a \mathbf{U}_r) connessi tramite lo *shock* ad uno stato di riferimento $\bar{\mathbf{U}}$ (Fig. 1.4, a-b). Per $h^* = \bar{h}$, la seconda delle (1.56) si riduce ovviamente a: $u^* = \bar{u}$ ed i luoghi di *Hugoniot* ammettono come tangente l'autovettore relativo [118]. Del resto, varie altre parametrizzazioni si possono adottare per le (1.55); si cita, a titolo di esempio [179], quella che si può desumere in termini del numero

di *Froude* dello *shock* $F_s \in \mathbb{R} \mid F_s = s/\bar{c}$, essendo $\bar{c} = \sqrt{g\bar{h}}$:

$$\begin{aligned} h^*(F_s) &= \bar{h} \frac{-1 + \sqrt{1 + 8(\bar{F} - F_s)^2}}{2}, \\ u^*(F_s) &= \bar{u} - \bar{c} \left(1 - \frac{\bar{h}}{h^*}\right) (\bar{F} - F_s), \\ v^* &= \bar{v}, \end{aligned} \tag{1.57}$$

in cui $\bar{F} \in \mathbb{R} \mid \bar{F} = \bar{u}/\bar{c}$ rappresenta il numero di *Froude* dello stato noto $\bar{\mathbf{U}}$. Tuttavia, solo una porzione dei luoghi di *Hugoniot* è costituita da stati fisicamente realizzabili: infatti, hanno fondamento fisico solo quelli che assicurano un carattere compressivo allo *shock*, dando vita, sul piano orario (x, t) , a linee caratteristiche incidenti la retta $x/t = s$. A tal fine, essi devono soddisfare la condizione di entropia di *Lax* [118] che stabilisce, per l'onda di *shock* isolata eventualmente associata all'autovettore \mathbf{r}_{x_p} ($p = 1, 3$), che si propaga a velocità finita s e separa due stati costanti $\hat{\mathbf{U}}_l$ e $\hat{\mathbf{U}}_r$ giacenti sul medesimo luogo di *Hugoniot*:

$$\lambda_{x_p}(\hat{\mathbf{U}}_l) > s > \lambda_{x_p}(\hat{\mathbf{U}}_r), \tag{1.58}$$

e contemporaneamente:

$$\begin{aligned} \lambda_{x_k}(\hat{\mathbf{U}}_l) < s \quad \wedge \quad \lambda_{x_k}(\hat{\mathbf{U}}_r) < s \quad \text{per } k < p, \\ \lambda_{x_k}(\hat{\mathbf{U}}_l) > s \quad \wedge \quad \lambda_{x_k}(\hat{\mathbf{U}}_r) > s \quad \text{per } k > p. \end{aligned} \tag{1.59}$$

Ciò si traduce più semplicemente, per il problema monodimensionale aumentato alle acque basse, in una condizione sulle profondità idriche [118] (Fig. 1.4, a-b):

$$\begin{aligned} \text{per } p = 1 \quad (\textit{shock sinistro}) \quad h_r > h_l > 0, \\ \text{per } p = 3 \quad (\textit{shock destro}) \quad h_l > h_r > 0. \end{aligned} \tag{1.60}$$

In definitiva:

$$\mathbf{U}(t, x) = \begin{cases} \hat{\mathbf{U}}_l & \text{per } x/t \leq s \\ \hat{\mathbf{U}}_r & \text{per } x/t > s \end{cases}, \tag{1.61}$$

ed in particolare, nell'applicazione ai problemi di *Riemann* alle acque basse:

$$\text{se } h^* > h_l > 0 \quad (\textit{shock sinistro}) \quad \mathbf{U}(t, x) = \begin{cases} \mathbf{U}_l & \text{per } x/t \leq s \\ \mathbf{U}_l^* & \text{per } x/t > s \end{cases}, \tag{1.62}$$

$$\text{se } h^* > h_r > 0 \quad (\textit{shock destro}) \quad \mathbf{U}(t, x) = \begin{cases} \mathbf{U}_r^* & \text{per } x/t \leq s \\ \mathbf{U}_r & \text{per } x/t > s \end{cases}. \tag{1.63}$$

Onda di rarefazione. È una particolare onda semplice centrata associata ad uno dei due campi caratteristici non lineari del sistema (1.52), cioè un'onda regolare $\mathbf{U}(t, x) = \tilde{\mathbf{U}}(\xi(x/t))$ soluzione dello stesso sistema (1.52) di leggi di conservazione monodimensionale aumentato e parametrizzata mediante la mappa continua $\xi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \mid \xi = \xi(t, x)$, per la quale $\xi(t, x) = x/t$. Tutti gli stati facenti parte di un'onda semplice appartengono nel piano delle

fasi alla stessa curva integrale dell'autovettore $\mathbf{r}_{x_p}(\mathbf{U})$ ($p = 1, 3$), la quale è caratterizzata dal fatto che in ogni punto $\mathbf{U}(\xi(t, x))$ il vettore $d\mathbf{U}(\xi)/d\xi$ tangente alla curva coincide, a meno di un fattore numerico di proporzionalità $\alpha(\xi)$, col medesimo autovettore $\mathbf{r}_{x_p}(\mathbf{U}(\xi))$ corrispondente all'autovalore $\lambda_{x_p}(\mathbf{U}(\xi))$ ($p = 1, 3$) [118]:

$$\frac{d\mathbf{U}(\xi)}{d\xi} = \alpha(\xi) \mathbf{r}_{x_p}(\mathbf{U}(\xi)). \quad (1.64)$$

Specializzando la relazione precedente al caso delle equazioni (1.52) alle acque basse in termini delle grandezze primitive $\mathbf{W} = [h, u, v]^T$, fissati uno stato di riferimento $\overline{\mathbf{W}} = [\overline{h}, \overline{u}, \overline{v}]^T$ e $\alpha(\xi) = 1$, si ottiene [118, 179], per il campo caratteristico dell'autovettore \mathbf{r}_{x_1} , una parametrizzazione in funzione di h della relativa curva integrale (Fig 1.4, c):

$$u = \overline{u} + 2 \left(\sqrt{gh} - \sqrt{g\overline{h}} \right), \quad (1.65)$$

ed il risultato che la componente tangenziale v della velocità non risente del fenomeno ondoso in esame:

$$v = \overline{v}. \quad (1.66)$$

Similmente per il campo caratteristico dell'autovettore \mathbf{r}_{x_3} (Fig 1.4, d):

$$u = \overline{u} - 2 \left(\sqrt{gh} - \sqrt{g\overline{h}} \right), \quad (1.67)$$

$$v = \overline{v}. \quad (1.68)$$

Dalle (1.65) e (1.67) si evince che le quantità $w_{x_1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \mid w_{x_1}(\mathbf{U}(\xi(t, x))) = u + 2\sqrt{gh}$ e $w_{x_3} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \mid w_{x_3}(\mathbf{U}(\xi(t, x))) = u - 2\sqrt{gh}$, dette *invarianti di Riemann*, restano costanti attraverso le onde semplici rispettivamente associate a $\mathbf{r}_{x_1}(\mathbf{U}(\xi))$ e $\mathbf{r}_{x_3}(\mathbf{U}(\xi))$ e lungo le omologhe curve integrali, le quali si possono conseguentemente interpretare come curve di livello, sul piano delle fasi, delle stesse funzioni $w_{x_p}(\mathbf{U}(\xi))$ ($p = 1, 3$). Pertanto gli invarianti $w_{x_p}(\mathbf{U}(\xi))$ sono funzioni il cui gradiente è normale al corrispettivo autovettore $\mathbf{r}_{x_p}(\mathbf{U}(\xi))$ ($p = 1, 3$) per ogni $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^3$ [118]:

$$\text{grad } w_{x_p}(\mathbf{U}(\xi)) \cdot \mathbf{r}_{x_p}(\mathbf{U}(\xi)) = 0. \quad (1.69)$$

In definitiva, un'onda centrata di rarefazione isolata ha espressione [179], detti $\widehat{\mathbf{U}}_l$ e $\widehat{\mathbf{U}}_r$ due stati giacenti sulla stessa curva integrale:

$$\mathbf{U}(t, x) = \begin{cases} \widehat{\mathbf{U}}_l & \text{per } x/t \leq \lambda_{x_p}(\widehat{\mathbf{U}}_l) \\ \widetilde{\mathbf{U}}(x/t) & \text{per } \lambda_{x_p}(\widehat{\mathbf{U}}_l) \leq x/t \leq \lambda_{x_p}(\widehat{\mathbf{U}}_r) \\ \widehat{\mathbf{U}}_r & \text{per } x/t \geq \lambda_{x_p}(\widehat{\mathbf{U}}_r) \end{cases} \quad (p = 1, 3). \quad (1.70)$$

Inoltre l'assunzione: $\lambda_{x_p}(\widehat{\mathbf{U}}_l) < \lambda_{x_p}(\widehat{\mathbf{U}}_r)$ ($p = 1, 3$), oltre a garantire che nella regione del piano orario interessata dall'onda le curve caratteristiche siano rette divergenti dall'origine,

permette di isolare la porzione di curva integrale luogo degli stati a cui si può attribuire senso fisico [118] (Fig. 1.4, c-d). In particolare, nell'applicazione ai problemi di *Riemann* alle acque basse:

se $h_l \geq h^* > 0$ (rarefazione sinistra):

$$\mathbf{W}(t, x) = \begin{cases} \mathbf{W}_l = [h_l, u_l, v_l]^T & \text{per } x/t \leq u_l - c_l \\ \widetilde{\mathbf{W}}_l(x/t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{9g} \left(u_l + 2c_l - \frac{x}{t} \right)^2 \\ \frac{1}{3} \left(u_l + 2c_l + 2\frac{x}{t} \right) \\ v_l \end{bmatrix} & \text{per } u_l - c_l \leq x/t \leq u^* - c^* \text{ ,} \\ \mathbf{W}_l^* = [h^*, u^*, v_l^*]^T & \text{per } x/t \geq u^* - c^* \end{cases} \quad (1.71)$$

se $h_r \geq h^* > 0$ (rarefazione destra):

$$\mathbf{W}(t, x) = \begin{cases} \mathbf{W}_r^* = [h^*, u^*, v_r^*]^T & \text{per } x/t \leq u^* + c^* \\ \widetilde{\mathbf{W}}_r(x/t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{9g} \left(-u_r + 2c_r + \frac{x}{t} \right)^2 \\ \frac{1}{3} \left(u_r - 2c_r + 2\frac{x}{t} \right) \\ v_l \end{bmatrix} & \text{per } u^* + c^* \leq x/t \leq u_r + c_r \text{ .} \\ \mathbf{W}_r = [h_r, u_r, v_r]^T & \text{per } x/t \geq u_r + c_r \end{cases} \quad (1.72)$$

Onda di contatto. Trattasi di un'onda linearmente degenere associata al campo caratteristico dell'autovettore $\mathbf{r}_{x_2}(\mathbf{U})$, per la quale la velocità caratteristica $\lambda_{x_2}(\mathbf{U})$ è costante su ogni curva integrale (assumendo chiaramente valori distinti da curva a curva). I due stati iniziali discontinui \mathbf{U}_l^* e \mathbf{U}_r^* coniugati nell'onda appartengono pertanto alla stessa curva integrale, che assume anche le prerogative di luogo di *Hugoniot* [118]: ciò implica che tale onda si comporti linearmente trasferendo senza deformarsi, con velocità $\lambda_{x_2}(\mathbf{U}_l^*) = \lambda_{x_2}(\mathbf{U}_r^*)$, la sola variazione discontinua della componente tangenziale v della velocità, che si comporta come uno scalare passivo. Di conseguenza, sul piano orario (x, t) , le linee caratteristiche risultano parallele alla retta rappresentativa dell'onda stessa. Per il problema in esame:

$$v(t, x) = \begin{cases} v_l^* = v_l & \text{per } x/t \leq u^* \\ v_r^* = v_r & \text{per } x/t > u^* \end{cases} \quad (1.73)$$

Nella fattispecie, la soluzione del problema di *dam-break* ai valori iniziali (1.49)-(1.50)-(1.51) con $h_l > h_r > 0$ [161] consiste nell'unica combinazione di onde gravitazionali che sia fisicamente plausi-

bile e che rispetti l'*entropy condition* di Lax, cioè un'onda di depressione seguita da un'onda a fronte ripido, separate dalla *star region* caratterizzata da valori intermedi costanti delle variabili primitive $\mathbf{W}^* = [h^*, u^*, v^*]^T$, ove $v^* = v_l^* = v_r^* = 0$ (Fig. 1.5). Gli stati \mathbf{U}_l e $\mathbf{U}^* = [h^*, u^*h^*, v^*h^*]^T$ appartengono alla curva integrale dell'autovettore \mathbf{r}_{x_1} ; pertanto tra essi intercorre il legame seguente, espresso in funzione delle grandezze primitive:

$$u^* = u_l + 2 \left(\sqrt{gh_l} - \sqrt{gh^*} \right); \quad (1.74)$$

inoltre lo stato \mathbf{U}^* giace sul luogo di *Hugoniot* passante per \mathbf{U}_r ; quindi:

$$u^* = u_r + (h^* - h_r) \sqrt{\frac{g}{2} \left(\frac{1}{h^*} + \frac{1}{h_r} \right)}. \quad (1.75)$$

Le due relazioni precedenti costituiscono un sistema di due equazioni nelle due incognite h^* e u^* che può essere facilmente ridotto, mediante eliminazione di u^* , ad una equazione algebrica non lineare in h^* [118,179].

Per un problema di *Riemann* del tutto generale [118, 130, 172, 173, 177, 179], la scelta della combinazione di onde dipende dal caso specifico in esame; i valori delle variabili primitive h^* e u^* nella *star region* scaturiscono dalla risoluzione numerica (ad esempio [135, 179] mediante lo schema iterativo di *Newton-Raphson*) dell'equazione algebrica non lineare:

$$f(h^*) = u_l^*(h^*) - u_r^*(h^*) = 0, \quad (1.76)$$

dove:

$$u_l^*(h^*) = \begin{cases} u_l + 2 \left(\sqrt{gh_l} - \sqrt{gh^*} \right) & \text{se } h^* \leq h_l \quad (\text{rarefazione}) \\ u_l - (h^* - h_l) \sqrt{\frac{g}{2} \left(\frac{1}{h^*} + \frac{1}{h_l} \right)} & \text{se } h^* > h_l \quad (\text{shock}) \end{cases}, \quad (1.77)$$

$$u_r^*(h^*) = \begin{cases} u_r - 2 \left(\sqrt{gh_r} - \sqrt{gh^*} \right) & \text{se } h^* \leq h_r \quad (\text{rarefazione}) \\ u_r + (h^* - h_r) \sqrt{\frac{g}{2} \left(\frac{1}{h^*} + \frac{1}{h_r} \right)} & \text{se } h^* > h_r \quad (\text{shock}) \end{cases}.$$

La soluzione della (1.76), per opportune combinazioni dei dati che soddisfino alla *condizione di positività della profondità idrica*:

$$2 \left(\sqrt{gh_l} + \sqrt{gh_r} \right) > u_r - u_l, \quad (1.78)$$

esiste ed è unica [177,179], essendo $f(h^*)$ funzione di variabile reale, continua per $h^* > 0$, monotona crescente con concavità rivolta verso il basso.

Nelle Figg. 1.4 e 1.5 sono riportati i luoghi di *Hugoniot* e le curve integrali che concorrono alla costruzione della soluzione del problema di *Riemann* con le condizioni iniziali (1.49)-(1.50)-(1.51) unite all'assunzione: $h_l = 3.0$ m, $h_r = 1.0$ m. In Fig. 1.6 è sintetizzata la struttura ondosa del fenomeno.

Caso speciale del problema di *Riemann* (1.52)-(1.53) si verifica quando alcune regioni del dominio fisico siano inizialmente asciutte oppure lo diventino in seguito di fenomeni di interazione

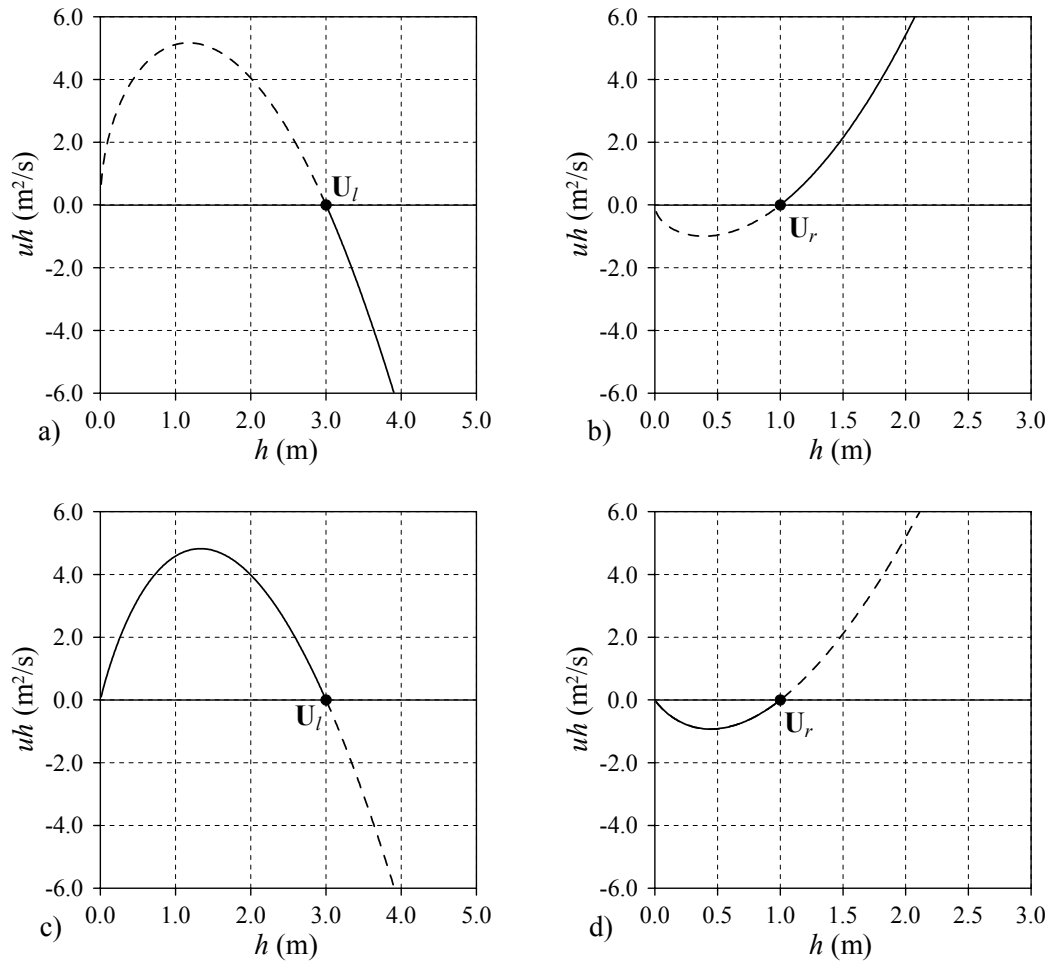


Figura 1.4: Problema di dam-break con $h_l = 3.0\text{m}$ e $h_r = 1.0\text{m}$: a) luogo di Hugoniot connesso con lo stato sinistro \mathbf{U}_l , b) luogo di Hugoniot connesso con lo stato destro \mathbf{U}_r , c) curva integrale connessa con lo stato \mathbf{U}_l , d) curva integrale connessa con lo stato \mathbf{U}_r . In tratteggio gli stati che non soddisfano l'entropy-condition.

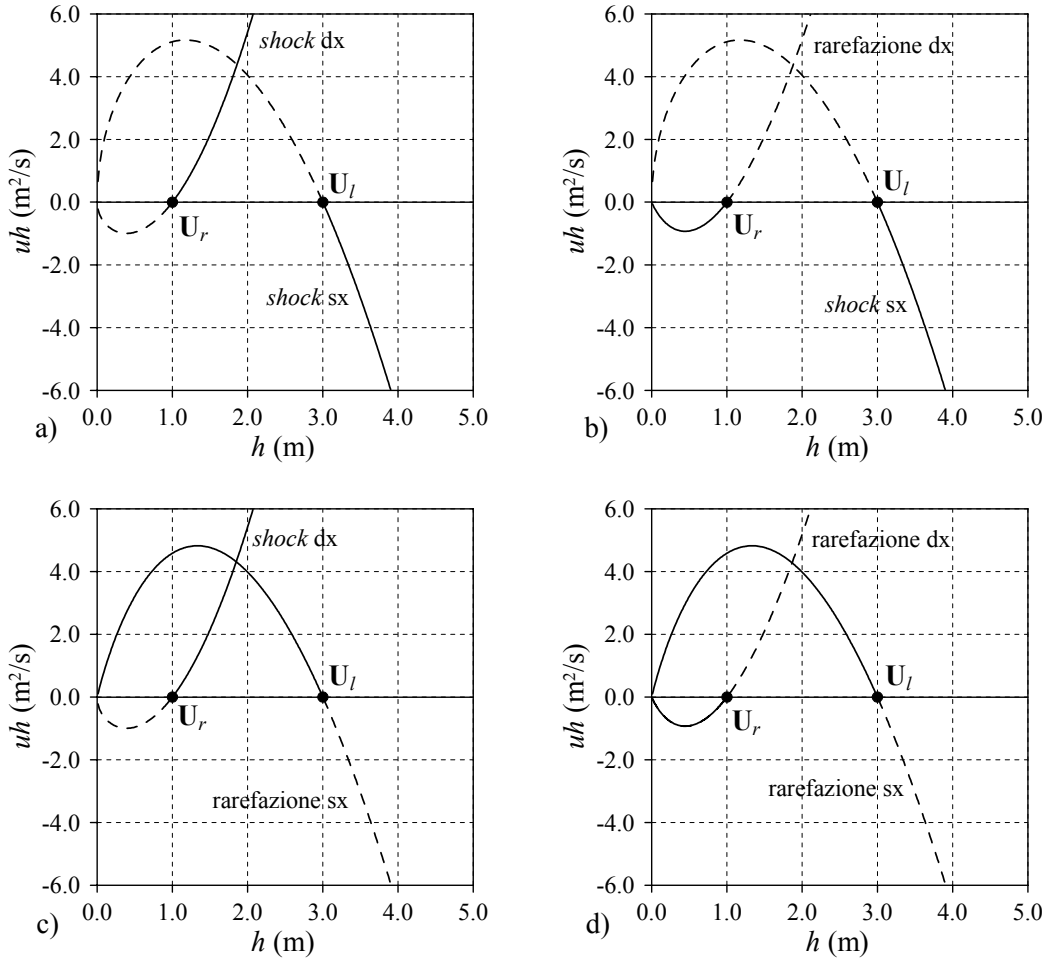


Figura 1.5: Costruzione della soluzione del problema di dam-break con $h_l = 3.0$ m e $h_r = 1.0$ m: a) coppia di shocks, b) shock sinistro e rarefazione destra, c) rarefazione sinistra e shock destro, d) coppia di rarefazioni. Solo il caso c) ha validità fisica.

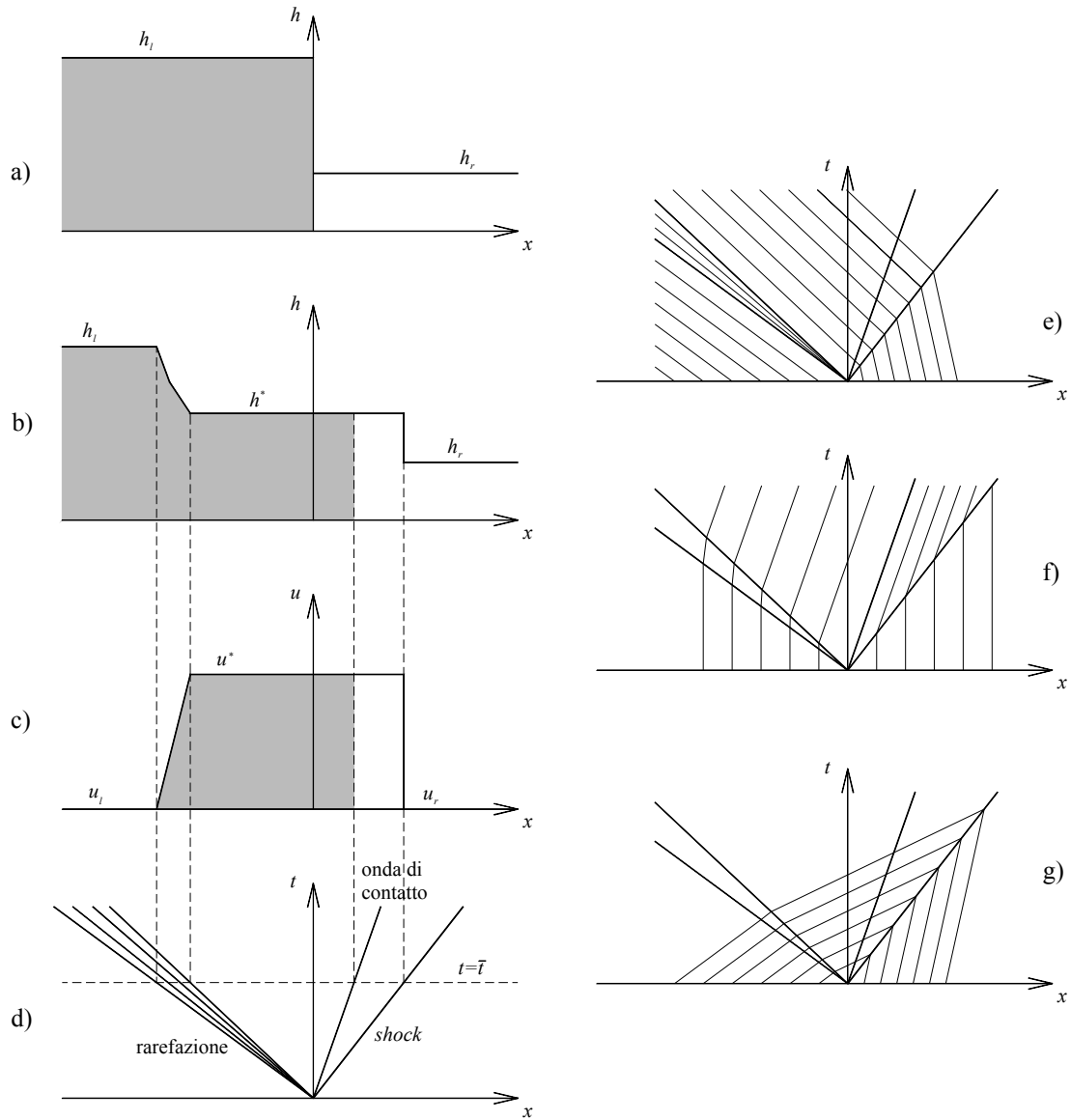


Figura 1.6: Evoluzione del problema di dam-break: a) condizione iniziale, b) profilo di altezze d'acqua all'istante $t = \bar{t}$, c) profilo di velocità all'istante $t = \bar{t}$, d) diagramma d'onda del fenomeno nel piano (x, t) . Linee caratteristiche per i campi associati agli autovettori: e) r_{x_1} , f) r_{x_2} , g) r_{x_3} .

tra onde [177, 179]. La struttura del problema muta profondamente dal momento che non esiste la *star region* e non può svilupparsi un'onda a fronte ripido al confine tra le zone bagnata ed asciutta, laddove invece si riscontra una discontinuità di contatto.

Infatti, la soluzione al problema (1.52), accostato alle condizioni iniziali (1.49)-(1.50)-(1.51) ove si ponga $h_l = 0$ (o in alternativa $h_r = 0$), si riduce all'onda di depressione associata all'autovalore sinistro (destro) $\lambda_{x_1} = u - c$ ($\lambda_{x_3} = u + c$) e delimitata dal fronte idrico a cui compete, per la (1.74), la velocità:

$$s_l^*: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \mid s_l^*(t, x, y) = u_l + 2\sqrt{gh_l} \quad (s_r^*: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \mid s_r^*(t, x, y) = u_r - 2\sqrt{gh_r}). \quad (1.79)$$

Le (1.71)-(1.72) si modificano come di seguito, raggruppando il vettore $\mathbf{W}_0 = [0, 0, 0]^T$ le grandezze primitive relative alla regione asciutta:

se $h_l > h_r = 0$ (rarefazione sinistra):

$$\mathbf{W}(t, x) = \begin{cases} \mathbf{W}_l & \text{per } x/t \leq u_l - c_l \\ \widetilde{\mathbf{W}}_l(x/t) & \text{per } u_l - c_l \leq x/t \leq s_l^* \\ \mathbf{W}_0 & \text{per } x/t \geq s_l^* \end{cases}, \quad (1.80)$$

se $h_r > h_l = 0$ (rarefazione destra):

$$\mathbf{W}(t, x) = \begin{cases} \mathbf{W}_0 & \text{per } x/t \leq s_r^* \\ \widetilde{\mathbf{W}}_r(x/t) & \text{per } s_r^* \leq x/t \leq u_r + c_r \\ \mathbf{W}_r & \text{per } x/t \geq u_r + c_r \end{cases}, \quad (1.81)$$

mentre la (1.73) diventa:

$$\text{se } h_l > h_r = 0 \text{ (rarefazione sinistra)} \quad v(t, x) = \begin{cases} v_l & \text{per } x/t \leq s_l^* \\ v_r = 0 & \text{per } x/t > s_l^* \end{cases}, \quad (1.82)$$

$$\text{se } h_r > h_l = 0 \text{ (rarefazione destra)} \quad v(t, x) = \begin{cases} v_l = 0 & \text{per } x/t \leq s_r^* \\ v_r & \text{per } x/t > s_r^* \end{cases}. \quad (1.83)$$

Nel caso in cui la coesistenza di due stati iniziali (1.48) contravvenga alla *condizione di positività della profondità idrica* (1.78), si verifica l'asciugamento di un'area compresa tra due onde di rarefazione relative rispettivamente agli autovalori λ_{x_1} e λ_{x_3} ; i fronti che la racchiudono assumono velocità s_l^* e s_r^* che soddisfano la disequazione: $s_l^* \leq s_r^*$, in linea con la (1.78). Pertanto:

$$\mathbf{W}(t, x) = \begin{cases} \mathbf{W}_l & \text{per } x/t \leq u_l - c_l \\ \widetilde{\mathbf{W}}_l(x/t) & \text{per } u_l - c_l \leq x/t \leq s_l^* \\ \mathbf{W}_0 & \text{per } s_l^* \leq x/t \leq s_r^* \\ \widetilde{\mathbf{W}}_r(x/t) & \text{per } s_r^* \leq x/t \leq u_r + c_r \\ \mathbf{W}_r & \text{per } x/t \geq u_r + c_r \end{cases}, \quad (1.84)$$

$$v(t, x) = \begin{cases} v_l & \text{per } x/t \leq s_l^* \\ 0 & \text{per } s_l^* \leq x/t \leq s_r^* \\ v_r & \text{per } x/t \geq s_r^* \end{cases} . \quad (1.85)$$

In definitiva, per un andamento continuo dell'altezza idrica con la coordinata spaziale x , si riscontra una discontinuità sul profilo di velocità il quale, in corrispondenza del fronte, registra un repentino abbassamento dal valore massimo a quello nullo, accentuando di fatto le difficoltà numeriche che implica la procedura di previsione della posizione dei contorni mobili tra zone bagnate ed asciutte del campo di moto. Inoltre, la condizione di stabilità degli schemi di calcolo che provvedono all'integrazione delle (1.10) risente considerevolmente delle proprietà dei fronti di bagnamento/asciugamento, come si discuterà nel paragrafo 2.2.3.

Spesso risolvere esattamente il problema di *Riemann* può risultare dispendioso dal punto di vista dell'impiego delle risorse di calcolo: per questo generalmente si ricorre a solutori approssimati che garantiscono risultati accettabili nonostante una semplificazione della procedura computazionale. I *Riemann solvers* esatti possono tuttavia trovare frequente applicazione locale in alcuni metodi numerici [46, 82] e nei processi di verifica delle prestazioni e dell'affidabilità dei codici stessi.

1.2.4 L'invarianza rotazionale

Definito un volume di controllo piano Ω delimitato da un contorno chiuso $\partial\Omega$ fisso rispetto al sistema di riferimento cartesiano ortogonale (O, x, y) , il sistema omogeneo (1.16), per ogni $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^3$ e per ogni direzione individuata dal versore $\mathbf{v} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \mid \mathbf{v}(\theta) = [v_x, v_y] = [\cos \theta, \sin \theta]$ perpendicolare al bordo $\partial\Omega$ (essendo $\theta \in \mathbb{R}$ l'angolo formato dallo stesso versore con la direzione x), gode della seguente proprietà, detta di *invarianza rotazionale* [177, 179]:

$$\mathbf{v}(\theta) \cdot [\mathbf{F}(\mathbf{U}), \mathbf{G}(\mathbf{U})] = \mathbf{T}(\theta)^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{T}(\theta) \mathbf{U}), \quad (1.86)$$

dove $\mathbf{T} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3} \mid \mathbf{T} = \mathbf{T}(\theta)$ indica la matrice di rotazione di $\mathbf{v}(\theta)$ e $\mathbf{T}(\theta)^{-1}$ la sua inversa:

$$\mathbf{T}(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}(\theta)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}. \quad (1.87)$$

Come si vedrà oltre nel paragrafo 2.2.6, questa proprietà riveste un'importanza notevole nel processo di sviluppo di codici numerici basati su una discretizzazione spaziale attuata mediante griglia di calcolo strutturata non cartesiana (ad elementi quadrilateri), cioè caratterizzata da linee coordinate non disposte secondo le direzioni di riferimento del sistema cartesiano.

1.3 Il trasporto di scalari passivi

Le equazioni differenziali bidimensionali “alle acque basse” possono essere utilizzate per interpretare matematicamente fenomeni di trasporto di *scalari passivi* (traccianti, sostanze inquinanti, ecc.).

Detta $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \mid \phi = \phi(t, x, y)$ la concentrazione del singolo scalare passivo, espressa in unità di massa per unità di volume, il sistema di tre equazioni differenziali in tre funzioni incognite (1.10) viene completato dall'equazione lineare di advezione a coefficienti variabili:

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi + u \frac{\partial}{\partial x} \phi + v \frac{\partial}{\partial y} \phi = 0, \quad (1.88)$$

che esprime il principio di conservazione della massa del tracciante e contemporaneamente stabilisce l'ininfluenza esercitata dallo stesso sulla dinamica del fluido, il quale passivamente trasporta ogni variazione registrata dalla funzione ϕ . Pertanto, la legge di conservazione (1.10) mantiene la propria validità formale con le definizioni seguenti per il vettore delle variabili conservate e per le funzioni di flusso: $\mathbf{U} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4 \mid \mathbf{U}(t, x, y) = [h, uh, vh, \phi h]^T$, $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4 \mid \mathbf{F}(\mathbf{U}(t, x, y)) = [uh, u^2h + \frac{1}{2}gh^2, uwh, uh\phi]^T$, $\mathbf{G} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4 \mid \mathbf{G}(\mathbf{U}(t, x, y)) = [vh, uvh, v^2h + \frac{1}{2}gh^2, v\phi]^T$.

Nella nuova struttura caratteristica delle equazioni, le matrici jacobiane \mathbf{A} e \mathbf{B} delle trasformazioni $\mathbf{F}(\mathbf{U})$ e $\mathbf{G}(\mathbf{U})$ rispettivamente appaiono come di seguito:

$$\mathbf{A} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^{4 \times 4} \mid \mathbf{A}(\mathbf{U}(t, x, y)) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -u^2 + gh & 2u & 0 & 0 \\ -uv & v & u & 0 \\ -u\phi & \phi & 0 & u \end{bmatrix}, \quad (1.89)$$

$$\mathbf{B} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^{4 \times 4} \mid \mathbf{B}(\mathbf{U}(t, x, y)) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -uv & v & u & 0 \\ -v^2 + gh & 0 & 2v & 0 \\ -v\phi & 0 & \phi & v \end{bmatrix}. \quad (1.90)$$

Dalla matrice $\mathbf{A}(\mathbf{U})$ si desumono gli autovalori $\lambda_{x_i} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \mid \lambda_{x_i} = \lambda_{x_i}(\mathbf{U}(t, x, y))$, ($i = 1, \dots, 4$):

$$\lambda_{x_1} = u - c, \quad \lambda_{x_2} = \lambda_{x_3} = u, \quad \lambda_{x_4} = u + c, \quad (1.91)$$

ed i corrispondenti autovettori destri (a meno di fattori numerici di scala) $\mathbf{r}_{x_i} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4 \mid \mathbf{r}_{x_i} = \mathbf{r}_{x_i}(\mathbf{U}(t, x, y))$, ($i = 1, \dots, 4$):

$$\mathbf{r}_{x_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ u - c \\ v \\ \phi \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_{x_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_{x_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_{x_4} = \begin{bmatrix} 1 \\ u + c \\ v \\ \phi \end{bmatrix}. \quad (1.92)$$

Uguualmente per la matrice $\mathbf{B}(\mathbf{U})$:

$$\lambda_{y_1} = v - c, \quad \lambda_{y_2} = \lambda_{y_3} = v, \quad \lambda_{y_4} = v + c, \quad (1.93)$$

$$\mathbf{r}_{y_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ u \\ v - c \\ \phi \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_{y_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_{y_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_{y_4} = \begin{bmatrix} 1 \\ u \\ v + c \\ \phi \end{bmatrix}. \quad (1.94)$$

I campi caratteristici contrassegnati dai pedici 1 e 4 corrispondono ad onde non lineari attraverso cui la variabile primitiva ϕ rimane invariata. Invece i campi caratteristici 2 e 3 sono linearmente degeneri ed il relativo salto nella funzione ϕ (*discontinuità di contatto*) si trasferisce alla velocità individuata dal corrispondente autovalore (che ha molteplicità 2) [118].

Tali aspetti teorici sono del tutto analoghi a quelli (esaminati nel paragrafo 1.2.3) che contraddistinguono le equazioni bidimensionali “alle acque basse” applicate ad un problema monodimensionale lungo una direzione coordinata (sistema *augmentato*), ove la componente tangenziale della velocità svolge il ruolo di uno scalare passivo [177, 179].

Il problema di *Riemann* che scaturisce dall'unione dell'espressione differenziale (1.10), aggiornata dalle definizioni su riportate, con la condizione iniziale (1.48), viene appunto risolto affrontando il corrispondente problema *splitting* (lungo la direzione x) monodimensionale aumentato, in cui sia la componente v della velocità del fluido che la concentrazione volumetrica ϕ di tracciante vengono trattati come scalari passivi.

Per il dato iniziale:

$$\phi(0, x, y) = \begin{cases} \phi_l & \text{per } x < 0 \\ \phi_r & \text{per } x > 0 \end{cases}, \quad (1.95)$$

accostato alle (1.49)-(1.50)-(1.51), si conclude che la funzione ϕ si mantiene uniforme variando in maniera discontinua solo attraverso l'onda di contatto $x/t = u^*$:

$$\phi(t, x, y) = \begin{cases} \phi_l & \text{per } x/t \leq u^* \\ \phi_r & \text{per } x/t > u^* \end{cases}. \quad (1.96)$$

Qualora si verifichi l'uguaglianza a zero di h_r ($\phi_r = 0$), la discontinuità che separa gli stati ϕ_l e ϕ_r procede sovrapposta al fronte di asciugamento/bagnamento con velocità s_l^* :

$$\phi(t, x, y) = \begin{cases} \phi_l & \text{per } x/t \leq s_l^* \\ \phi_r = 0 & \text{per } x/t > s_l^* \end{cases}. \quad (1.97)$$

Analogamente, nel caso in cui $h_l = \phi_l = 0$:

$$\phi(t, x, y) = \begin{cases} \phi_l = 0 & \text{per } x/t \leq s_r^* \\ \phi_r & \text{per } x/t > s_r^* \end{cases}. \quad (1.98)$$

Infine, se l'assunzione (1.48) configura l'interazione tra stati idrici non consistenti con la condizione (1.78), la funzione ϕ si distribuisce spazialmente secondo tre stati uniformi separati da due onde di contatto:

$$\phi(t, x, y) = \begin{cases} \phi_l & \text{per } x/t \leq s_l^* \\ 0 & \text{per } s_l^* < x/t < s_r^* \\ \phi_r & \text{per } x/t \geq s_r^* \end{cases}. \quad (1.99)$$

Si noti come molti codici numerici ricostruiscono in modo poco accurato il trasporto di scalari passivi, specialmente in corrispondenza di discontinuità (paragrafo 3.1.1).

Lo stesso sistema differenziale (1.10), accoppiato ad un'equazione di continuità della fase solida e ad un'equazione di variazione nel tempo della geometria del fondo, che facciano uso di un'espressione provata empiricamente per la valutazione del tasso di erosione-deposito, permette di modellare l'evoluzione di un fenomeno idrico accompagnato da trasporto solido e da variazione della morfologia del fondo, qualora sia necessario intenderlo mobile [18, 40, 43, 69, 127, 187].

Capitolo 2

La soluzione numerica delle equazioni

Il presente capitolo riassume i concetti che stanno alla base dell'applicazione dei metodi cosiddetti "ai volumi finiti" [128, 131] per la risoluzione numerica dei problemi retti da sistemi non lineari di equazioni differenziali alle derivate parziali di tipo iperbolico [10, 47, 67, 84, 99, 118, 138, 151, 157, 177, 179]. La flessibilità legata alla possibilità di operare su volumi di controllo di forma arbitraria [177, 185, 186] e la validità delle proprietà di conservazione a livello discreto [99, 118] costituiscono le peculiarità fondamentali che hanno determinato recentemente la larga diffusione di questa metodologia.

Si espongono, inoltre, le caratteristiche matematiche di tre particolari schemi conservativi [177, 179, 212, 213], nonché la logica di trattamento dei contributi provenienti dai termini sorgente [32, 136, 188, 189] e le modalità operative di introduzione delle condizioni al contorno in presenza di domini spaziali limitati [7, 118, 177, 179].

Si discutono successivamente le proprietà di accuratezza, consistenza, convergenza e stabilità dei metodi descritti [98, 99, 118, 135], al fine di assegnare un grado di confidenza ai risultati del calcolo.

Infine, si dedica un cenno all'adattamento di tali schemi a situazioni in cui si ricorra ad una discretizzazione spaziale attuata mediante griglia strutturata non cartesiana [177].

2.1 Il metodo ai volumi finiti

La formulazione generale del metodo ai volumi finiti su dominio bidimensionale, applicato alla risoluzione di problemi iperbolici codificati da leggi di conservazione espresse in forma integrale, si fonda sull'idea di approssimare il valore assunto dalla variabile conservata $\mathbf{U}(t, x, y)$ sull'elemento di controllo, di assegnarlo al suo baricentro e di aggiornarlo nel tempo, in assenza di termini forzanti, mediante opportune funzioni di flusso numerico collocate sui bordi dell'elemento stesso [118, 179].

Eseguita una partizione cartesiana del campo bidimensionale Ω di calcolo:

$$X \times Y = \{X_i \mid x_{i-1/2} \leq x \leq x_{i+1/2}, \quad i = 1, \dots, n_x\} \times \{Y_j \mid y_{j-1/2} \leq y \leq y_{j+1/2}, \quad j = 1, \dots, n_y\},$$

con $x_{i+1/2} = x_{i-1/2} + \Delta x, \quad \forall i$ e $y_{i+1/2} = y_{i-1/2} + \Delta y, \quad \forall j,$

(2.1)

a costituire un reticolo formato da un insieme $C = \{C_{i,j}, i = 1, \dots, n_x, j = 1, \dots, n_y\}$ di $n_x \cdot n_y$ celle rettangolari uniformi delimitate da lati che appartengono all'insieme:

$$L = \{l_{i,j+1/2}, i = 1, \dots, n_x, j = 0, \dots, n_y\} \cup \{l_{i+1/2,j}, i = 0, \dots, n_x, j = 1, \dots, n_y\}, \quad (2.2)$$

il valore medio della variabile $\mathbf{U}(t_n, x, y)$ all'istante t_n ($n \in \mathbb{N}$) sull'elemento di griglia identificato dalla coppia di coordinate (i, j) si scrive:

$$\mathbf{U}_{i,j}^n \approx \frac{1}{C_{i,j}} \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \mathbf{U}(t_n, x, y) \, dx dy, \quad (i = 1, \dots, n_x, j = 1, \dots, n_y). \quad (2.3)$$

Si parla, in tal caso, di schemi *cell-centered* [99]. Schemi nei quali si adotti la stessa procedura sugli elementi di controllo di una griglia T duale della C (cioè tale per cui valga una corrispondenza biunivoca tra centri e vertici delle rispettive partizioni) prendono invece il nome di *vertex-centered*. Soluzioni che collochino i vari gradi di libertà del sistema su due griglie distinte, l'una duale dell'altra, danno vita a schemi detti *staggered* [99, 143, 199].

Le equazioni di conservazione in forma integrale (1.11), quando $\mathbf{S}(t, x, y) = \mathbf{0}$, si traducono, a livello discreto, nella relazione:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \mathbf{U}(t, x, y) \, dx dy = \\ & = \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} \mathbf{F}(\mathbf{U}(t, x_{i-1/2}, y)) \, dy - \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} \mathbf{F}(\mathbf{U}(t, x_{i+1/2}, y)) \, dy + \\ & + \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \mathbf{G}(\mathbf{U}(t, x, y_{j-1/2})) \, dx - \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \mathbf{G}(\mathbf{U}(t, x, y_{j+1/2})) \, dx ; \end{aligned} \quad (2.4)$$

dopo semplici manipolazioni si ottiene:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{C_{i,j}} \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \mathbf{U}(t_{n+1}, x, y) \, dx dy - \frac{1}{C_{i,j}} \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \mathbf{U}(t_n, x, y) \, dx dy = \\ & = \frac{1}{C_{i,j}} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left[\int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} \mathbf{F}(\mathbf{U}(t, x_{i-1/2}, y)) \, dy \right] dt - \frac{1}{C_{i,j}} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left[\int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} \mathbf{F}(\mathbf{U}(t, x_{i+1/2}, y)) \, dy \right] dt + \\ & + \frac{1}{C_{i,j}} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left[\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \mathbf{G}(\mathbf{U}(t, x, y_{j-1/2})) \, dx \right] dt - \frac{1}{C_{i,j}} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left[\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \mathbf{G}(\mathbf{U}(t, x, y_{j+1/2})) \, dx \right] dt, \end{aligned} \quad (2.5)$$

e di seguito:

$$\mathbf{U}_{i,j}^{adv} = \mathbf{U}_{i,j}^n - \frac{\Delta t_n}{\Delta x} (\mathbf{f}_{i+1/2,j} - \mathbf{f}_{i-1/2,j}) - \frac{\Delta t_n}{\Delta y} (\mathbf{g}_{i,j+1/2} - \mathbf{g}_{i,j-1/2}), \quad (2.6)$$

dove $\mathbf{U}_{i,j}^{adv}$ denota il risultato dell'algoritmo di aggiornamento che proviene dalla discretizzazione

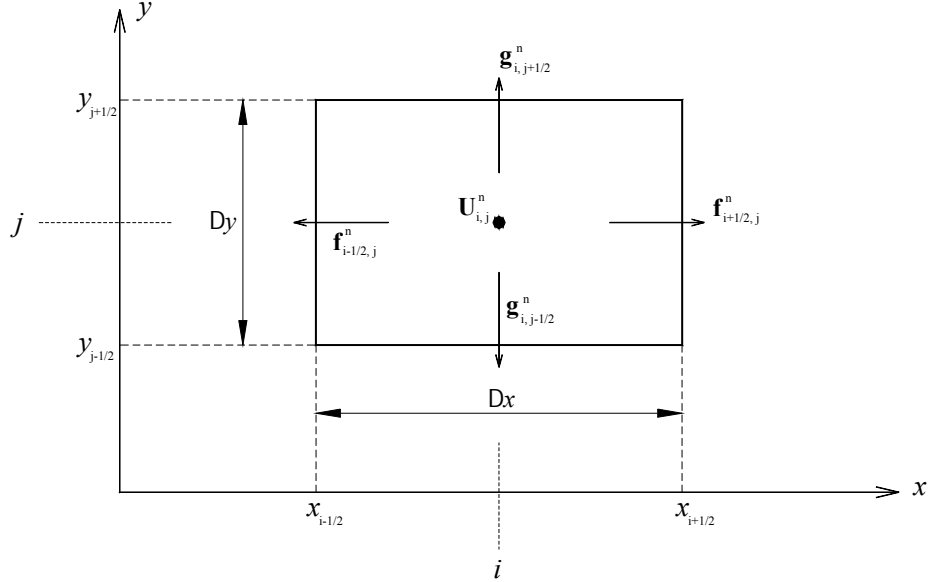


Figura 2.1: Discretizzazione cartesiana *cell-centered* ai volumi finiti del dominio di calcolo: elemento tipo $C_{i,j}$ con i relativi flussi intercella.

della parte omogenea delle (1.11); inoltre le funzioni di flusso numerico:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{i+1/2,j} &\approx \frac{1}{\Delta t_n \Delta y} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left[\int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} \mathbf{F}(\mathbf{U}(t, x_{i+1/2}, y)) dy \right] dt, \\ \mathbf{g}_{i,j+1/2} &\approx \frac{1}{\Delta t_n \Delta x} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left[\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \mathbf{G}(\mathbf{U}(t, x, y_{j+1/2})) dx \right] dt, \end{aligned} \quad (2.7)$$

approssimano i flussi attraverso i lati $l_{i+1/2,j}$ e $l_{i,j+1/2}$, $\Delta t_n = t_{n+1} - t_n$ indica l'incremento temporale al passo n -esimo di calcolo, mentre $\Delta x = x_{i+1/2} - x_{i-1/2}$ e $\Delta y = y_{j+1/2} - y_{j-1/2}$ ($i = 1, \dots, n_x$, $j = 1, \dots, n_y$) rappresentano le dimensioni del generico elemento $C_{i,j} = \Delta x \cdot \Delta y$ lungo le due direzioni coordinate (Fig. 2.1).

Se $\mathbf{f}_{i+1/2,j}$ e $\mathbf{g}_{i,j+1/2}$ si esprimono in funzione dei valori medi \mathbf{U}_{ij}^n al tempo t_n :

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{i+1/2,j} &= \mathbf{f}_{i+1/2,j} \left(\mathbf{U}_{i-k_l,j}^n, \dots, \mathbf{U}_{i+k_r,j}^n \right) = \mathbf{f}_{i+1/2,j}^n \\ \mathbf{g}_{i,j+1/2} &= \mathbf{g}_{i,j+1/2} \left(\mathbf{U}_{i,j-k_l}^n, \dots, \mathbf{U}_{i,j+k_r}^n \right) = \mathbf{g}_{i,j+1/2}^n \end{aligned} \quad k_l, k_r \in \mathbb{N}, \quad (2.8)$$

si estrae dalla (2.6) un algoritmo esplicito *unsplit* completamente discretizzato *flux-differencing* per l'aggiornamento temporale all'istante t_{n+1} . L'approccio di discretizzazione su esposto non è certamente l'unico praticabile. Infatti, metodi semidiscreti [98, 118] si riconducono all'equazione

differenziale ordinaria nella variabile tempo:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{U}_{ij}(t) = -\frac{1}{\Delta x} (\mathbf{f}_{i+1/2,j}(t) - \mathbf{f}_{i-1/2,j}(t)) - \frac{1}{\Delta y} (\mathbf{g}_{i,j+1/2}(t) - \mathbf{g}_{i,j-1/2}(t)), \quad (2.9)$$

da risolvere tipicamente con la metodologia multistadio di *Runge-Kutta* per ottenere l'evoluzione temporale della funzione:

$$\mathbf{U}_{i,j}(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{U}_{i,j}(t) \approx \frac{1}{C_{i,j}} \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \mathbf{U}(t, x, y) \, dx dy, \quad (2.10)$$

una volta definiti i seguenti flussi numerici:

$$\mathbf{f}_{i+1/2,j} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{f}_{i+1/2,j} = \mathbf{f}_{i+1/2,j}(t) \approx \frac{1}{\Delta y} \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} \mathbf{F}(\mathbf{U}(t, x_{i+1/2}, y)) \, dy, \quad (2.11)$$

$$\mathbf{g}_{i,j+1/2} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{g}_{i,j+1/2} = \mathbf{g}_{i,j+1/2}(t) \approx \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \mathbf{G}(\mathbf{U}(t, x, y_{j+1/2})) \, dx.$$

I metodi *splitting* [118, 179], invece, provvedono ad un frazionamento del problema a più dimensioni (1.16) in una sequenza di problemi monodimensionali: nel caso specifico a due dimensioni, eseguendo la procedura *splitting* alla *Godunov* (accurata al primo ordine), si risolve in Δt_n prima il problema ai valori iniziali lungo x :

$$\left. \begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \mathbf{U}(t, x, y) \, dx dy = \\ & = \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} \mathbf{F}(\mathbf{U}(t, x_{i-1/2}, y)) \, dy - \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} \mathbf{F}(\mathbf{U}(t, x_{i+1/2}, y)) \, dy \\ & \mathbf{U}_0 = \mathbf{U}(t_n, x, y) \end{aligned} \right\} \xRightarrow{\Delta t_n} \mathbf{U}^*(t_n, x, y), \quad (2.12)$$

successivamente quello lungo y (o viceversa):

$$\left. \begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} \mathbf{U}(t, x, y) \, dx dy = \\ & = \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \mathbf{G}(\mathbf{U}(t, x, y_{j-1/2})) \, dx - \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \mathbf{G}(\mathbf{U}(t, x, y_{j+1/2})) \, dx \\ & \mathbf{U}_0 = \mathbf{U}^*(t_n, x, y) \end{aligned} \right\} \xRightarrow{\Delta t_n} \mathbf{U}(t_{n+1}, x, y); \quad (2.13)$$

dalle precedenti, si conclude:

$$\left\{ \begin{aligned} \mathbf{U}_{i,j}^* &= \mathbf{U}_{i,j}^n - \frac{\Delta t_n}{\Delta x} (\mathbf{f}_{i+1/2,j}^n - \mathbf{f}_{i-1/2,j}^n) \\ \mathbf{U}_{i,j}^{n+1} &= \mathbf{U}_{i,j}^* - \frac{\Delta t_n}{\Delta y} (\mathbf{g}_{i,j+1/2}^* - \mathbf{g}_{i,j-1/2}^*) \end{aligned} \right., \quad (2.14)$$

in cui:

$$\mathbf{g}_{i,j+1/2}^* \approx \frac{1}{\Delta t_n \Delta x} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left[\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \mathbf{G}(\mathbf{U}^*(t, x, y_{j+1/2})) \, dx \right] dt. \quad (2.15)$$

Per contro la procedura *Strang splitting* (accurata al secondo ordine) conduce all'algoritmo [118, 162]:

$$\begin{cases} \mathbf{U}_{i,j}^* = \mathbf{U}_{i,j}^n - \frac{1}{2} \frac{\Delta t_n}{\Delta x} (\mathbf{f}_{i+1/2,j}^n - \mathbf{f}_{i-1/2,j}^n) \\ \mathbf{U}_{i,j}^{**} = \mathbf{U}_{i,j}^* - \frac{\Delta t_n}{\Delta y} (\mathbf{g}_{i,j+1/2}^* - \mathbf{g}_{i,j-1/2}^*) \\ \mathbf{U}_{i,j}^{n+1} = \mathbf{U}_{i,j}^{**} - \frac{1}{2} \frac{\Delta t_n}{\Delta x} (\mathbf{f}_{i+1/2,j}^{**} - \mathbf{f}_{i-1/2,j}^{**}) \end{cases}, \quad (2.16)$$

in cui:

$$\mathbf{f}_{i+1/2,j}^{**} \approx \frac{1}{\Delta t_n \Delta y} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left[\int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} \mathbf{G}(\mathbf{U}^{**}(t, x_{i+1/2}, y)) dy \right] dt. \quad (2.17)$$

Il modo di definire la funzione di flusso numerico (*centrato* o *upwind*) caratterizza lo schema di calcolo; i metodi centrati (o simmetrici), pur non richiedendo informazioni esplicite sulla dinamica di propagazione delle onde, presentano comunque un basso livello di *upwinding* [179]. Nel seguito si propongono due esemplificazioni. Il fatto che tale flusso intercella non dipenda dall'uno o dall'altro elemento di griglia tra loro adiacenti assicura la proprietà telescopica:

$$\begin{aligned} \sum_{i=i_m}^{i_M} \sum_{j=j_m}^{j_M} \mathbf{U}_{i,j}^{n+1} \Delta x \Delta y &= \sum_{i=i_m}^{i_M} \sum_{j=j_m}^{j_M} \mathbf{U}_{i,j}^n \Delta x \Delta y - \Delta t_n \sum_{j=j_m}^{j_M} (\mathbf{f}_{i_M+1/2,j}^n - \mathbf{f}_{i_m-1/2,j}^n) \Delta y + \\ &- \Delta t_n \sum_{i=i_m}^{i_M} (\mathbf{g}_{i,j_M+1/2}^n - \mathbf{g}_{i,j_m-1/2}^n) \Delta x \quad \text{con } 1 \leq i_m \leq i_M \leq n_x, 1 \leq j_m \leq j_M \leq n_y, \end{aligned} \quad (2.18)$$

e quindi il fatto che anche il metodo numerico è conservativo [99, 118].

Un metodo convergente e consistente che goda di questa proprietà, secondo il teorema di *Lax-Wendroff* [112, 116], necessariamente converge per $\Delta t_n, \Delta x, \Delta y \rightarrow 0$ alle soluzioni deboli della legge di conservazione, tra le quali occorre discernere quella fisicamente significativa adottando un'opportuna condizione di entropia [90]. Pertanto, in presenza di fenomeni che implicino la formazione e la propagazione di onde di *shock*, è indispensabile [101] ricorrere a schemi computazionali conservativi in grado di cogliere automaticamente le discontinuità della soluzione (*shock-capturing*), o, in alternativa, all'applicazione di schemi non conservativi nella zona dove la soluzione è regolare combinata con tecniche numeriche (*shock-tracking*) di localizzazione delle discontinuità, sulle quali si utilizzano le relazioni di *Rankine-Hugoniot* [44, 60, 119, 120, 174, 175].

2.2 I modelli numerici di simulazione

2.2.1 Trattamento della parte omogenea

Si presentano in sintesi gli elementi matematici salienti di due diversi schemi numerici utilizzati per la risoluzione del problema differenziale non lineare omogeneo (1.16), note le condizioni iniziali e al contorno.

Entrambi sono espliciti, conservativi, completamente discretizzati, *shock-capturing*, ad alta risoluzione ed appartengono alla categoria dei metodi MUSCL-*Hancock* [191–197], i quali si distinguono per una particolare procedura di ricostruzione delle variabili sui contorni intercella, finalizzata a conseguire un grado di accuratezza elevato (nella fattispecie pari a due) e a garantire l'assenza di oscillazioni non fisiche [64] in prossimità dei forti gradienti della soluzione (proprietà TVD-*Total Variation Diminishing*) [29–31, 85, 90, 111, 191]. Un problema di *Riemann* viene pertanto impostato in corrispondenza di ogni bordo intercella.

Tali codici si articolano in quattro passi [10, 177, 179].

1. **Ricostruzione MUSCL (*Monotone Upstream-centred Scheme for Conservation Laws*) delle variabili.** Si esegue una discretizzazione spaziale accurata al secondo ordine mediante approssimazione bilineare della variabile \mathbf{U}^n su ogni cella $C_{i,j}$ ($i = 1, \dots, n_x$, $j = 1, \dots, n_y$), per ogni istante di calcolo t_n [98, 177]. Lo sviluppo in serie di Taylor arrestato al secondo ordine della funzione $\mathbf{U}^n : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{U}^n = \mathbf{U}(t_n, x, y) = \mathbf{U}(t_n, \mathbf{x})$ in un intorno di $\mathbf{x}_{i,j} = [x_i, y_j]$, se la stessa funzione è sufficientemente regolare (con matrice *hessiana* continua), si presenta nella forma [142]:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(t_n, x, y) = & \mathbf{U}_{i,j}^n + \left[\frac{\partial \mathbf{U}^n}{\partial x} \right]_{x=x_i, y=y_j} (x - x_i) + \left[\frac{\partial \mathbf{U}^n}{\partial y} \right]_{x=x_i, y=y_j} (y - y_j) + \\ & \kappa \left(\left[\frac{\partial^2 \mathbf{U}^n}{\partial x^2} \right]_{x=x_i, y=y_j} (x - x_i)^2 + 2 \left[\frac{\partial^2 \mathbf{U}^n}{\partial x \partial y} \right]_{x=x_i, y=y_j} (x - x_i)(y - y_j) \right) + \\ & + \kappa \left(\left[\frac{\partial^2 \mathbf{U}^n}{\partial y^2} \right]_{x=x_i, y=y_j} (y - y_j)^2 \right) + \beta_2(x, y), \end{aligned} \quad (2.19)$$

dove $\beta_2(x, y)$ è un infinitesimo di ordine superiore rispetto a $(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{i,j})^T (\mathbf{x} - \mathbf{x}_{i,j})$ e $\kappa \in \mathbb{R}$ un parametro numerico. Approssimando le derivate parziali che compaiono nella (2.19) mediante differenze finite centrate [98, 135]:

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial \mathbf{U}^n}{\partial x} \right]_{x=x_i, y=y_j} &= \frac{\mathbf{U}_{i+1,j}^n - \mathbf{U}_{i-1,j}^n}{2 \Delta x} + O((\Delta x)^2), \\ \left[\frac{\partial \mathbf{U}^n}{\partial y} \right]_{x=x_i, y=y_j} &= \frac{\mathbf{U}_{i,j+1}^n - \mathbf{U}_{i,j-1}^n}{2 \Delta y} + O((\Delta y)^2), \\ \left[\frac{\partial^2 \mathbf{U}^n}{\partial x^2} \right]_{x=x_i, y=y_j} &= \frac{\mathbf{U}_{i+1,j}^n - 2\mathbf{U}_{i,j}^n + \mathbf{U}_{i-1,j}^n}{(\Delta x)^2} + O((\Delta x)^2), \\ \left[\frac{\partial^2 \mathbf{U}^n}{\partial y^2} \right]_{x=x_i, y=y_j} &= \frac{\mathbf{U}_{i,j+1}^n - 2\mathbf{U}_{i,j}^n + \mathbf{U}_{i,j-1}^n}{(\Delta y)^2} + O((\Delta y)^2), \\ \left[\frac{\partial^2 \mathbf{U}^n}{\partial x \partial y} \right]_{x=x_i, y=y_j} &= \frac{\mathbf{U}_{i+1,j+1}^n - \mathbf{U}_{i-1,j+1}^n - \mathbf{U}_{i+1,j-1}^n + \mathbf{U}_{i-1,j-1}^n}{4 \Delta x \Delta y} + O((\Delta x + \Delta y)^2), \end{aligned} \quad (2.20)$$

la relazione (2.19), posti $x = x_i \pm \Delta x/2$ e $y = y_j \pm \Delta y/2$, restituisce una combinazione di estrapolazioni in avanti e indietro, dipendente dal parametro κ , per la stima dei valori assunti

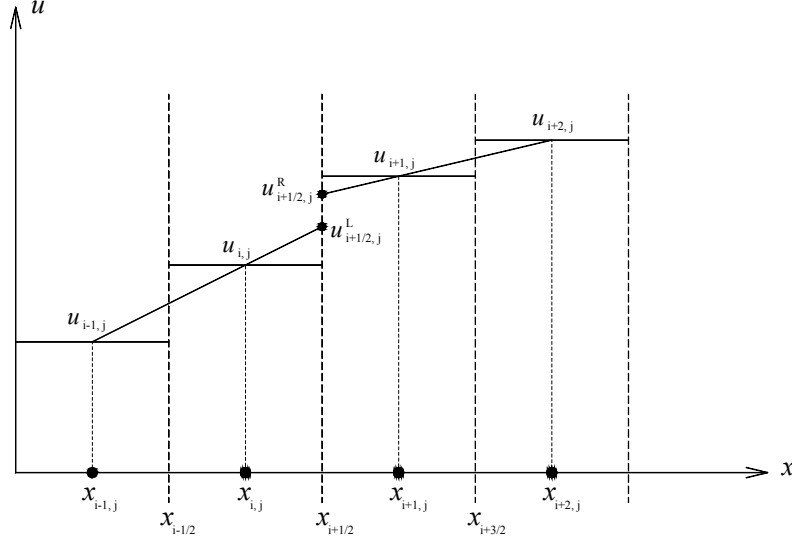


Figura 2.2: Estrapolazione lineare della variabile u sui contorni intercella per $\kappa = -1$.

dalla variabile \mathbf{U}^n sul contorno della cella $C_{i,j}$:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{U}_{i+1/2,j}^L &= \mathbf{U}_{i,j}^n + \frac{1}{4} [(1 - \kappa)(\mathbf{U}_{i,j}^n - \mathbf{U}_{i-1,j}^n) + (1 + \kappa)(\mathbf{U}_{i+1,j}^n - \mathbf{U}_{i,j}^n)], \\
 \mathbf{U}_{i-1/2,j}^R &= \mathbf{U}_{i,j}^n - \frac{1}{4} [(1 + \kappa)(\mathbf{U}_{i,j}^n - \mathbf{U}_{i-1,j}^n) + (1 - \kappa)(\mathbf{U}_{i+1,j}^n - \mathbf{U}_{i,j}^n)], \\
 \mathbf{U}_{i,j+1/2}^L &= \mathbf{U}_{i,j}^n + \frac{1}{4} [(1 - \kappa)(\mathbf{U}_{i,j}^n - \mathbf{U}_{i,j-1}^n) + (1 + \kappa)(\mathbf{U}_{i,j+1}^n - \mathbf{U}_{i,j}^n)], \\
 \mathbf{U}_{i,j-1/2}^R &= \mathbf{U}_{i,j}^n - \frac{1}{4} [(1 + \kappa)(\mathbf{U}_{i,j}^n - \mathbf{U}_{i,j-1}^n) + (1 - \kappa)(\mathbf{U}_{i,j+1}^n - \mathbf{U}_{i,j}^n)].
 \end{aligned} \tag{2.21}$$

In particolare, per $\kappa = -1$, l'estrapolazione ha carattere *upwind* venendo applicata solo su un lato (Fig. 2.2). Tuttavia, la necessità di limitare le pendenze della descrizione locale bilineare della funzione \mathbf{U}^n , al fine di scongiurare la comparsa di oscillazioni spurie, induce ad imporre le seguenti condizioni di monotonicità [98] sulle variabili ricostruite ai bordi della cella $C_{i,j}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} [\mathbf{U}_{i-1/2,j}^R]_k \geq [\mathbf{U}_{i-1,j}^n]_k \\ [\mathbf{U}_{i+1/2,j}^L]_k \leq [\mathbf{U}_{i+1,j}^n]_k \end{array} \right. , \tag{2.22}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} [\mathbf{U}_{i,j-1/2}^R]_k \geq [\mathbf{U}_{i,j-1}^n]_k \\ [\mathbf{U}_{i,j+1/2}^L]_k \leq [\mathbf{U}_{i,j+1}^n]_k \end{array} \right. , \tag{2.23}$$

nell'eventualità che $[\mathbf{U}_{i-1,j}^n]_k < [\mathbf{U}_{i+1,j}^n]_k$ e $[\mathbf{U}_{i,j-1}^n]_k < [\mathbf{U}_{i,j+1}^n]_k$, ($k = 1, 2, 3$). Ciò si concretizza modificando le uguaglianze (2.21) con l'inserimento di filtri matriciali diagonali $\Phi \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \mid \Phi = [\Phi_{k,l}]$, ($k = 1, 2, 3$, $l = 1, 2, 3$) limitatori di pendenza (approccio detto *slope limiter*) che introducono implicitamente una viscosità artificiale [58, 98, 153, 165, 177], garantendo la proprietà TVD al metodo risultante [90]:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{i+1/2,j}^L &= \mathbf{U}_{i,j}^n + \frac{1}{4} \left[(1 - \kappa) \Phi_{i-1/2,j}^+ (\mathbf{U}_{i,j}^n - \mathbf{U}_{i-1,j}^n) + (1 + \kappa) \Phi_{i+1/2,j}^- (\mathbf{U}_{i+1,j}^n - \mathbf{U}_{i,j}^n) \right], \\ \mathbf{U}_{i-1/2,j}^R &= \mathbf{U}_{i,j}^n - \frac{1}{4} \left[(1 + \kappa) \Phi_{i-1/2,j}^+ (\mathbf{U}_{i,j}^n - \mathbf{U}_{i-1,j}^n) + (1 - \kappa) \Phi_{i+1/2,j}^- (\mathbf{U}_{i+1,j}^n - \mathbf{U}_{i,j}^n) \right], \\ \mathbf{U}_{i,j+1/2}^L &= \mathbf{U}_{i,j}^n + \frac{1}{4} \left[(1 - \kappa) \Phi_{i,j-1/2}^+ (\mathbf{U}_{i,j}^n - \mathbf{U}_{i,j-1}^n) + (1 + \kappa) \Phi_{i,j+1/2}^- (\mathbf{U}_{i,j+1}^n - \mathbf{U}_{i,j}^n) \right], \\ \mathbf{U}_{i,j-1/2}^R &= \mathbf{U}_{i,j}^n - \frac{1}{4} \left[(1 + \kappa) \Phi_{i,j-1/2}^+ (\mathbf{U}_{i,j}^n - \mathbf{U}_{i,j-1}^n) + (1 - \kappa) \Phi_{i,j+1/2}^- (\mathbf{U}_{i,j+1}^n - \mathbf{U}_{i,j}^n) \right]. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Tali matrici *limiter* Φ sono espresse in funzione di rapporti $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{r} = [r_k]$, ($k = 1, 2, 3$) di successive variazioni *upwind* delle componenti della variabile \mathbf{U}^n [98]:

$$\begin{aligned} \Phi_{i-1/2,j}^+ &= \Phi(\mathbf{r}_{i-1/2,j}^+) = \text{diag} \left([\mathbf{r}_{i-1/2,j}^+]_1, [\mathbf{r}_{i-1/2,j}^+]_2, [\mathbf{r}_{i-1/2,j}^+]_3 \right), \\ \Phi_{i+1/2,j}^- &= \Phi(\mathbf{r}_{i+1/2,j}^-) = \text{diag} \left([\mathbf{r}_{i+1/2,j}^-]_1, [\mathbf{r}_{i+1/2,j}^-]_2, [\mathbf{r}_{i+1/2,j}^-]_3 \right), \\ \Phi_{i,j-1/2}^+ &= \Phi(\mathbf{r}_{i,j-1/2}^+) = \text{diag} \left([\mathbf{r}_{i,j-1/2}^+]_1, [\mathbf{r}_{i,j-1/2}^+]_2, [\mathbf{r}_{i,j-1/2}^+]_3 \right), \\ \Phi_{i,j+1/2}^- &= \Phi(\mathbf{r}_{i,j+1/2}^-) = \text{diag} \left([\mathbf{r}_{i,j+1/2}^-]_1, [\mathbf{r}_{i,j+1/2}^-]_2, [\mathbf{r}_{i,j+1/2}^-]_3 \right), \end{aligned} \quad (2.25)$$

essendo:

$$\begin{aligned} [\mathbf{r}_{i-1/2,j}^+]_k &= \frac{[\mathbf{U}_{i+1,j}^n]_k - [\mathbf{U}_{i,j}^n]_k}{[\mathbf{U}_{i,j}^n]_k - [\mathbf{U}_{i-1,j}^n]_k}, & [\mathbf{r}_{i+1/2,j}^-]_k &= \frac{[\mathbf{U}_{i,j}^n]_k - [\mathbf{U}_{i-1,j}^n]_k}{[\mathbf{U}_{i+1,j}^n]_k - [\mathbf{U}_{i,j}^n]_k}, \\ [\mathbf{r}_{i,j-1/2}^+]_k &= \frac{[\mathbf{U}_{i,j+1}^n]_k - [\mathbf{U}_{i,j}^n]_k}{[\mathbf{U}_{i,j}^n]_k - [\mathbf{U}_{i,j-1}^n]_k}, & [\mathbf{r}_{i,j+1/2}^-]_k &= \frac{[\mathbf{U}_{i,j}^n]_k - [\mathbf{U}_{i,j-1}^n]_k}{[\mathbf{U}_{i,j+1}^n]_k - [\mathbf{U}_{i,j}^n]_k}, \end{aligned} \quad (k = 1, 2, 3). \quad (2.26)$$

Diverse definizioni di funzioni *limiter* sono reperibili in letteratura; se ne riportano alcune come esempio [98, 118, 177, 179], tutte tali da soddisfare la proprietà di simmetria:

$$\frac{\Phi_{k,k}(r_k)}{r_k} = \Phi_{k,k} \left(\frac{1}{r_k} \right) \quad (k = 1, 2, 3). \quad (2.27)$$

Funzione *limiter* di van Leer [192]:

$$\Phi_{k,k}(r_k) = \begin{cases} \frac{r_k + |r_k|}{1 + r_k} & \text{se } r_k > 0 \\ 0 & \text{se } r_k \leq 0 \end{cases}. \quad (2.28)$$

Funzione limiter di Van Albada [190]:

$$\Phi_{k,k}(r_k) = \begin{cases} \frac{(r_k)^2 + r_k}{1 + (r_k)^2} & \text{se } r_k > 0 \\ 0 & \text{se } r_k \leq 0 \end{cases}. \quad (2.29)$$

Funzione limiter minmod [98]:

$$\Phi_{k,k}(r_k) = \begin{cases} \min(r_k, 1) & \text{se } r_k > 0 \\ 0 & \text{se } r_k \leq 0 \end{cases}. \quad (2.30)$$

Funzione limiter Superbee [154,165]:

$$\Phi_{k,k}(r_k) = \max[0, \min(\beta r_k, 1), \min(r_k, \beta)], \quad 1 \leq \beta \leq 2. \quad (2.31)$$

2. **Evoluzione delle variabili.** Affinché l'ordine di accuratezza temporale degli schemi sia pari a 2, le variabili calcolate sui contorni della cella $C_{i,j}$ ($i = 1, \dots, n_x$, $j = 1, \dots, n_y$) secondo le (2.24) vengono propagate su un intervallo $\Delta t_n/2$ (indicando Δt_n il passo temporale corrente di calcolo), in accordo alle relazioni seguenti [177,179]:

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{U}}_{i+1/2,j}^L &= \mathbf{U}_{i+1/2,j}^L - \frac{1}{2} \frac{\Delta t_n}{\Delta x} \left[\mathbf{F}(\mathbf{U}_{i+1/2,j}^L) - \mathbf{F}(\mathbf{U}_{i-1/2,j}^R) \right] + \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{\Delta t_n}{\Delta y} \left[\mathbf{G}(\mathbf{U}_{i,j+1/2}^L) - \mathbf{G}(\mathbf{U}_{i,j-1/2}^R) \right], \\ \overline{\mathbf{U}}_{i-1/2,j}^R &= \mathbf{U}_{i-1/2,j}^R - \frac{1}{2} \frac{\Delta t_n}{\Delta x} \left[\mathbf{F}(\mathbf{U}_{i+1/2,j}^L) - \mathbf{F}(\mathbf{U}_{i-1/2,j}^R) \right] + \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{\Delta t_n}{\Delta y} \left[\mathbf{G}(\mathbf{U}_{i,j+1/2}^L) - \mathbf{G}(\mathbf{U}_{i,j-1/2}^R) \right], \\ \overline{\mathbf{U}}_{i,j+1/2}^L &= \mathbf{U}_{i,j+1/2}^L - \frac{1}{2} \frac{\Delta t_n}{\Delta x} \left[\mathbf{F}(\mathbf{U}_{i+1/2,j}^L) - \mathbf{F}(\mathbf{U}_{i-1/2,j}^R) \right] + \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{\Delta t_n}{\Delta y} \left[\mathbf{G}(\mathbf{U}_{i,j+1/2}^L) - \mathbf{G}(\mathbf{U}_{i,j-1/2}^R) \right], \\ \overline{\mathbf{U}}_{i,j-1/2}^R &= \mathbf{U}_{i,j-1/2}^R - \frac{1}{2} \frac{\Delta t_n}{\Delta x} \left[\mathbf{F}(\mathbf{U}_{i+1/2,j}^L) - \mathbf{F}(\mathbf{U}_{i-1/2,j}^R) \right] + \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{\Delta t_n}{\Delta y} \left[\mathbf{G}(\mathbf{U}_{i,j+1/2}^L) - \mathbf{G}(\mathbf{U}_{i,j-1/2}^R) \right]. \end{aligned} \quad (2.32)$$

3. **Calcolo dei flussi numerici intercella.** I codici implementati si differenziano per la metodologia adottata in questo passo procedurale.

- L'utilizzo del metodo centrato FORCE (First-ORder CEntred) [176,177,179,180] per il calcolo dei flussi numerici sui bordi del generico elemento $C_{i,j} = \Delta x \cdot \Delta y$ ($i =$

$1, \dots, n_x$, $j = 1, \dots, n_y$) appartenente ad un reticolo cartesiano uniforme dà luogo ad un'estensione al secondo ordine nota in letteratura con l'acronimo SLIC (Slope Limiter Centred) [177, 179]. Il flusso FORCE si scrive:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{i+1/2,j}^{FORCE} &= \mathbf{f}_{i+1/2,j}^{FORCE} \left(\bar{\mathbf{U}}_{i+1/2,j}^L, \bar{\mathbf{U}}_{i+1/2,j}^R \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left[\mathbf{f}_{i+1/2,j}^{LF} \left(\bar{\mathbf{U}}_{i+1/2,j}^L, \bar{\mathbf{U}}_{i+1/2,j}^R \right) + \mathbf{f}_{i+1/2,j}^{RI} \left(\bar{\mathbf{U}}_{i+1/2,j}^L, \bar{\mathbf{U}}_{i+1/2,j}^R \right) \right] \\ &(i = 0, \dots, n_x, \quad j = 1, \dots, n_y), \end{aligned} \tag{2.33}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{i,j+1/2}^{FORCE} &= \mathbf{f}_{i,j+1/2}^{FORCE} \left(\bar{\mathbf{U}}_{i,j+1/2}^L, \bar{\mathbf{U}}_{i,j+1/2}^R \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left[\mathbf{f}_{i,j+1/2}^{LF} \left(\bar{\mathbf{U}}_{i,j+1/2}^L, \bar{\mathbf{U}}_{i,j+1/2}^R \right) + \mathbf{f}_{i,j+1/2}^{RI} \left(\bar{\mathbf{U}}_{i,j+1/2}^L, \bar{\mathbf{U}}_{i,j+1/2}^R \right) \right] \\ &(i = 1, \dots, n_x, \quad j = 0, \dots, n_y); \end{aligned}$$

nelle precedenti, \mathbf{f}^{LF} e \mathbf{f}^{RI} simboleggiano rispettivamente i flussi numerici tipici dello schema al primo ordine di *Lax-Friedrichs* [98, 110, 118, 177, 179]:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{i+1/2,j}^{LF} &= \mathbf{f}_{i+1/2,j}^{LF} \left(\bar{\mathbf{U}}_{i+1/2,j}^L, \bar{\mathbf{U}}_{i+1/2,j}^R \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left[\mathbf{F} \left(\bar{\mathbf{U}}_{i+1/2,j}^L \right) + \mathbf{F} \left(\bar{\mathbf{U}}_{i+1/2,j}^R \right) \right] + \frac{1}{4} \frac{\Delta x}{\Delta t_n} \left(\bar{\mathbf{U}}_{i+1/2,j}^L - \bar{\mathbf{U}}_{i+1/2,j}^R \right) \\ &(i = 0, \dots, n_x, \quad j = 1, \dots, n_y), \end{aligned} \tag{2.34}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{i,j+1/2}^{LF} &= \mathbf{f}_{i,j+1/2}^{LF} \left(\bar{\mathbf{U}}_{i,j+1/2}^L, \bar{\mathbf{U}}_{i,j+1/2}^R \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left[\mathbf{G} \left(\bar{\mathbf{U}}_{i,j+1/2}^L \right) + \mathbf{G} \left(\bar{\mathbf{U}}_{i,j+1/2}^R \right) \right] + \frac{1}{4} \frac{\Delta y}{\Delta t_n} \left(\bar{\mathbf{U}}_{i,j+1/2}^L - \bar{\mathbf{U}}_{i,j+1/2}^R \right) \\ &(i = 1, \dots, n_x, \quad j = 0, \dots, n_y), \end{aligned}$$

e dello schema al secondo ordine di *Lax-Wendroff* [98, 112, 118, 177, 179] nella formulazione in due passi dovuta a *Richtmyer* [149]:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{i+1/2,j}^{RI} &= \mathbf{f}_{i+1/2,j}^{RI} \left(\bar{\mathbf{U}}_{i+1/2,j}^L, \bar{\mathbf{U}}_{i+1/2,j}^R \right) = \mathbf{F} \left(\tilde{\mathbf{U}}_{i+1/2,j} \right) \\ \tilde{\mathbf{U}}_{i+1/2,j} &= \frac{1}{2} \left(\bar{\mathbf{U}}_{i+1/2,j}^L + \bar{\mathbf{U}}_{i+1/2,j}^R \right) + \frac{1}{2} \frac{\Delta t_n}{\Delta x} \left[\mathbf{F} \left(\bar{\mathbf{U}}_{i+1/2,j}^L \right) - \mathbf{F} \left(\bar{\mathbf{U}}_{i+1/2,j}^R \right) \right] \\ &(i = 0, \dots, n_x, \quad j = 1, \dots, n_y), \\ \mathbf{f}_{i,j+1/2}^{RI} &= \mathbf{f}_{i,j+1/2}^{RI} \left(\bar{\mathbf{U}}_{i,j+1/2}^L, \bar{\mathbf{U}}_{i,j+1/2}^R \right) = \mathbf{G} \left(\tilde{\mathbf{U}}_{i,j+1/2} \right) \\ \tilde{\mathbf{U}}_{i,j+1/2} &= \frac{1}{2} \left(\bar{\mathbf{U}}_{i,j+1/2}^L + \bar{\mathbf{U}}_{i,j+1/2}^R \right) + \frac{1}{2} \frac{\Delta t_n}{\Delta y} \left[\mathbf{G} \left(\bar{\mathbf{U}}_{i,j+1/2}^L \right) - \mathbf{G} \left(\bar{\mathbf{U}}_{i,j+1/2}^R \right) \right] \\ &(i = 1, \dots, n_x, \quad j = 0, \dots, n_y). \end{aligned} \tag{2.35}$$

- Un'approssimazione del flusso di *Godunov* intercella che si è dimostrata funzionale e robusta per le pratiche applicazioni [177, 179] è fornita direttamente (cioè senza stima preliminare delle grandezze del moto nella *star region*) dalla risoluzione del problema di *Riemann* ricostruito sui contorni operata dal solutore approssimato noto con l'acronimo HLLC (*Harten, Lax, van Leer, Contact*) [183]. Esso sviluppa l'approccio introdotto dal solutore HLL [90, 92] e riconosce alla soluzione una struttura ondulatoria caratterizzata da tre onde (quella intermedia è un'onda di contatto) che separano quattro stati

costanti. Il flusso numerico HLLC si scrive [71, 182, 183], relativamente alla direzione x (analogamente si procede lungo y):

$$\mathbf{f}_{i+1/2,j}^{HLLC} = \begin{cases} \mathbf{F}(\bar{\mathbf{U}}_{i+1/2,j}^L) & \text{se } s_l \geq 0 \\ \mathbf{F}_*^L & \text{se } s_l \leq 0 \leq s_* \\ \mathbf{F}_*^R & \text{se } s_* \leq 0 \leq s_r \\ \mathbf{F}(\bar{\mathbf{U}}_{i+1/2,j}^R) & \text{se } s_r \leq 0 \end{cases} \quad (2.36)$$

$(i = 0, \dots, n_x, \quad j = 1, \dots, n_y),$

dove:

$$\mathbf{F}_*^L = \mathbf{F}(\bar{\mathbf{U}}_{i+1/2,j}^L) + s_l (\mathbf{U}_*^L - \bar{\mathbf{U}}_{i+1/2,j}^L), \quad (2.37)$$

$$\mathbf{F}_*^R = \mathbf{F}(\bar{\mathbf{U}}_{i+1/2,j}^R) + s_r (\mathbf{U}_*^R - \bar{\mathbf{U}}_{i+1/2,j}^R);$$

gli stati \mathbf{U}_*^L e \mathbf{U}_*^R rispondono alle espressioni:

$$\mathbf{U}_*^L = h_l \begin{pmatrix} s_l - u_l \\ s_l - s_* \\ v_l \end{pmatrix}, \quad (2.38)$$

$$\mathbf{U}_*^R = h_l \begin{pmatrix} s_r - u_r \\ s_r - s_* \\ v_r \end{pmatrix}.$$

Vari algoritmi sono stati suggeriti in letteratura per la stima delle velocità s_l , s_r ed s_* [59, 62, 177, 179] dei tre segnali che perturbano lo stato iniziale. Una versione semplificata dello stesso solutore, adeguata per i problemi “alle acque basse” e preferita alla precedente nella fase di implementazione, si ricava conservando alle prime due componenti dei flussi numerici intercella la formulazione HLL:

$$\left[\mathbf{f}_{i+1/2,j}^{HLL} \right]_k = \begin{cases} \left[\mathbf{F}(\bar{\mathbf{U}}_{i+1/2,j}^L) \right]_k & \text{se } s_l \geq 0 \\ \frac{s_r \left[\mathbf{F}(\bar{\mathbf{U}}_{i+1/2,j}^L) \right]_k - s_l \left[\mathbf{F}(\bar{\mathbf{U}}_{i+1/2,j}^R) \right]_k +}{s_r s_l \left(\left[\bar{\mathbf{U}}_{i+1/2,j}^R \right]_k - \left[\bar{\mathbf{U}}_{i+1/2,j}^L \right]_k \right)} & \text{se } s_l \leq 0 \leq s_r \\ \left[\mathbf{F}(\bar{\mathbf{U}}_{i+1/2,j}^R) \right]_k & \text{se } s_r \leq 0 \end{cases} \quad (2.39)$$

$(i = 0, \dots, n_x, \quad j = 1, \dots, n_y, \quad k = 1, 2),$

ed esprimendo la terza componente, che varia in maniera discontinua attraverso l'onda intermedia, come funzione della prima:

$$\left[\mathbf{f}_{i+1/2,j}^{HLL} \right]_3 = \begin{cases} \left[\mathbf{f}_{i+1/2,j}^{HLL} \right]_1 \cdot \left(\left[\bar{\mathbf{U}}_{i+1/2,j}^L \right]_3 / \left[\bar{\mathbf{U}}_{i+1/2,j}^L \right]_1 \right) & \text{se } u^* \geq 0 \\ \left[\mathbf{f}_{i+1/2,j}^{HLL} \right]_1 \cdot \left(\left[\bar{\mathbf{U}}_{i+1/2,j}^R \right]_3 / \left[\bar{\mathbf{U}}_{i+1/2,j}^R \right]_1 \right) & \text{se } u^* < 0 \end{cases} \quad (2.40)$$

$(i = 0, \dots, n_x, \quad j = 1, \dots, n_y).$

4. **Calcolo del nuovo stato $\mathbf{U}_{i,j}^{adv}$.** L'applicazione cella per cella delle (2.6) completa l'algoritmo di calcolo consentendo l'aggiornamento della variabile discretizzata $\mathbf{U}_{i,j}$ nell'intervallo temporale corrente Δt_n .

2.2.2 Convergenza, accuratezza e stabilità

Per avere la certezza che i metodi numerici su esposti siano in grado di restituire su un insieme discreto e fissato di elementi spaziali un'approssimazione sufficientemente buona della soluzione esatta, oltre ad applicarli a problemi semplici per i quali sia nota la soluzione analitica o a casi per i quali si disponga di riscontri sperimentali (vedasi in proposito il Cap. 3), è possibile analizzarne teoricamente la proprietà di convergenza, formulando contemporaneamente una stima dell'errore numerico commesso [99, 118].

Detta $\mathbf{U}_{i,j}^n$ l'approssimazione in ogni cella appartenente alla *mesh* (supposta regolare) del valore atteso $\mathbf{u}_{i,j}^n$ che nella logica ai volumi finiti discretizza la soluzione esatta $\mathbf{U}(t, x, y)$:

$$\mathbf{u}_{i,j}^n = \frac{1}{\Delta x \Delta y} \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \mathbf{U}(t_n, x, y) dx dy, \quad (i = 1, \dots, n_x, \quad j = 1, \dots, n_y), \quad (2.41)$$

l'errore commesso localmente dal metodo all'istante $t = t_n$ si denota come:

$$\mathbf{E}_{i,j}^n = \mathbf{U}_{i,j}^n - \mathbf{u}_{i,j}^n. \quad (2.42)$$

Una valutazione dell'errore e^n globalmente introdotto fino a $t = t_n$, che fornisce una misura di quanto la soluzione numerica si discosti da quella vera, può provenire, facendo uso della *p-norma*, dalla definizione [118, 135]:

$$e^n = \left(\Delta x \Delta y \sum_{i=1}^{n_x} \sum_{j=1}^{n_y} \|\mathbf{E}_{i,j}^n\|^p \right)^{1/p}, \quad p \geq 1, \quad (2.43)$$

dove $\|\cdot\|$ indica una qualche norma di \mathbb{R}^3 ed usualmente $p = 1, 2, \infty$. La condizione [118]:

$$\lim_{\substack{\Delta t \rightarrow 0 \\ t=t_n}} e^n = 0 \quad (2.44)$$

assicura che l'errore globale e^n , al diminuire delle dimensioni della griglia nello spazio orario, non derivi disastrosamente col procedere del tempo e definisce la convergenza del metodo all'istante t_n nella norma prescelta. In particolare il metodo si dice accurato di ordine $s \in \mathbb{R}$ nel tempo e $q \in \mathbb{R}$ nello spazio se:

$$e^n = O(\Delta t_n^s, \Delta x^q, \Delta y^q), \quad \text{per } \Delta t_n, \Delta x, \Delta y \rightarrow 0. \quad (2.45)$$

Come già osservato, per gli schemi presentati al paragrafo 2.2.1: $s = 2$ e $q = 2$ [27, 152, 177].

Definiti un operatore N rappresentativo della procedura numerica esplicita di aggiornamento all'istante t_{n+1} della soluzione approssimata $\mathbf{U}_{i,j}^n$, per cui:

$$\mathbf{U}_{i,j}^{n+1} = N(\mathbf{U}_{i,j}^n), \quad (2.46)$$

e l'errore locale di troncamento all'istante t_n come rapporto tra errore introdotto dall'operatore N (applicato alla soluzione attesa $\mathbf{u}_{i,j}^n$) nel passo di calcolo corrente ed ampiezza temporale Δt_n dello stesso:

$$\tau_{i,j}^n = \frac{1}{\Delta t_n} [N(\mathbf{u}_{i,j}^n) - \mathbf{u}_{i,j}^{n+1}], \quad (2.47)$$

l'errore globale all'istante di calcolo t_{n+1} :

$$\mathbf{E}_{i,j}^{n+1} = \mathbf{U}_{i,j}^{n+1} - \mathbf{u}_{i,j}^{n+1} = [N(\mathbf{u}_{i,j}^n + \mathbf{E}_{i,j}^n) - N(\mathbf{u}_{i,j}^n)] + \Delta t_n \tau_{i,j}^n \quad (2.48)$$

si può interpretare come somma di un contributo dovuto all'effetto del modello numerico sull'errore globale \mathbf{E}^n relativo al passo temporale precedente e di un contributo, espresso in funzione dell'errore locale di troncamento, legato al passo temporale corrente.

Il metodo numerico si dice consistente col problema differenziale originario se $\tau_{i,j}^n \rightarrow 0$, $\forall i, j$ per $\Delta t_n \rightarrow 0$, per ogni funzione regolare $\mathbf{U}(t, x, y)$. Ciò si traduce a livello computazionale nelle condizioni di consistenza a cui devono soggiacere i flussi numerici [118, 179]:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{i+1/2,j}^n &= \mathbf{f}_{i+1/2,j}(\mathbf{U}_{i-k_l,j}^n, \dots, \mathbf{U}_{i+k_r,j}^n) = \mathbf{F}(\bar{\mathbf{U}}) \\ \mathbf{g}_{i,j+1/2}^n &= \mathbf{g}_{i,j+1/2}(\mathbf{U}_{i,j-k_l}^n, \dots, \mathbf{U}_{i,j+k_r}^n) = \mathbf{G}(\bar{\mathbf{U}}) \end{aligned} \quad k_l, k_r \in \mathbb{N}, \quad (2.49)$$

quando $\mathbf{U}_{i-k_l,j}^n, \dots, \mathbf{U}_{i+k_r,j}^n = \bar{\mathbf{U}} = \mathbf{U}_{i,j-k_l}, \dots, \mathbf{U}_{i,j+k_r}$, in analogia a ciò che si ricava dalle (2.7) se la funzione $\mathbf{U}(t, x, y) = \bar{\mathbf{U}} \in \mathbb{R}^3$ è costante in x e y ; contemporaneamente i medesimi flussi numerici (2.7) devono essere continui [118], cioè tendere rispettivamente a $\mathbf{F}(\bar{\mathbf{U}})$ e $\mathbf{G}(\bar{\mathbf{U}})$ per $\mathbf{U}_{i-k_l,j}^n, \dots, \mathbf{U}_{i+k_r,j}^n, \mathbf{U}_{i,j-k_l}^n, \dots, \mathbf{U}_{i,j+k_r}^n \rightarrow \bar{\mathbf{U}}$.

Nell'impossibilità di esprimere l'errore globale e^n in forma elementare, soprattutto dopo un numero ragguardevole di passi di calcolo, nell'ambito di problemi scalari lineari si preferisce di norma dimostrare la convergenza sulla base del fondamentale teorema di *Lax* [149], come equivalente all'accoppiamento delle proprietà di consistenza e stabilità: la prima è garanzia del fatto che l'errore commesso in ogni *step* computazionale è piccolo, la seconda che tale errore non aumenta catastroficamente col procedere del processo di calcolo.

L'analisi di stabilità e di convergenza per metodi non lineari multidimensionali è tutt'oggi argomento di studio [53, 54, 61, 108] e, non potendosi sfortunatamente sfruttare in generale il teorema di *Lax*, si estendono empiricamente a questi casi tecniche (*von Neumann*, *Lax-Richtmyer*) [99, 118, 138, 163] la cui validità è a rigore ristretta a problemi scalari lineari monodimensionali. Infatti usualmente si ritiene condizione necessaria alla stabilità la cosiddetta condizione di *Courant-Friedrichs-Lewy* [55] che stabilisce la convergenza del metodo computazionale solo se il dominio di dipendenza di ogni punto contiene il dominio di dipendenza esatto del problema differenziale di riferimento nel limite in cui Δt_n , Δx e Δy tendono a zero: in pratica il passo temporale di calcolo figura vincolato alla dimensione minima della discretizzazione spaziale, affinché la massima velocità numerica di propagazione delle perturbazioni offra una buona stima di quella fisica [179]. Ampliando l'efficacia della condizione di stabilità valida per equazioni scalari lineari bidimensionali di advezione al caso del sistema iperbolico bidimensionale omogeneo (1.16), si ottiene per algoritmi *unsplit* una zona di stabilità (ridotta rispetto all'analogia che si configura in condizioni monodimensionali) resa dalla seguente disuguaglianza [177]:

$$0 < Cr_x + Cr_y \leq 1, \quad (2.50)$$

dove Cr_x e Cr_y indicano i due numeri di *Courant* direzionali. La (2.50) risulta sicuramente soddisfatta se:

$$0 < \max \{Cr_x, Cr_y\} \leq \frac{1}{2}, \quad (2.51)$$

da cui, assunti gli autovalori λ_{x_k} e λ_{y_k} ($k = 1, 2, 3$) delle matrici (1.18) e (1.19) a predire ragionevoli velocità di propagazione delle informazioni, si estrae la seguente condizione di stabilità:

$$\max \left\{ \frac{\Delta t_n}{\Delta x} \max_{k,i,j} |\lambda_{x_{k,i,j}}|, \frac{\Delta t_n}{\Delta y} \max_{k,i,j} |\lambda_{y_{k,i,j}}| \right\} \leq \frac{1}{2}, \quad (2.52)$$

ed un possibile modo per la scelta del passo temporale di calcolo [177, 179]:

$$\Delta t_n = Cr \min \left\{ \frac{\Delta x}{\max_{i,j} |u_{i,j} + c_{i,j}|}, \frac{\Delta y}{\max_{i,j} |v_{i,j} + c_{i,j}|} \right\}, \quad Cr \in \mathbb{R} : 0 < Cr \leq \frac{1}{2}. \quad (2.53)$$

I metodi espliciti TVD (*Total Variation Diminishing*) [90,91,141,165,166,192] ad alta risoluzione descritti nel paragrafo 2.2.1 possono essere stabili e convergenti qualora sia soddisfatta la condizione (2.53) [118]. Tale proprietà TVD garantisce per problemi scalari monodimensionali la possibilità di dimostrare la convergenza non lineare [118] e di sviluppare metodi numerici di ordine elevato laddove la soluzione è regolare e non oscillatoria in prossimità dei forti gradienti. Essa si esprime, per ogni *set* di dati discreti $\mathbf{U}_{i,j}^n$, mediante la relazione:

$$TV(\mathbf{U}_{i,j}^{n+1}) \leq TV(\mathbf{U}_{i,j}^n), \quad (2.54)$$

dove la variazione totale TV all'istante $t = t_n$, per sistemi non lineari bidimensionali, assume la forma su griglia discreta [118]:

$$TV : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \mid TV(\mathbf{U}) = \sum_{i=1}^{n_x} \sum_{j=1}^{n_y} (\Delta y \|\mathbf{U}_{i+1,j}^n - \mathbf{U}_{i,j}^n\| + \Delta x \|\mathbf{U}_{i,j+1}^n - \mathbf{U}_{i,j}^n\|). \quad (2.55)$$

In generale non è però possibile ottenere metodi TVD secondo la (2.54) per sistemi non lineari multidimensionali di equazioni di conservazione, dal momento che la stessa soluzione esatta non è TVD (si confronti, ad esempio, il Test 6 del paragrafo 3.1.1). Pertanto l'applicazione di funzioni *slope limiter* in un approccio TVD monodimensionale non assicura la proprietà TVD (2.54) ai metodi bidimensionali [86], i quali restano moderatamente oscillatoria in prossimità degli alti gradienti della soluzione. Del resto è provato [86] che metodi effettivamente TVD in spazi a due dimensioni sono non oscillatoria, ma al più accurati al primo ordine.

Per impedire che vengano computate numericamente soluzioni non fisiche del sistema conservativo (1.16) (che non ammette, se convergente, un'unica soluzione debole $\mathbf{U}(t, x, y)$), condizioni di ammissibilità (*entropy conditions*) devono implicitamente dar garanzia della convergenza alla soluzione fisicamente rilevante. A tal fine, un approccio di analisi si basa sull'introduzione di una funzione matematica di entropia $\eta(\mathbf{U})$ a matrice *hessiana* definita positiva, che si conservi se la funzione $\mathbf{U}(t, x, y)$ è regolare e diminuisca se \mathbf{U} è discontinua. La condizione di entropia

corrisponde allora nell'intervallo $[t_1, t_2] \times [x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$ alla disuguaglianza [118]:

$$\begin{aligned} & \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \eta(\mathbf{U}(t_2, x, y)) \, dx dy \leq \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \eta(\mathbf{U}(t_1, x, y)) \, dx dy \\ & + \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} \psi(\mathbf{U}(t, x_1, y)) \, dy \right] dt - \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} \psi(\mathbf{U}(t, x_2, y)) \, dy \right] dt + \\ & + \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \varphi(\mathbf{U}(t, x, y_1)) \, dx \right] dt - \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \varphi(\mathbf{U}(t, x, y_2)) \, dx \right] dt, \end{aligned} \quad (2.56)$$

in cui $\psi(\mathbf{U})$ e $\varphi(\mathbf{U})$ rappresentano le funzioni direzionali di flusso di entropia. Nel caso particolare delle equazioni bidimensionali “alle acque basse” si può assumere la funzione di entropia $\eta(\mathbf{U})$ coincidente con l'energia totale:

$$\eta(\mathbf{U}) = \frac{1}{2}h(u^2 + v^2) + \frac{1}{2}gh^2, \quad (2.57)$$

e scegliere per i flussi associati:

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{U}) &= \frac{1}{2}hu^3 + gh^2u, \\ \varphi(\mathbf{U}) &= \frac{1}{2}hv^3 + gh^2v. \end{aligned} \quad (2.58)$$

La soluzione debole $\mathbf{U}(t, x, y)$ soddisfa alla (2.56) se vale al discreto la seguente espressione:

$$\eta(\mathbf{U}_{i,j}^{n+1}) \leq \eta(\mathbf{U}_{i,j}^n) - \frac{\Delta t_n}{\Delta x} (\Psi_{i+1/2,j}^n - \Psi_{i-1/2,j}^n) - \frac{\Delta t_n}{\Delta y} (\Phi_{i,j+1/2}^n - \Phi_{i,j-1/2}^n), \quad (2.59)$$

dove Ψ e Φ indicano funzioni numeriche di flusso entropico consistenti rispettivamente con ψ e φ . Per metodi di tipo *Godunov* è possibile infine mostrare [118] che la soluzione numerica è *entropy-satisfying* se vengono opportunamente definiti i flussi numerici intercella (ad esempio come nel paragrafo 2.2.1).

2.2.3 Condizioni al contorno

Il calcolo dei flussi per l'evoluzione temporale di $\mathbf{U}_{i,j}$ dall'istante t_n a quello t_{n+1} , come visto in precedenza, avviene, noti i valori di \mathbf{U}^n , su una struttura di elementi di griglia circostanti.

Dovendo in genere limitare il dominio di calcolo rispetto a quello fisico, in corrispondenza delle celle di confine, per rendere operativa la *routine* di aggiornamento, bisogna disporre di condizioni al bordo [135, 146].

Per riservare lo stesso trattamento numerico ad ogni cella interna $C_{i,j}$ ($i = 1, \dots, n_x$, $j = 1, \dots, n_y$) del reticolo di calcolo, usualmente si produce un'estensione del campo computazionale includendo al contorno alcune celle fittizie (*ghost cells*) appartenenti all'insieme:

$$\begin{aligned} B &= \{C_{i,j}, i = 1 - n_{bc}, \dots, 0 \vee i = n_x + 1, \dots, n_x + n_{bc}, \\ & j = 1 - n_{bc}, \dots, 0 \vee j = n_y + 1, \dots, n_y + n_{bc}\}, \quad n_{bc} \in \mathbb{N}; \end{aligned} \quad (2.60)$$

su queste ultime, ad ogni passo di calcolo, le variabili conservate discretizzate $\mathbf{U}_{i,j}$ sono inizializzate, di norma indipendentemente dall'algoritmo numerico impiegato, in base ai valori calcolati sulle celle interne limitrofe ai contorni, in modo tale che risultino naturalmente verificate le condizioni fisiche di bordo [98, 118, 177].

Il numero n_{bc} di unità di griglia aggiuntive da innestare sui confini del dominio di calcolo dipende invece dal particolare metodo utilizzato per la discretizzazione del problema (1.16): nella fattispecie, la ricostruzione delle variabili (2.24) tipica degli schemi appartenenti alla categoria dei metodi MUSCL-*Hancock*, impone di stabilire: $n_{bc} = 2$.

Si riportano in successione le tipologie di condizioni al contorno [7, 113] che sono state previste nell'impianto dei codici numerici in oggetto, con le relative assunzioni per le variabili primitive (o conservate), per la quota b del fondo e per il coefficiente di resistenza n di *Manning*.

Particolare cura va dedicata alle celle interessate, su uno stesso lato o su lati adiacenti, da sovrapposizione di diverse condizioni al contorno [118].

Condizioni al bordo riflettenti. Materializzano una parete solida insormontabile *free-slip*, la componente di velocità ortogonale alla quale è nulla: per una parete disposta sui lati $l_{1/2,j}$ ($j = 1, \dots, n_y$) all'ascissa $x = x_{1/2}$, la condizione $u(t, x_{1/2}, y) = 0$ si traduce sul discreto nelle seguenti relazioni di simmetria:

$$\left\{ \begin{array}{l} h_{1-i,j} = h_{i,j} \\ u_{1-i,j} = -u_{i,j} \\ v_{1-i,j} = v_{i,j} \\ \phi_{1-i,j} = \phi_{i,j} \\ b_{1-i,j} = b_{i,j} \\ n_{1-i,j} = n_{i,j} \end{array} \right. \quad (i = 1, 2, \quad j = 1, \dots, n_y). \quad (2.61)$$

Condizioni al bordo trasmissive o assorbenti (*far-field*). Sono finalizzate ad operare una delimitazione del dominio computazionale che permetta alle perturbazioni in uscita dallo stesso di essere assorbite senza generare onde spurie in ingresso [16, 63, 89, 97, 103]. Perciò, si procede ad un'estrapolazione dalle celle interne di ordine 1 per le quote geodetiche e di ordine 0 per le restanti grandezze, allo scopo di delineare al bordo un problema di *Riemann* banale; tuttavia, nonostante la sua immediatezza e la sua praticità, tale approccio non risulta totalmente efficace nel caso in cui onde piane investano obliquamente i contorni di assorbimento. È plausibile il suo impiego, ad esempio, quando la corrente idrica uscente è veloce. Ancora sui lati $l_{1/2,j}$ ($j = 1, \dots, n_y$), al confine sinistro del dominio, si introducono le assegnazioni:

$$\left\{ \begin{array}{l} h_{1-i,j} = h_{1,j} \\ u_{1-i,j} = u_{1,j} \\ v_{1-i,j} = v_{1,j} \\ \phi_{1-i,j} = \phi_{1,j} \\ b_{i-2,j} = 2b_{i-1,j} - b_{i,j} \\ n_{1-i,j} = n_{1,j} \end{array} \right. \quad (i = 1, 2, \quad j = 1, \dots, n_y). \quad (2.62)$$

Condizioni al bordo di livello imposto $\bar{h}(t)$. Se per le celle di bordo contrassegnate da $i = 0$ ($j = 1, \dots, n_y$) vale la condizione di tirante idrico assegnato: $h(t, x_0, y) = \bar{h}(t)$, a livello

discreto si esegue ad ogni passo di calcolo la seguente estrapolazione di ordine 0:

$$\begin{cases} h_{1-i,j} = \bar{h}(t) \\ u_{1-i,j} = u_{1,j} \\ v_{1-i,j} = v_{1,j} \\ \phi_{1-i,j} = \phi_{1,j} \\ b_{1-i,j} = b_{1,j} \\ n_{1-i,j} = n_{1,j} \end{cases} \quad (i = 1, 2, \quad j = 1, \dots, n_y). \quad (2.63)$$

Condizioni al bordo di portata imposta. Sui lati $l_{1/2,j}$ ($j = 1, \dots, n_y$), per indurre la portata volumetrica specifica $uh(t, x_{1/2}, y) = \bar{q}(t)$ e la portata massica unitaria di tracciante $uh\phi(t, x_{1/2}, y) = \bar{\varphi}(t)$, si impone:

$$\begin{cases} h_{1-i,j} = h_{1,j} \\ (uh)_{1-i,j} = \bar{q}(t) \\ (vh)_{1-i,j} = 0 \\ (uh\phi)_{1-i,j} = \bar{\varphi}(t) \\ (vh\phi)_{1-i,j} = 0 \\ b_{i-2,j} = 2b_{i-1,j} - b_{i,j} \\ n_{1-i,j} = n_{1,j} \end{cases} \quad (i = 1, 2, \quad j = 1, \dots, n_y). \quad (2.64)$$

Condizioni al bordo di concentrazione media verticale imposta $\bar{\phi}(t)$. Sulle celle di confine individuate da $i = 0$ ($j = 1, \dots, n_y$), la condizione: $\phi(t, x_0, y) = \bar{\phi}(t)$ si concretizza nelle seguenti:

$$\begin{cases} h_{1-i,j} = h_{1,j} \\ u_{1-i,j} = u_{1,j} \\ v_{1-i,j} = v_{1,j} \\ \phi_{1-i,j} = \bar{\phi}(t) \\ b_{i-2,j} = 2b_{i-1,j} - b_{i,j} \\ n_{1-i,j} = n_{1,j} \end{cases} \quad (i = 1, 2, \quad j = 1, \dots, n_y). \quad (2.65)$$

Un'ultima nota concerne il criterio di gestione dei *contorni mobili* che separano l'area computazionale inondata $I_n = \{C_{i,j}, (i,j) \mid h_{i,j}^n > 0\}$ da quella asciutta $A_n = \{C_{i,j}, (i,j) \mid h_{i,j}^n = 0\}$.

Per economizzare le risorse ed i tempi di calcolo, i codici implementati limitano l'applicazione della (2.6) agli elementi di griglia appartenenti all'insieme I_n a cui si annette, passo dopo passo, compatibilmente alla condizione di stabilità, una corona di celle asciutte sulle quali può espandersi il dominio I_{n+1} .

Il fatto che i fronti di asciugamento/bagnamento si propaghino secondo le leggi (1.79) suggerisce un adattamento della condizione di stabilità (2.53) ed attesta la tendenza ad una imprecisa previsione dello sviluppo del fenomeno di inondazione di zone asciutte qualora si ricorra ad un preliminare allagamento artificiale delle stesse con altezze pur limitate [179].

Ulteriore riprova della delicatezza di questa problematica proviene dalla considerazione che la formulazione conservativa (2.6) di aggiornamento delle incognite, cui si aggiungono le relazioni:

$$u_{i,j}^{n+1} = \frac{(uh)_{i,j}^{n+1}}{h_{i,j}^{n+1}}, \quad v_{i,j}^{n+1} = \frac{(vh)_{i,j}^{n+1}}{h_{i,j}^{n+1}} \quad (2.66)$$

per il calcolo delle componenti di velocità, induce il metodo numerico a stimare erroneamente le velocità stesse in prossimità dei contorni mobili, a causa dei piccoli valori assunti da numeratore

e denominatore delle (2.66) [179], ed in ultima analisi a condizionare l'effetto della (2.53) che determina una considerevole diminuzione di efficienza da parte della simulazione matematica.

2.2.4 Trattamento del termine sorgente

In molteplici situazioni di interesse pratico, è rilevante sullo sviluppo fisico dei fenomeni idrici a superficie libera l'effetto indotto dai termini forzanti $\mathbf{S}(\mathbf{U}(t, x, y))$ che compaiono nei sistemi non omogenei (1.10) e (1.11).

Essi si possono intendere come sovrapposizione di due contributi [7, 32, 43, 177, 179]:

$$\mathbf{S}(\mathbf{U}(t, x, y)) = \mathbf{S}_0(\mathbf{U}(t, x, y)) + \mathbf{S}_f(\mathbf{U}(t, x, y)) = [0, ghS_{0_x}, ghS_{0_y}]^T + [0, -ghS_{f_x}, -ghS_{f_y}]^T, \quad (2.67)$$

restando valide le definizioni (1.13) e (1.14); del primo, di tipo geometrico, è responsabile il campo di gravità in presenza di una topografia irregolare che comporti pendenze locali del fondo non nulle [140]; il secondo, di tipo cinematico, è dovuto alla resistenza offerta al moto dal fondo stesso. Le matrici Jacobiane delle trasformazioni $\mathbf{S}_0(\mathbf{U})$ e $\mathbf{S}_f(\mathbf{U})$ si scrivono rispettivamente:

$$\mathbf{Q}_0 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3} \mid \mathbf{Q}_0(\mathbf{U}(t, x, y)) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ gS_{0_x} & 0 & 0 \\ gS_{0_y} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.68)$$

$$\mathbf{Q}_f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3} \mid \mathbf{Q}_f(\mathbf{U}(t, x, y)) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{7}{3}gS_{f_x} & -gS_{f_x} \left(\frac{1}{u} + \frac{u}{u^2 + v^2} \right) & -gS_{f_x} \frac{v}{u^2 + v^2} \\ \frac{7}{3}gS_{f_y} & -gS_{f_y} \frac{u}{u^2 + v^2} & -gS_{f_y} \left(\frac{1}{v} + \frac{v}{u^2 + v^2} \right) \end{bmatrix}. \quad (2.69)$$

In letteratura sono documentate diverse tecniche numeriche per la risoluzione del problema (1.10) o (1.11).

Una di queste [23, 24, 35, 77, 155, 203] estende ai termini sorgente il concetto di discretizzazione spaziale *upwind* [4, 80, 84, 92, 98, 116, 177]. L'algoritmo esplicito ai volumi finiti (2.6) sfruttato per la risoluzione numerica del problema omogeneo (1.16) si applica anche al problema non omogeneo (1.10) nella forma:

$$\mathbf{U}_{i,j}^{n+1} = \mathbf{U}_{i,j}^n - \frac{\Delta t_n}{\Delta x} (\mathbf{f}_{i+1/2,j} - \mathbf{f}_{i-1/2,j}) - \frac{\Delta t_n}{\Delta y} (\mathbf{g}_{i,j+1/2} - \mathbf{g}_{i,j-1/2}) + \Delta t_n \mathbf{s}_{i,j}, \quad (2.70)$$

dove:

$$\mathbf{s}_{i,j} \approx \frac{1}{C_{i,j}} \frac{1}{\Delta t_n} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left[\int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \mathbf{S}(\mathbf{U}(t_n, x, y)) \, dx dy \right] dt \quad (i = 1, \dots, n_x, \quad j = 1, \dots, n_y), \quad (2.71)$$

che denota l'approssimazione della funzione $\mathbf{S}(\mathbf{U})$ sulla generica cella $C_{i,j}$ nell'intervallo di tempo Δt_n , è un termine forzante numerico che può essere restituito in forma esplicita come somma di

apporti *upwind* la cui espressione varia da schema a schema [24, 203]:

$$\begin{aligned}
\mathbf{s}_{i,j} &= \mathbf{s}_{i,j}^n = \mathbf{s} \left(\mathbf{U}_{i-k_l,j}^n, \dots, \mathbf{U}_{i+k_r,j}^n, \mathbf{U}_{i,j-k_l}^n, \dots, \mathbf{U}_{i,j+k_r}^n \right) = \\
&= \mathbf{s}^{L_x} \left(\mathbf{U}_{i-k_l,j}^n, \dots, \mathbf{U}_{i,j}^n \right) + \mathbf{s}^{R_x} \left(\mathbf{U}_{i,j}^n, \dots, \mathbf{U}_{i+k_r,j}^n \right) + \\
&+ \mathbf{s}^{L_y} \left(\mathbf{U}_{i,j-k_l}^n, \dots, \mathbf{U}_{i,j}^n \right) + \mathbf{s}^{R_y} \left(\mathbf{U}_{i,j}^n, \dots, \mathbf{U}_{i,j+k_r}^n \right),
\end{aligned} \tag{2.72}$$

con $k_l, k_r \in \mathbb{N}$.

Un altro approccio, che è poi quello adottato, è detto *splitting* [26, 83, 136, 162, 177, 179, 181, 207] e si risolve nel disaccoppiare, per ogni passo di calcolo Δt_n , il problema originario (1.11), unito alle condizioni iniziali (1.15) e ad opportune condizioni ai limiti, nell'analogo problema omogeneo:

$$\left. \begin{aligned}
&\frac{d}{dt} \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \mathbf{U}(t, x, y) \, dx dy = \\
&= \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} \mathbf{F}(\mathbf{U}(t, x_{i-1/2}, y)) \, dy - \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} \mathbf{F}(\mathbf{U}(t, x_{i+1/2}, y)) \, dy + \\
&+ \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \mathbf{G}(\mathbf{U}(t, x, y_{j-1/2})) \, dx - \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \mathbf{G}(\mathbf{U}(t, x, y_{j+1/2})) \, dx \\
&\mathbf{U}_0 = \mathbf{U}(t_n, x, y)
\end{aligned} \right\} \xRightarrow{\Delta t_n} \mathbf{U}^{adv}(t_n, x, y), \tag{2.73}$$

a cui fa seguito il problema differenziale ordinario:

$$\left. \begin{aligned}
&\frac{d}{dt} \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \mathbf{U}(t, x, y) \, dx dy = \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \mathbf{S}(\mathbf{U}(t, x, y)) \, dx dy \\
&\mathbf{U}_0 = \mathbf{U}^{adv}(t_n, x, y)
\end{aligned} \right\} \xRightarrow{\Delta t_n} \mathbf{U}(t_{n+1}, x, y). \tag{2.74}$$

Il notevole vantaggio di poter evitare di incorporare la gestione del termine sorgente nel metodo ad alta risoluzione e di poter operare la scelta di appropriati e distinti operatori numerici si scontra con la considerazione che l'ordine di accuratezza temporale conseguibile globalmente dalla procedura (*Godunov splitting*) è pari a uno, posto che i menzionati operatori eseguano ognuno una discretizzazione temporale almeno accurata al primo ordine [162, 177, 179].

Uno schema complessivamente accurato nel tempo al secondo ordine (*Strang splitting* [162]) si otterrebbe sviluppando i passi seguenti:

$$\left. \begin{aligned}
&\frac{d}{dt} \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \mathbf{U}(t, x, y) \, dx dy = \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \mathbf{S}(\mathbf{U}(t, x, y)) \, dx dy \\
&\mathbf{U}_0 = \mathbf{U}(t_n, x, y)
\end{aligned} \right\} \xRightarrow{\Delta t_n/2} \mathbf{U}^*(t_n, x, y), \tag{2.75}$$

$$\left. \begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \mathbf{U}(t, x, y) \, dx dy = \\
& = \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} \mathbf{F}(\mathbf{U}(t, x_{i-1/2}, y)) \, dy - \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} \mathbf{F}(\mathbf{U}(t, x_{i+1/2}, y)) \, dy + \\
& + \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \mathbf{G}(\mathbf{U}(t, x, y_{j-1/2})) \, dx - \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \mathbf{G}(\mathbf{U}(t, x, y_{j+1/2})) \, dx \\
& \mathbf{U}_0 = \mathbf{U}^*(t_n, x, y)
\end{aligned} \right\} \xRightarrow{\Delta t_n} \mathbf{U}^{**}(t_n, x, y), \quad (2.76)$$

$$\left. \begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \mathbf{U}(t, x, y) \, dx dy = \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \mathbf{S}(\mathbf{U}(t, x, y)) \, dx dy \\
& \mathbf{U}_0 = \mathbf{U}^{**}(t_n, x, y)
\end{aligned} \right\} \xRightarrow{\Delta t_n/2} \mathbf{U}(t_{n+1}, x, y), \quad (2.77)$$

e facendo uso di operatori numerici in grado di garantire un'accuratezza temporale almeno del secondo ordine. Per semplicità e per limitare gli oneri di calcolo, ci si è limitati alla prima soluzione (2.73)-(2.74).

Vari metodi possono essere scelti per la risoluzione numerica del problema differenziale (2.74). Tra i molteplici che si fondano sulla forma discretizzata [78, 109, 135, 177]:

$$\mathbf{U}_{i,j}^{n+1} = \mathbf{U}_{i,j}^{adv} + \Delta t_n \mathbf{S}_{i,j}, \quad (2.78)$$

si è optato per quello implicito, accurato al secondo ordine, che scaturisce dall'approssimazione trapezia dell'integrale temporale che compare nella definizione (2.71):

$$\mathbf{U}_{i,j}^{n+1} = \mathbf{U}_{i,j}^{adv} + \frac{1}{2} \Delta t_n [\mathbf{S}_{i,j}^{n+1} + \mathbf{S}_{i,j}^n], \quad (2.79)$$

indicando $\mathbf{S}_{i,j}^n$ il valore medio della variabile $\mathbf{S}(t_n, x, y)$ all'istante t_n sull'elemento di griglia (i, j) :

$$\mathbf{S}_{i,j}^n \approx \frac{1}{C_{i,j}} \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \mathbf{S}(t_n, x, y) \, dx dy = \mathbf{S}(\mathbf{U}_{i,j}^n), \quad (i = 1, \dots, n_x, \quad j = 1, \dots, n_y). \quad (2.80)$$

Ciò consente di impostare un'originale discretizzazione semi-implicita del termine sorgente, separatamente per gli effetti di pendenza e resistenza, preservandosi una struttura computazionale del tutto esplicita [38, 188]:

$$\tilde{\mathbf{U}}_{i,j} = \mathbf{U}_{i,j}^{adv} + \frac{1}{2} \Delta t_n [\mathbf{S}_0(\mathbf{U}_{i,j}^{adv}) + \mathbf{S}_0(\tilde{\mathbf{U}}_{i,j})], \quad \text{da cui:} \quad (2.81)$$

$$\tilde{\mathbf{U}}_{i,j} = \mathbf{U}_{i,j}^{adv} + \Delta t_n \mathbf{S}_0(\mathbf{U}_{i,j}^{adv});$$

$$\mathbf{U}_{i,j}^{n+1} = \tilde{\mathbf{U}}_{i,j} + \frac{1}{2} \Delta t_n [\mathbf{S}_f(\tilde{\mathbf{U}}_{i,j}) + \mathbf{S}_f(\mathbf{U}_{i,j}^{n+1})], \quad \text{da cui:} \quad (2.82)$$

$$\mathbf{U}_{i,j}^{n+1} = \tilde{\mathbf{U}}_{i,j} + \Delta t_n \left[\mathbf{I} - \frac{\Delta t_n}{2} \mathbf{Q}_f(\tilde{\mathbf{U}}_{i,j}) \right]^{-1} \mathbf{S}_f(\tilde{\mathbf{U}}_{i,j});$$

dove \mathbf{I} è la matrice identità di ordine 3. La scelta di un metodo intrinsecamente implicito, che può essere incondizionatamente stabile, non introduce ulteriori restrizioni sul passo di calcolo Δt_n , che pertanto resta vincolato alla condizione di stabilità (2.53) relativa al problema omogeneo [45, 177].

Tale procedura, oltre ad introdurre un inevitabile errore di *splitting*, assente solo nel caso del problema modello scalare lineare a coefficienti costanti [177, 184], non è in grado di salvaguardare una condizione idrostatica o di interpretare accuratamente la propagazione di piccole perturbazioni [117, 121], cioè le sue prestazioni non sono ottimali quando il contributo del primo addendo della (1.10) è piccolo rispetto agli altri due che appaiono al primo membro della (1.10) medesima e quando i gradienti dei flussi devono bilanciare perfettamente il termine sorgente. Infatti non risulta soddisfatta la cosiddetta *C-property* [24, 88, 197, 203], non essendo garantita la predizione esatta o approssimata secondo un certo ordine di accuratezza della soluzione del problema statico:

$$H = \overline{H}, \quad uh = vh = 0. \quad (2.83)$$

Diversi accorgimenti sono stati proposti in letteratura per ovviare ai problemi computazionali legati alla presenza di termini forzanti di tipo geometrico, soprattutto in relazione ai processi di inondazione e ritiro delle acque: dall'inizializzazione di un sottile velo d'acqua sull'intero dominio di calcolo [211] (responsabile tra l'altro di un'errata previsione della velocità di propagazione delle onde [179]), all'utilizzo di griglie adattative [3, 105, 158] in grado di adeguarsi alla linea di interfaccia tra area asciutta ed area bagnata (approccio, quest'ultimo, tanto elegante quanto poco efficiente e poco robusto se applicato a topografie arbitrariamente complesse); dall'applicazione delle equazioni di conservazione alle porzioni allagate delle celle parzializzate dai fronti [170], all'impiego di tecniche più o meno complesse di estrapolazione delle velocità di avanzamento dei fronti stessi [32, 96, 106, 170]. L'operazione di media integrale a livello discreto, attuata dal metodo numerico sulle grandezze conservate in corrispondenza delle presunte celle parzialmente bagnate, diffonde impropriamente la massa idrica, tratteggiando in maniera imprecisa i contorni mobili, ed allo stesso tempo riduce considerevolmente le altezze idriche in prossimità dei fronti, dando luogo a problemi di instabilità numerica [32, 179]. Usuale rimedio consiste nella definizione di una tolleranza $\epsilon = 10^{-6} \div 10^{-4}$ m tale per cui, per ogni istante t_n , si intendano bagnati a tutti gli effetti solo gli elementi per i quali $h_{i,j}^n \geq \epsilon$; il modello matematico risulta allora sensibile al valore accettato per ϵ , specialmente per problemi di flusso su fondo scabro [32]. Infine, il flusso numerico intercella deve essere imposto nullo tra cella bagnata e cella asciutta qualora l'inondazione di quest'ultima non sia attesa [32].

Un'alternativa alla tecnica di disaccoppiamento del termine sorgente [117, 121] consiste nell'includere la discretizzazione dello stesso nell'algoritmo di propagazione ondosa impostando, nel rispetto della continuità, problemi di *Riemann* al centro della generica cella di calcolo che producano in corrispondenza dei bordi problemi di *Riemann* sulle perturbazioni di uno stato quasi-stazionario. Tuttavia ciò non è sufficiente a garantire la rigorosa staticità per problemi bidimensionali e per di più l'approccio *splitting* sembra comunque rimanere più robusto nella modellazione di flussi permanenti transcritici o di flussi non prossimi alla stazionarietà [117].

2.2.5 Lo schema SGM

In questo paragrafo si propone un metodo originale, appartenente alla famiglia degli schemi MUSCL-*Hancock*, per la discretizzazione ai volumi finiti della formulazione integrale non omogenea (1.11) delle equazioni bidimensionali alle acque basse.

Esso si basa sulla peculiarità che la ricostruzione ai contorni intercella delle profondità idriche deve provenire dall'interpolazione ai bordi della quota geodetica della superficie libera (tecnica

SGM-*Surface Gradient Method*) rispetto ad un riferimento orizzontale [140,213], al fine di elaborare un'appropriata previsione dei flussi scambiati tra celle confinanti e di interpretare con accuratezza, previa opportuna discretizzazione del termine sorgente di pendenza $\mathbf{S}_0(\mathbf{U})$, la propagazione di piccole perturbazioni ed il permanere di una condizione di equilibrio idrostatico. Infatti, una procedura di estrapolazione fondata sul gradiente dell'altezza d'acqua (tecnica DGM-*Depth Gradient Method*) potrebbe rivelarsi poco accurata in virtù dell'effetto indotto dall'irregolarità della topografia ed implicare un'approssimazione non attendibile dei flussi responsabili dell'aggiornamento temporale delle variabili conservate discretizzate. Pertanto, applicando la stessa impostazione introdotta con le (2.24) per la ricostruzione bilineare della quota idrica $H : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \mid H(t, x, y) = h(t, x, y) + b(x, y)$ sui bordi di ogni elemento del reticolo di calcolo [213], si ottiene, con grado di *upwinding* variabile al variare del valore del parametro numerico $\kappa \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
H_{i+1/2,j}^L &= H_{i,j}^n + \frac{1}{4} \left[(1 - \kappa) \Phi_{i-1/2,j}^+ (H_{i,j}^n - H_{i-1,j}^n) + (1 + \kappa) \Phi_{i+1/2,j}^- (H_{i+1,j}^n - H_{i,j}^n) \right], \\
H_{i-1/2,j}^R &= H_{i,j}^n - \frac{1}{4} \left[(1 + \kappa) \Phi_{i-1/2,j}^+ (H_{i,j}^n - H_{i-1,j}^n) + (1 - \kappa) \Phi_{i+1/2,j}^- (H_{i+1,j}^n - H_{i,j}^n) \right], \\
H_{i,j+1/2}^L &= H_{i,j}^n + \frac{1}{4} \left[(1 - \kappa) \Phi_{i,j-1/2}^+ (H_{i,j}^n - H_{i,j-1}^n) + (1 + \kappa) \Phi_{i,j-1/2}^- (H_{i,j+1}^n - H_{i,j}^n) \right], \\
H_{i,j-1/2}^R &= H_{i,j}^n - \frac{1}{4} \left[(1 + \kappa) \Phi_{i,j-1/2}^+ (H_{i,j}^n - H_{i,j-1}^n) + (1 - \kappa) \Phi_{i,j+1/2}^- (H_{i,j+1}^n - H_{i,j}^n) \right],
\end{aligned} \tag{2.84}$$

dove le funzioni Φ rappresentano filtri passa-basso limitatori di pendenza del tutto analoghi a quelli elencati tra la (2.28) e la (2.31).

Dalle precedenti è immediato stimare le profondità idriche ai contorni ($i = 1, \dots, n_x$, $j = 1, \dots, n_y$) [213]:

$$\begin{aligned}
h_{i+1/2,j}^L &= H_{i+1/2,j}^L - b_{i+1/2,j}^L, & h_{i-1/2,j}^R &= H_{i-1/2,j}^R - b_{i-1/2,j}^R, \\
h_{i,j+1/2}^L &= H_{i,j+1/2}^L - b_{i,j+1/2}^L, & h_{i,j-1/2}^R &= H_{i,j-1/2}^R - b_{i,j-1/2}^R,
\end{aligned} \tag{2.85}$$

una volta calcolate con interpolazione centrata le quote geodetiche intercella:

$$\begin{aligned}
b_{i+1/2,j}^L &= b_{i+1/2,j}^R = \frac{b_{i+1,j} + b_{i,j}}{2}, & (i = 0, \dots, n_x, \quad j = 1, \dots, n_y), \\
b_{i,j+1/2}^L &= b_{i,j+1/2}^R = \frac{b_{i,j+1} + b_{i,j}}{2}, & (i = 1, \dots, n_x, \quad j = 0, \dots, n_y).
\end{aligned} \tag{2.86}$$

Si noti come tale approccio, oltre a consentire la descrizione di brusche discontinuità localizzate in corrispondenza dei contorni, semplicemente differenziando le quote stimate ai due lati dei contorni stessi [212], sia perfettamente equivalente ai metodi di tipo DGM in presenza di topografia piatta ($b(x, y) = c \in \mathbb{R}$) e di fatto non comporti un carico computazionale aggiuntivo rispetto ai metodi convenzionali di risoluzione numerica della parte omogenea del sistema (1.11). Invero, le relazioni (2.32) di evoluzione temporale delle variabili ricostruite, considerando l'apporto del

termine forzante di tipo geometrico, si possono modificare come di seguito:

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{U}}_{i+1/2,j}^L &= \mathbf{U}_{i+1/2,j}^L - \frac{1}{2} \frac{\Delta t_n}{\Delta x} \left[\mathbf{F} \left(\mathbf{U}_{i+1/2,j}^L \right) - \mathbf{F} \left(\mathbf{U}_{i-1/2,j}^R \right) \right] + \\
&\quad - \frac{1}{2} \frac{\Delta t_n}{\Delta y} \left[\mathbf{G} \left(\mathbf{U}_{i,j+1/2}^L \right) - \mathbf{G} \left(\mathbf{U}_{i,j-1/2}^R \right) \right] + \frac{\Delta t_n}{2} \mathbf{S}_{0i,j}^*, \\
\bar{\mathbf{U}}_{i-1/2,j}^R &= \mathbf{U}_{i-1/2,j}^R - \frac{1}{2} \frac{\Delta t_n}{\Delta x} \left[\mathbf{F} \left(\mathbf{U}_{i+1/2,j}^L \right) - \mathbf{F} \left(\mathbf{U}_{i-1/2,j}^R \right) \right] + \\
&\quad - \frac{1}{2} \frac{\Delta t_n}{\Delta y} \left[\mathbf{G} \left(\mathbf{U}_{i,j+1/2}^L \right) - \mathbf{G} \left(\mathbf{U}_{i,j-1/2}^R \right) \right] + \frac{\Delta t_n}{2} \mathbf{S}_{0i,j}^*, \\
\bar{\mathbf{U}}_{i,j+1/2}^L &= \mathbf{U}_{i,j+1/2}^L - \frac{1}{2} \frac{\Delta t_n}{\Delta x} \left[\mathbf{F} \left(\mathbf{U}_{i+1/2,j}^L \right) - \mathbf{F} \left(\mathbf{U}_{i-1/2,j}^R \right) \right] + \\
&\quad - \frac{1}{2} \frac{\Delta t_n}{\Delta y} \left[\mathbf{G} \left(\mathbf{U}_{i,j+1/2}^L \right) - \mathbf{G} \left(\mathbf{U}_{i,j-1/2}^R \right) \right] + \frac{\Delta t_n}{2} \mathbf{S}_{0i,j}^*, \\
\bar{\mathbf{U}}_{i,j-1/2}^R &= \mathbf{U}_{i,j-1/2}^R - \frac{1}{2} \frac{\Delta t_n}{\Delta x} \left[\mathbf{F} \left(\mathbf{U}_{i+1/2,j}^L \right) - \mathbf{F} \left(\mathbf{U}_{i-1/2,j}^R \right) \right] + \\
&\quad - \frac{1}{2} \frac{\Delta t_n}{\Delta y} \left[\mathbf{G} \left(\mathbf{U}_{i,j+1/2}^L \right) - \mathbf{G} \left(\mathbf{U}_{i,j-1/2}^R \right) \right] + \frac{\Delta t_n}{2} \mathbf{S}_{0i,j}^*,
\end{aligned} \tag{2.87}$$

in cui:

$$\mathbf{S}_{0i,j}^* = \begin{bmatrix} 0 \\ -g \frac{h_{i+1/2,j}^L + h_{i-1/2,j}^R}{2} \frac{b_{i+1/2,j}^L - b_{i-1/2,j}^R}{\Delta x} \\ -g \frac{h_{i,j+1/2}^L + h_{i,j-1/2}^R}{2} \frac{b_{i,j+1/2}^L - b_{i,j-1/2}^R}{\Delta y} \end{bmatrix}; \tag{2.88}$$

l'algoritmo di calcolo si scrive allora:

$$\tilde{\mathbf{U}}_{i,j} = \mathbf{U}_{i,j}^n - \frac{\Delta t_n}{\Delta x} (\mathbf{f}_{i+1/2,j} - \mathbf{f}_{i-1/2,j}) - \frac{\Delta t_n}{\Delta y} (\mathbf{g}_{i,j+1/2} - \mathbf{g}_{i,j-1/2}) + \Delta t_n \bar{\mathbf{S}}_{0i,j}, \tag{2.89}$$

con i flussi di tipo *Godunov* quantificati con una delle diverse metodologie reperibili in letteratura [98, 118], tra cui quelle citate nel punto 3 del paragrafo 2.2.1, ed essendo:

$$\bar{\mathbf{S}}_{0i,j} = \begin{bmatrix} 0 \\ -g \frac{\bar{h}_{i+1/2,j}^L + \bar{h}_{i-1/2,j}^R}{2} \frac{b_{i+1/2,j}^L - b_{i-1/2,j}^R}{\Delta x} \\ -g \frac{\bar{h}_{i,j+1/2}^L + \bar{h}_{i,j-1/2}^R}{2} \frac{b_{i,j+1/2}^L - b_{i,j-1/2}^R}{\Delta y} \end{bmatrix}. \tag{2.90}$$

Il trattamento disaccoppiato (2.82) del termine sorgente di resistenza $\mathbf{S}_f(\mathbf{U})$ conclude la procedura di aggiornamento.

Lo schema così delineato è tale da soddisfare la cosiddetta *Z-property* [213], cioè è in grado di preservare esattamente una condizione statica su topografia irregolare (*C-property* esatta [23, 24, 203]) con stima centrata delle componenti della pendenza del fondo. Tuttavia l'applicazione del metodo non può avvenire tal quale nelle zone dove $h(t, x, y) = 0$ e deve essere ristretta alle aree inondate; infine valutazioni poco affidabili delle grandezze conservate in prossimità dei contorni mobili limitano notevolmente l'efficienza del metodo stesso nei casi pratici di campo in cui non si possa prescindere dallo studio del movimento dei fronti di bagnamento e asciugamento.

2.2.6 Discretizzazione spaziale non uniforme

La soluzione numerica dei problemi matematici quale quello rappresentato dal sistema integrale bidimensionale di conservazione (1.11), dotato di condizioni iniziali ed ai bordi, esige, ai fini della discretizzazione delle equazioni, una preliminare procedura di generazione di una partizione [100, 167–169] del dominio fisico continuo di applicazione del problema stesso (in elementi di controllo, nell'interpretazione ai volumi finiti [84, 99, 118, 194, 200, 201]).

Qualora l'assetto altimetrico regolare e la configurazione planimetrica del campo computazionale bidimensionale delimitato da contorni allineati rispetto alle direzioni coordinate x e y lo suggeriscano, il ricorso ad una suddivisione del dominio fisico di interesse basata su celle cartesiane (eventualmente uniformi) rende banale il problema di generazione del reticolo di calcolo. Talvolta si insiste in una rappresentazione cartesiana “a scalini” dei contorni non allineati alle direzioni coordinate, conservando la facilità di partizione del dominio fisico al prezzo di una descrizione non accurata della geometria dei bordi e pertanto della dinamica dei fenomeni in prossimità dei medesimi.

I metodi cosiddetti *Cartesian cut* ovviano elegantemente a questo problema unendo l'utilizzo di elementi cartesiani nella parte interna del dominio ad un trattamento speciale riservato alle celle parzializzate dall'intersezione con linee di contorno. La loro recente popolarità è dovuta alla notevole semplicità di generazione delle griglia, anche in presenza di geometrie articolate, nonostante resti problematico specificare, per le celle tagliate di piccole dimensioni, un'espressione dei flussi intercella che assicuri accuratezza e stabilità del calcolo contemporaneamente ad una ragionevole efficienza. A questo scopo molteplici proposte sono documentate in letteratura [39, 41, 52, 68, 114, 115, 148, 208–210].

Un altro diffuso criterio per operare nei confronti di domini di calcolo genericamente configurati consiste nell'applicazione di una trasformazione ξ di coordinate alle equazioni di base [20, 99, 100, 118, 177]:

$$\xi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \mid \xi(t, x, y) = [\tau, \xi, \eta], \quad \begin{cases} \tau = t \\ \xi = \xi(x, y) \\ \eta = \eta(x, y) \end{cases}, \quad (2.91)$$

che muti la porzione planimetrica irregolare in studio, appartenente allo spazio fisico (t, x, y) e discretizzata con reticolo non uniforme, in un'area perfettamente regolare, discretizzata mediante elementi uniformi nello spazio computazionale (τ, ξ, η) , su cui risolvere le equazioni trasformate. Tuttavia queste ultime includono di norma termini metrici coincidenti con gli elementi della matrice

giacobiana \mathbf{X} della trasformazione (2.91) [177]:

$$\mathbf{X} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3} \mid \mathbf{X}(\tau, \xi(x, y), \eta(x, y)) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix}; \quad (2.92)$$

la mappa (2.91) deve quindi essere *smooth* per garantire una buona accuratezza, nonostante questa condizione non assicuri che le equazioni trasformate discretizzate interpretino matematicamente nello spazio (τ, ξ, η) il corretto bilancio fisico delle grandezze che si conservano nello spazio (t, x, y) [118].

Tra le varie tecniche di discretizzazione ai volumi finiti di leggi di conservazione quali la (1.11), eseguite direttamente sullo spazio fisico (t, x, y) in adeguamento alla geometria del problema (*body-fitted grids*), si è approfondita quella basata su una partizione spaziale *cell-centered* strutturata non cartesiana del dominio [99, 100, 118, 177], attuata cioè mediante elementi quadrilateri “logicamente rettangolari”, disposti in modo tale che ognuno di essi possa essere identificato per righe e colonne da una coppia di indici (i, j) . Individuati i vertici di ogni quadrilatero computazionale $A_k = (x_k, y_k)$, ($k = 1, \dots, N$, con $N = 4$) a definire quattro segmenti $A_k A_{k+1}$ (con $A_{N+1} \equiv A_1$) costituenti la spezzata chiusa di confine (Fig. 2.3), è lecito esprimere, secondo le seguenti uguaglianze, il flusso totale attraverso il bordo $\partial\Omega = (x(s), y(s))$ della generica cella di controllo parametrizzato mediante l’ascissa curvilinea $s \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} \mathbf{v}(s) \cdot \mathbf{H}(\mathbf{U}(t, x(s), y(s))) ds &= \sum_{k=1}^N \int_{A_k}^{A_{k+1}} \mathbf{v}_k \cdot \mathbf{H}(\mathbf{U}) ds = \\ &= \sum_{k=1}^N \int_{A_k}^{A_{k+1}} [\cos \theta_k \cdot \mathbf{F}(\mathbf{U}) + \sin \theta_k \cdot \mathbf{G}(\mathbf{U})] ds, \end{aligned} \quad (2.93)$$

rammentando che $\mathbf{H}(\mathbf{U}) = [\mathbf{F}(\mathbf{U}(t, x(s), y(s))), \mathbf{G}(\mathbf{U}(t, x(s), y(s)))]$ simboleggia il tensore dei flussi e che $\mathbf{v}(s) \in \mathbb{R}^2$ rappresenta il versore uscente perpendicolare in ogni punto a $\partial\Omega$; nella fattispecie, $\mathbf{v}_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \mid \mathbf{v} = [\cos \theta_k, \sin \theta_k]$ ($\theta_k \in \mathbb{R}$ indica l’angolo piano formato dal versore normale al lato k -esimo con la direzione x di riferimento). Dalla precedente, la parte omogenea della (1.11), applicata a livello discreto ad ogni elemento di area $C_{i,j}$ ($i = 1, \dots, n_x$, $j = 1, \dots, n_y$), si modifica nella forma conservativa semidiscretizzata:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{U}_{i,j}(t) = -\frac{1}{C_{i,j}} \sum_{k=1}^N \int_{A_k}^{A_{k+1}} [\cos \theta_k \cdot \mathbf{F}(\mathbf{U}) + \sin \theta_k \cdot \mathbf{G}(\mathbf{U})] ds. \quad (2.94)$$

Approssimando ogni termine della sommatoria come di seguito:

$$\int_{A_k}^{A_{k+1}} [\cos \theta_k \cdot \mathbf{F}(\mathbf{U}) + \sin \theta_k \cdot \mathbf{G}(\mathbf{U})] ds = l_k [\cos \theta_k \cdot \mathbf{F}(\mathbf{U}) + \sin \theta_k \cdot \mathbf{G}(\mathbf{U})], \quad (2.95)$$

con l_k ($k = 1, \dots, 4$) ad indicare la lunghezza del segmento $A_k A_{k+1}$, ed integrando nel tempo tra gli istanti t_n e t_{n+1} , dalla (2.94) si evince l’algoritmo *flux-differencing* completamente discretizzato [118]:

$$\mathbf{U}_{i,j}^{adv} = \mathbf{U}_{i,j}^n - \frac{\Delta t_n}{C_{i,j}} \sum_{k=1}^N l_k \widehat{\mathbf{f}}_k^n, \quad (2.96)$$

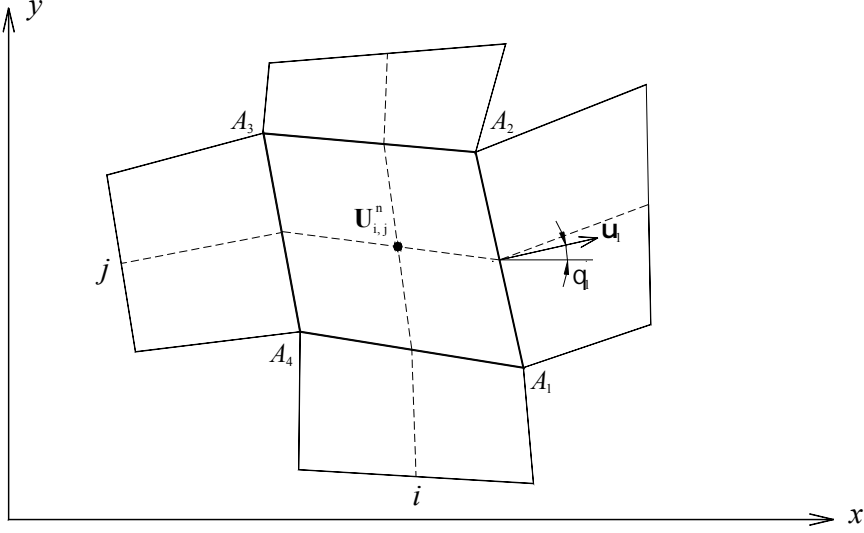


Figura 2.3: Elemento quadrilatero appartenente a reticolo strutturato non cartesiano.

dove $\widehat{\mathbf{f}}_k$ ($k = 1, \dots, 4$) rappresenta l'approssimazione numerica, per unità di lunghezza e per unità di tempo, del flusso medio temporale normale ad ogni lato della cella di controllo (i, j) :

$$\widehat{\mathbf{f}}_k^n = \frac{1}{\Delta t_n} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left[\frac{1}{l_k} \int_{A_k}^{A_{k+1}} \mathbf{v}_k \cdot \mathbf{H}(\mathbf{U}(t, x(s), y(s))) ds \right] dt. \quad (2.97)$$

La (2.96) si semplifica agevolmente nella (2.6) su cella cartesiana rettangolare di area $C_{i,j} = \Delta x_{i,j} \cdot \Delta y_{i,j}$, con $\Delta x_{i,j} = x_{i+1/2} - x_{i-1/2}$ ($i = 1, \dots, n_x$) e $\Delta y_{i,j} = y_{j+1/2} - y_{j-1/2}$ ($j = 1, \dots, n_y$).

La costruzione del flusso intercella scaturisce dalla proprietà di invarianza rotazionale (1.86); si può allora asserire [177]:

$$\mathbf{U}_{i,j}^{adv} = \mathbf{U}_{i,j}^n - \frac{\Delta t_n}{C_{i,j}} \sum_{k=1}^N l_k \mathbf{T}_k^{-1} \mathbf{f}_k(\mathbf{T}_k \mathbf{U}), \quad (2.98)$$

in cui il flusso numerico \mathbf{f}_k è funzione delle variabili conservate $\widehat{\mathbf{U}} = \mathbf{T}_k \mathbf{U}$ ruotate mediante la matrice di rotazione \mathbf{T}_k (la cui definizione è data nella (1.87)) tra sistema di riferimento piano originario (x, y) e sistema di riferimento locale sinistrorso $(\widehat{x}, \widehat{y})$, nel quale \widehat{x} e \widehat{y} materializzano rispettivamente la direzione normale uscente e quella tangenziale per ogni bordo retto intercella.

L'algoritmo numerico (2.96), valido sul dominio fisico suddiviso in elementi quadrilateri "logicamente rettangolari", può essere riscritto (*capacity-form differencing*) come discretizzazione *unsplit*, su griglia trasformata uniforme, delle equazioni convertite secondo un'opportuna mappa (2.91):

$$\mathbf{U}_{i,j}^{adv} = \mathbf{U}_{i,j}^n - \frac{\Delta t_n}{\kappa_{i,j} \Delta \xi} (\mathbf{f}_{i+1/2,j} - \mathbf{f}_{i-1/2,j}) - \frac{\Delta t_n}{\kappa_{i,j} \Delta \eta} (\mathbf{g}_{i,j+1/2} - \mathbf{g}_{i,j-1/2}), \quad (2.99)$$

avendo introdotto una funzione di capacità $\kappa_{i,j} = C_{i,j}/\Delta \xi \Delta \eta$, rapporto locale tra area della cella fisica ed area della cella computazionale [118]. Nell'espressione (2.99) le funzioni \mathbf{f} e \mathbf{g} indicano i

flussi numerici per unità di lunghezza e tempo nello spazio computazionale (τ, ξ, η) , mentre $\mathbf{U}_{i,j}^n$ fornisce nello stesso spazio l'approssimazione media areale della variabile trasformata $\bar{\mathbf{U}}(\tau, \xi, \eta)$:

$$\mathbf{U}_{i,j}^n \approx \frac{1}{\Delta x_{i,j} \Delta y_{i,j}} \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \mathbf{U}(t_n, x, y) dx dy \approx \frac{1}{\Delta \xi \Delta \eta} \int_{\eta_{j-1/2}}^{\eta_{j+1/2}} \int_{\xi_{i-1/2}}^{\xi_{i+1/2}} \bar{\mathbf{U}}(t_n, \xi, \eta) d\xi d\eta, \quad (2.100)$$

$(i = 1, \dots, n_x, \quad j = 1, \dots, n_y).$

Il metodo accurato al secondo ordine nel tempo e nello spazio descritto nel paragrafo 2.2.1, con le relative tecniche di calcolo dei flussi numerici intercella, si estende [177] facilmente ed efficacemente ai casi in cui si ricorra alla partizione strutturata non cartesiana del campo fisico, previa rotazione delle variabili \mathbf{U}^L e \mathbf{U}^R ricostruite al contorno nelle corrispondenti $\hat{\mathbf{U}}^L$ e $\hat{\mathbf{U}}^R$.

Inoltre, al termine sorgente è riservato il trattamento frazionato citato nel paragrafo 2.2.4 e tradotto nelle (2.81)-(2.82):

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{U}}_{i,j} &= \mathbf{U}_{i,j}^{adv} + \Delta t_n \mathbf{S}_0 (\mathbf{U}_{i,j}^{adv}), \\ \mathbf{U}_{i,j}^{n+1} &= \tilde{\mathbf{U}}_{i,j} + \Delta t_n \left[\mathbf{I} - \frac{\Delta t_n}{2} \mathbf{Q}_f (\tilde{\mathbf{U}}_{i,j}) \right]^{-1} \mathbf{S}_f (\tilde{\mathbf{U}}_{i,j}). \end{aligned} \quad (2.101)$$

Nella prima delle (2.101), i termini $S_{0_x} = \frac{-\partial b(x,y)}{\partial x}$ e $S_{0_y} = \frac{-\partial b(x,y)}{\partial y}$ che appaiono nella (2.67) e che simboleggiano le pendenze del fondo nelle due direzioni coordinate x e y , vengono stimate [38, 188] attraverso una media pesata delle rispettive pendenze di quattro triangoli di area Ω_k ($k = 1, \dots, N$, $N = 4$) in cui la batimetria di ogni quadrilatero $Q_{i,j}$ della partizione strutturata può essere schematizzata:

$$\mathbf{S}_0 (\mathbf{U}_{i,j}^{adv}) = \begin{bmatrix} 0 \\ -gh_{i,j}^n \frac{1}{C_{i,j}} \sum_{k=1}^N \Omega_k S_{0_{x_k}} \\ -gh_{i,j}^n \frac{1}{C_{i,j}} \sum_{k=1}^N \Omega_k S_{0_{y_k}} \end{bmatrix}; \quad (2.102)$$

ognuno di questi triangoli ha come vertici il baricentro G della cella (di cui è nota la quota $b_G \approx \frac{1}{C_{i,j}} \int_{Q_{i,j}} b(x,y) dx dy$, $i = 1, \dots, n_x$, $j = 1, \dots, n_y$) e gli estremi $A_k A_{k+1}$ di uno dei lati (le cui quote sono determinabili dalle quote dei baricentri delle quattro celle limitrofe mediante idoneo processo di interpolazione). Ad esempio, detto $GA_1 A_2$ il primo di questi triangoli ($k = 1$), risulta:

$$\begin{aligned} S_{0_{x_1}} &= -\frac{(y_{A_2} - y_G) b_{A_1} + (y_G - y_{A_1}) b_{A_2} + (y_{A_1} - y_{A_2}) b_G}{x_G y_{A_1} - x_{A_2} y_{A_1} + x_{A_1} y_{A_2} - x_G y_{A_2} + x_{A_2} y_G - x_{A_1} y_G}, \\ S_{0_{y_1}} &= \frac{(x_{A_2} - x_G) b_{A_1} + (x_G - x_{A_1}) b_{A_2} + (x_{A_1} - x_{A_2}) b_G}{x_G y_{A_1} - x_{A_2} y_{A_1} + x_{A_1} y_{A_2} - x_G y_{A_2} + x_{A_2} y_G - x_{A_1} y_G}. \end{aligned} \quad (2.103)$$

L'introduzione delle condizioni al contorno avviene con la stessa tecnica descritta nel paragrafo 2.2.3, con la precauzione che le condizioni al bordo riflettenti rendano l'annullamento della componente della velocità normale alla parete solida [118]. Se in corrispondenza del lato k -esimo di bordo della cella $(1, j)$, ($j = 1, \dots, n_y$) è plausibile collocare una parete insormontabile *free-slip*,

in analogia alle relazioni (2.61), si impone, ad ogni passo temporale, la seguente inizializzazione sulle *ghost cells* relativamente alle variabili primitive ruotate (costituite dall'altezza idrica, dalle componenti della velocità normale e tangenziale al contorno e da eventuali scalari passivi) e per le grandezze di interesse:

$$\left\{ \begin{array}{l} h_{1-i,j} = h_{i,j} \\ \widehat{u}_{1-i,j} = -\widehat{u}_{i,j} \\ \widehat{v}_{1-i,j} = \widehat{v}_{i,j} \\ \phi_{1-i,j} = \phi_{i,j} \\ b_{1-i,j} = b_{i,j} \\ n_{1-i,j} = n_{i,j} \end{array} \right. \quad (i = 1, 2, \quad j = 1, \dots, n_y). \quad (2.104)$$

Infine, reticoli (come le triangolazioni) i cui elementi non possano essere identificati da una coppia di indici, danno luogo a griglie non strutturate [13, 15, 34, 99, 156, 198] le quali, pur offrendo il vantaggio di una discreta facilità di generazione e di una notevole flessibilità per la capacità di adattamento a geometrie complesse, non presentano abitualmente una precisa logica di connessione tra celle limitrofe, inficiando spesso la possibilità di sviluppo di solutori che abbiano i requisiti di velocità ed efficienza [99, 118].

Capitolo 3

Validazione dei codici di calcolo

Nel presente capitolo si accertano la versatilità, l'efficienza e la robustezza dei modelli numerici descritti nel Cap. 2 per valutare il grado di confidenza da associare alle previsioni formulate dagli stessi.

Si presentano vari raffronti con severi ed assodati casi test mono e bidimensionali (anche riguardanti il trasporto di scalari passivi) ben documentati in letteratura, per i quali si disponga di soluzione analitica o comunque di attendibile soluzione di riferimento.

Inoltre, nell'intento ulteriore di confermare l'abilità dei citati codici di calcolo a simulare i complessi fenomeni che si verificano nelle pratiche applicazioni (presenza di ostacoli insormontabili, di topografia accidentata e di aree inizialmente asciutte, propagazione di onde riflesse e di onde a fronte ripido, formazione di risalti idraulici, ecc.), vengono mostrati i risultati relativi alla modellazione di casi sperimentali recentemente segnalati come significativi da autorevoli gruppi di ricerca europei (CADAM 1996-1999, IMPACT 2002-2004) [9, 72, 76].

3.1 Confronto con casi di letteratura

Le previsioni formulate dai codici numerici vengono di seguito poste a confronto con soluzioni di riferimento di vari casi teorici proposti in letteratura, ognuno dei quali tale da presentare particolarità in grado di comportare severe difficoltà per la procedura di simulazione.

3.1.1 Casi monodimensionali

In questa sezione, su casi test monodimensionali per i quali sia possibile ricostruire analiticamente la soluzione (come discusso nel paragrafo 1.2.3) [178,179], vengono verificate le prestazioni dei due schemi numerici appartenenti alla famiglia dei metodi MUSCL-*Hancock* illustrati nel paragrafo 2.2: il primo, di tipo centrato (SLIC), caratterizzato dalla formulazione FORCE dei flussi numerici intercella, il secondo, di tipo *upwind*, qualificato dall'applicazione del solutore approssimato HLLC del problema di *Riemann*.

Si presentano sei test particolarmente significativi [118, 179] che configurano distinti problemi di *Riemann* costruiti su canale a sezione rettangolare di larghezza unitaria, lungo 50 m, con alveo orizzontale e liscio. I valori iniziali per ognuno di essi, relativamente alle variabili altezza idrica $h(t, x)$, velocità $u(t, x)$ e concentrazione $C(t, x)$ di un eventuale scalare passivo, sono raccolti in

Test	h_l (m)	u_l (m/s)	C_l (g/m ³)	h_r (m)	u_r (m/s)	C_r (g/m ³)	x_0 (m)	t_{out} (s)
1	1.0	2.5	1.0	0.1	0.0	0.0	10.0	7.0
2	1.0	-5.0	1.0	1.0	5.0	0.0	25.0	2.5
3	1.0	0.0	1.0	0.0	0.0	0.0	20.0	4.0
4	1.0	0.0	1.0	0.02	0.0	0.0	20.0	4.0
5	0.1	-3.0	1.0	0.1	3.0	0.0	25.0	5.0
6	1.0	1.0	1.0	1.0	-1.0	0.0	25.0	5.0

Tabella 3.1: *Dati per sei test monodimensionali dotati di soluzione analitica.*

Tab. 3.1, dove si riporta anche l'indicazione dell'ascissa x_0 a cui è collocata la discontinuità iniziale e dell'istante t_{out} di restituzione della soluzione.

Il canale è stato discretizzato mediante reticolo cartesiano uniforme composto di 100×10 elementi rettangolari di dimensioni $0.5 \text{ m} \times 0.1 \text{ m}$. Nelle simulazioni numeriche è stato adottato un numero di *Courant* pari a 0.45 e si è fatto uso della funzione *limiter* (2.28) di *van Leer*.

- *Test 1.* Evidenzia le capacità dei codici a risolvere le onde a fronte ripido in un numero contenuto di elementi spaziali e a prevederne correttamente la velocità di propagazione e l'altezza senza introdurre oscillazioni spurie non fisiche. Inoltre, permette di verificare l'idoneità degli stessi modelli numerici a stimare lo sviluppo longitudinale della *star region* e a predire le onde di rarefazione transcritiche, che vengono accuratamente ricostruite evitando l'introduzione, comune nei metodi che violino la condizione di entropia, di *shock* di rarefazione non fisici in corrispondenza dello stato critico [179]. Dalla Fig. 3.1 emerge un buon accordo tra soluzione esatta e soluzioni numeriche, per le quali è stato rappresentato un punto di calcolo ogni due al fine di conferire all'immagine una maggiore leggibilità. Si noti come la discontinuità di contatto venga risolta con minore precisione rispetto all'onda a fronte ripido, senza apprezzabili differenze tra i due schemi in esame.
- *Test 2.* Pone a riferimento una situazione simmetrica costituita da due onde di depressione che, propagandosi in opposte direzioni, generano nella *star region* compresa tra di esse una condizione di quiete idrostatica contraddistinta da un valore modesto della profondità idrica. In Fig. 3.2, per entrambi i codici, si apprezza come l'assodata attitudine ad interpretare accuratamente le onde centrate di rarefazione e a preservare la simmetria, sia in conflitto con l'evidente impossibilità a calcolare con precisione lo stato idrico nella *star region* e con la notevole difficoltà a riprodurre la discontinuità di contatto statica [179].
- *Test 3.* Tale problema tipo, paragonabile al caso noto in letteratura come problema di *Ritter* [7, 19, 150], ammette una soluzione che consiste in una rarefazione sinistra transcritica (lo stato critico si stabilisce, indipendentemente dall'istante temporale corrente, in corrispondenza dell'ascissa x_0 a cui è posizionata la discontinuità iniziale) che interfaccia lo stato indisturbato a monte (sinistra) e quello asciutto a valle (destra). La Fig. 3.3, mostrando per ambedue gli schemi sotto indagine una sostanziale sovrapposizione tra andamenti attesi e calcolati per le variabili di interesse, dà implicita conferma del fatto che essi non accusano gli indesiderati inconvenienti che frequentemente inducono vari metodi numerici a stimare in maniera imprecisa la velocità di avanzamento dei fronti di bagnamento e asciugamento e a produrre oscillazioni spurie in prossimità degli stessi [179].

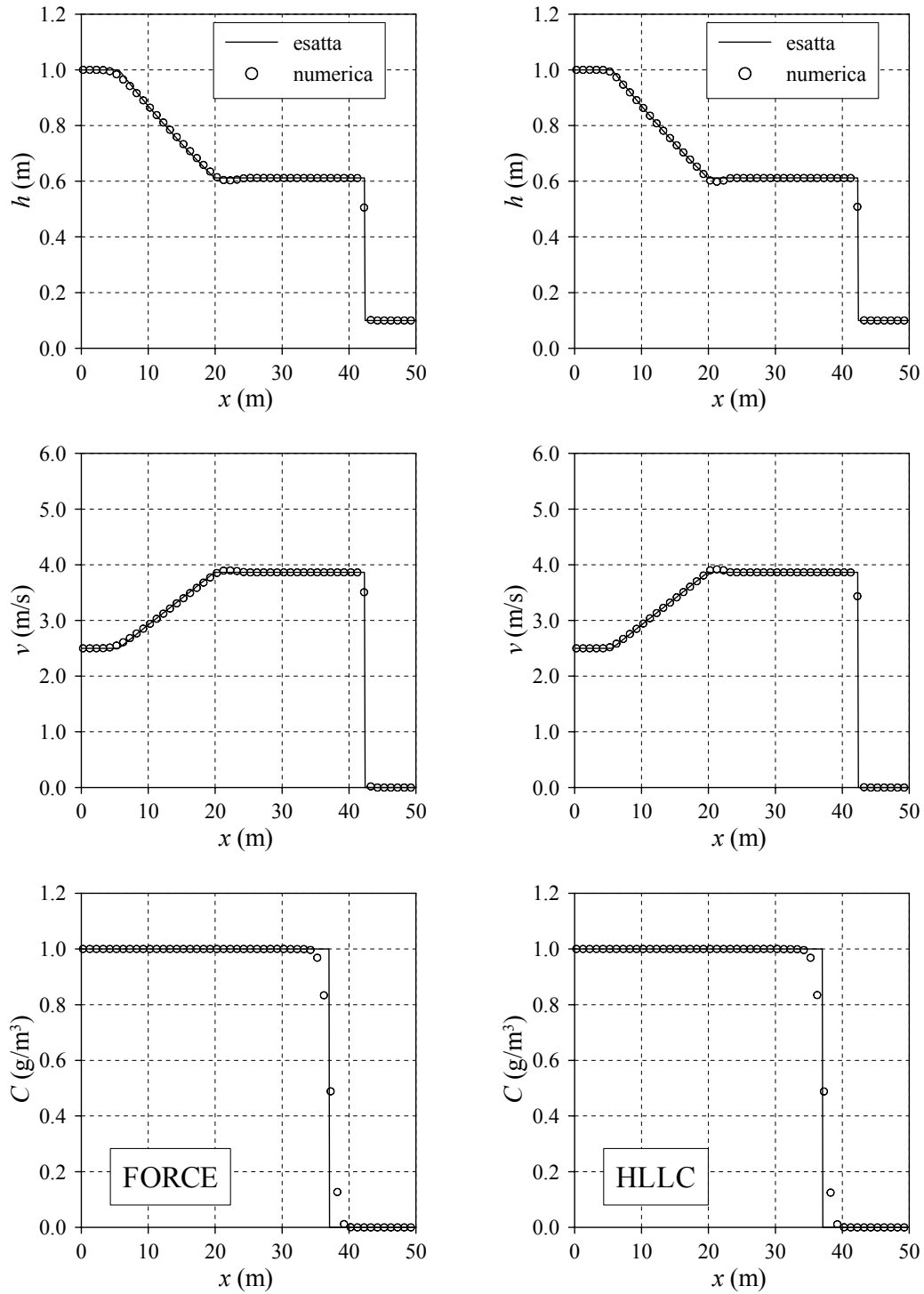


Figura 3.1: Test 1: confronto tra soluzione esatta e soluzioni numeriche.

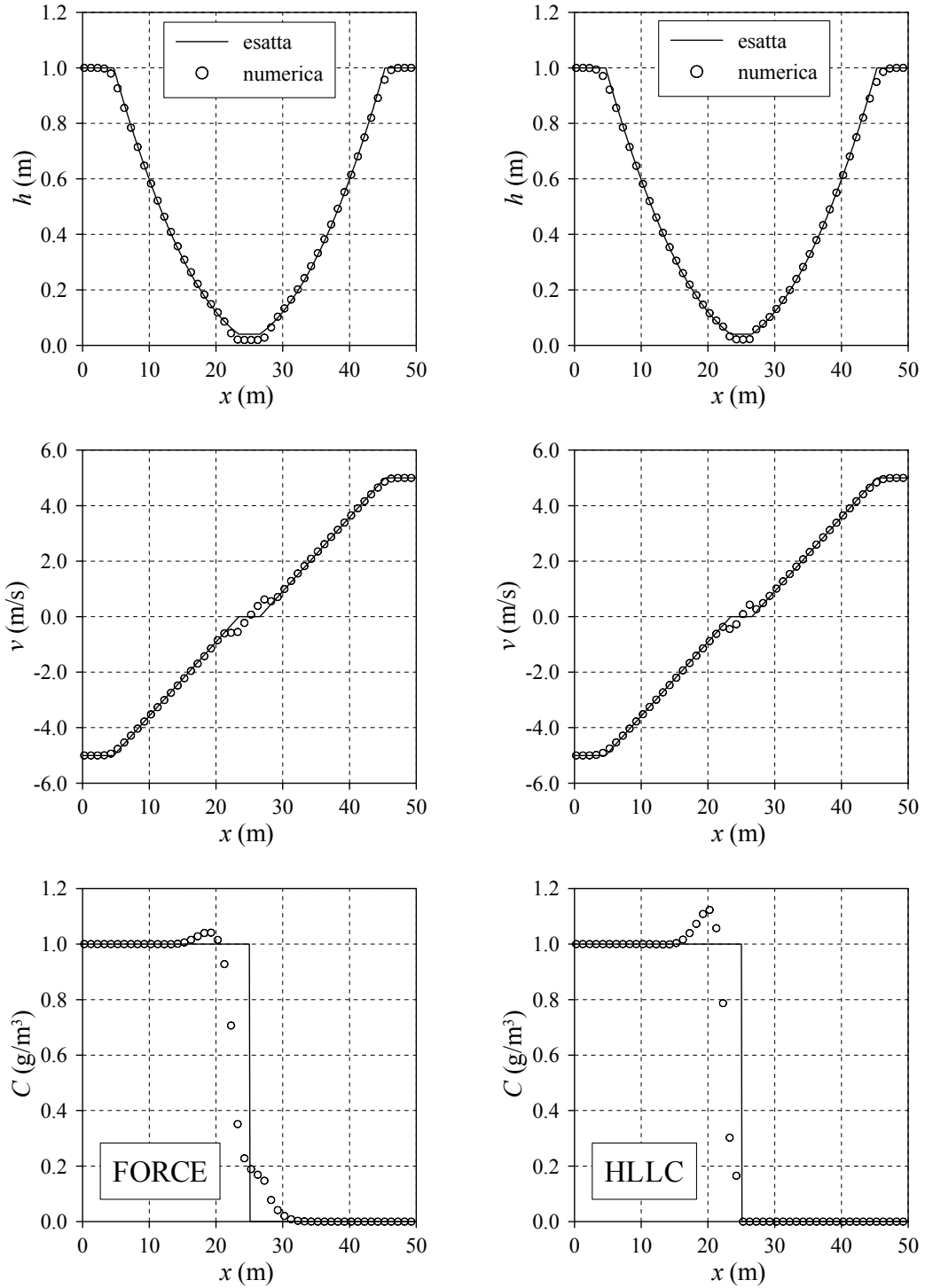


Figura 3.2: *Test 2: confronto tra soluzione esatta e soluzioni numeriche.*

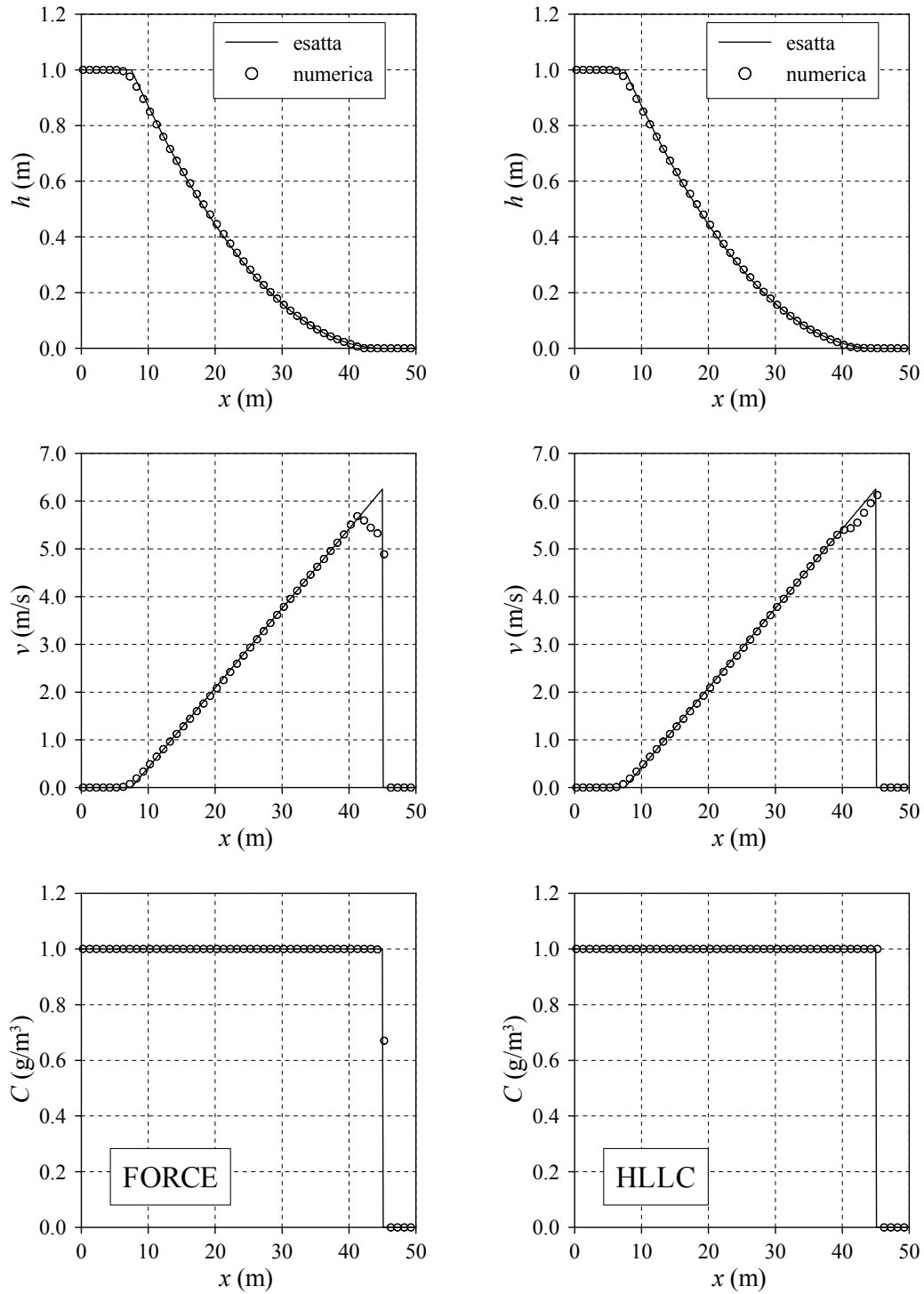


Figura 3.3: Test 3: confronto tra soluzione esatta e soluzioni numeriche.

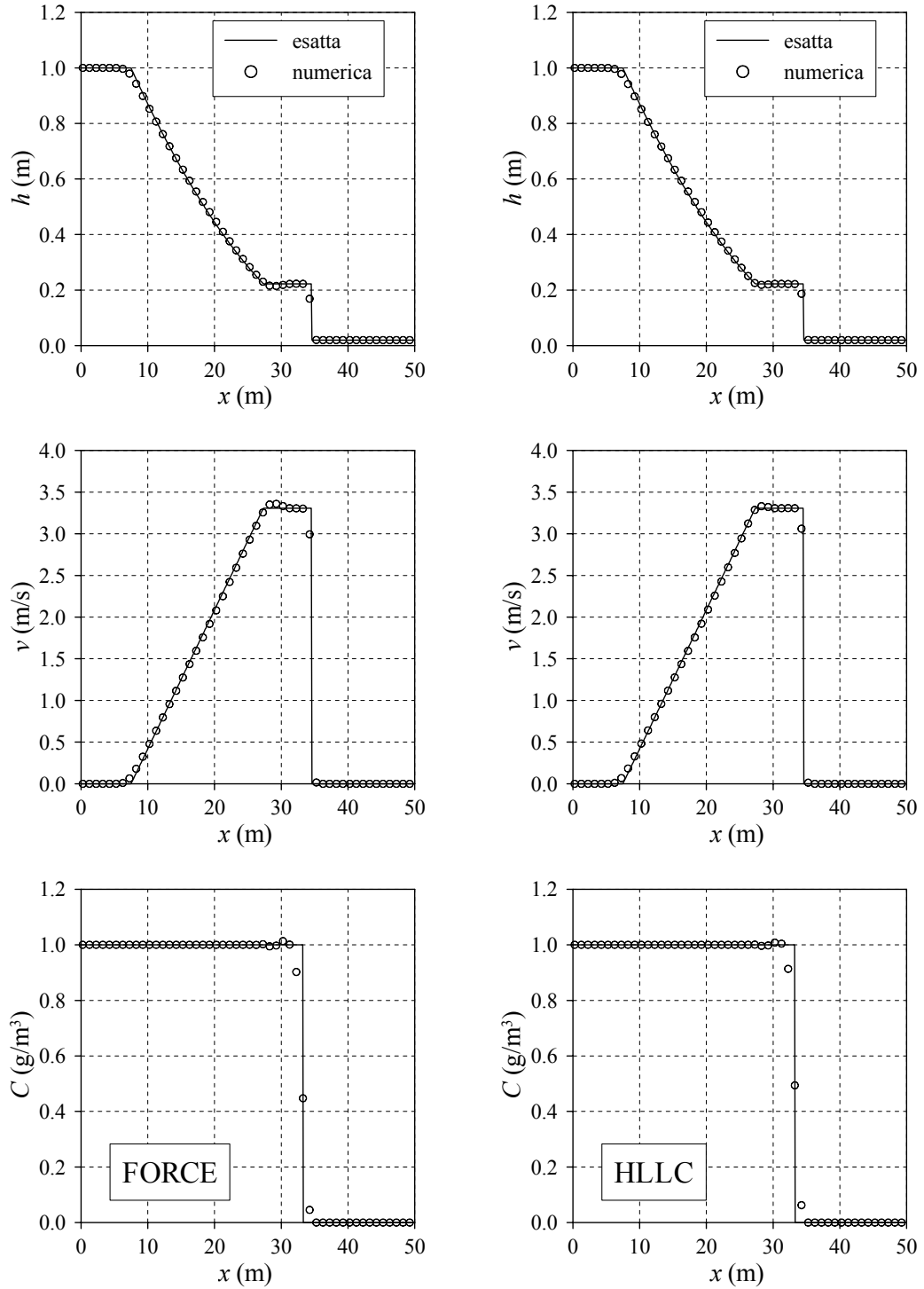


Figura 3.4: *Test 4: confronto tra soluzione esatta e soluzioni numeriche.*

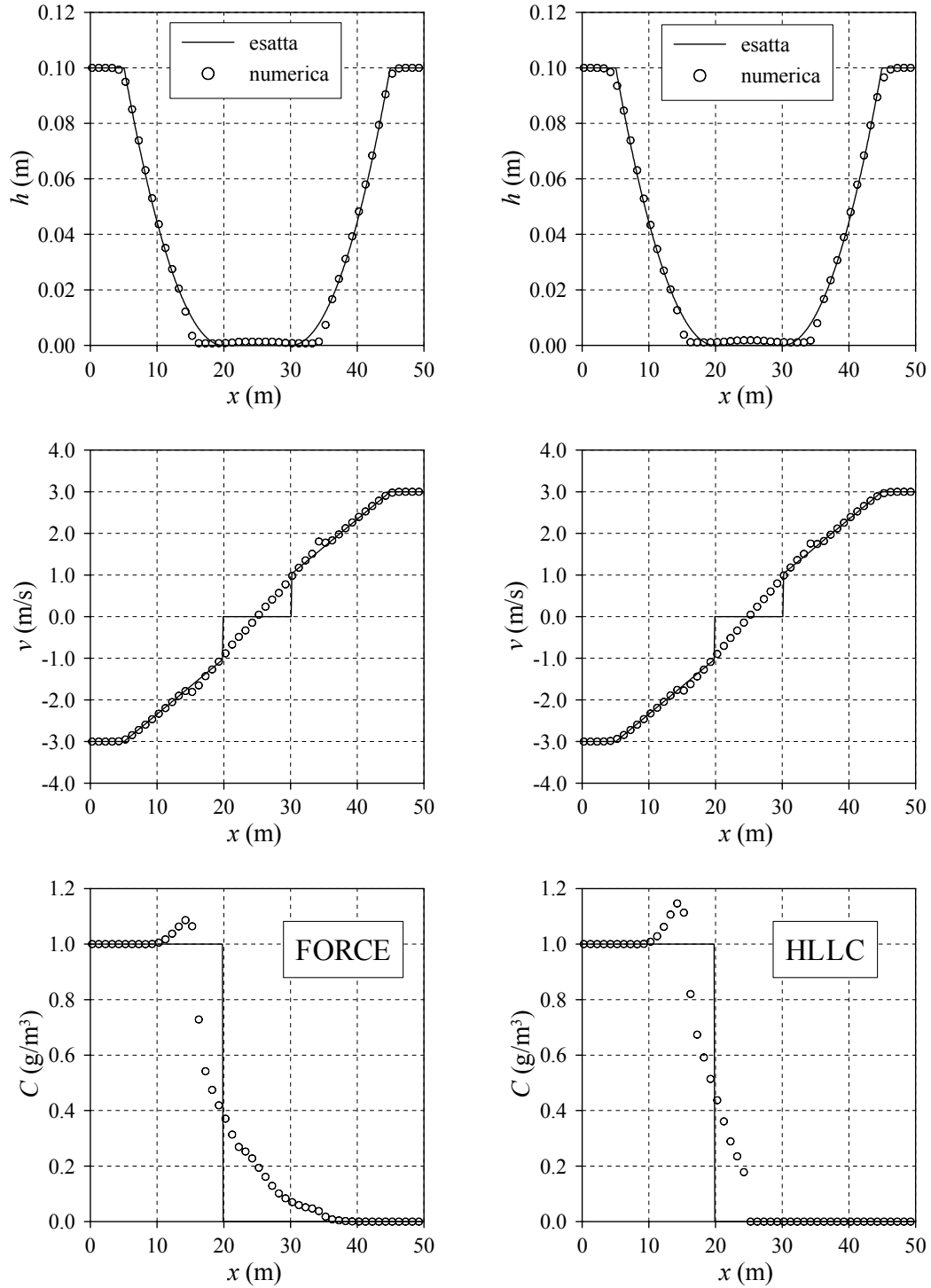


Figura 3.5: Test 5: confronto tra soluzione esatta e soluzioni numeriche.

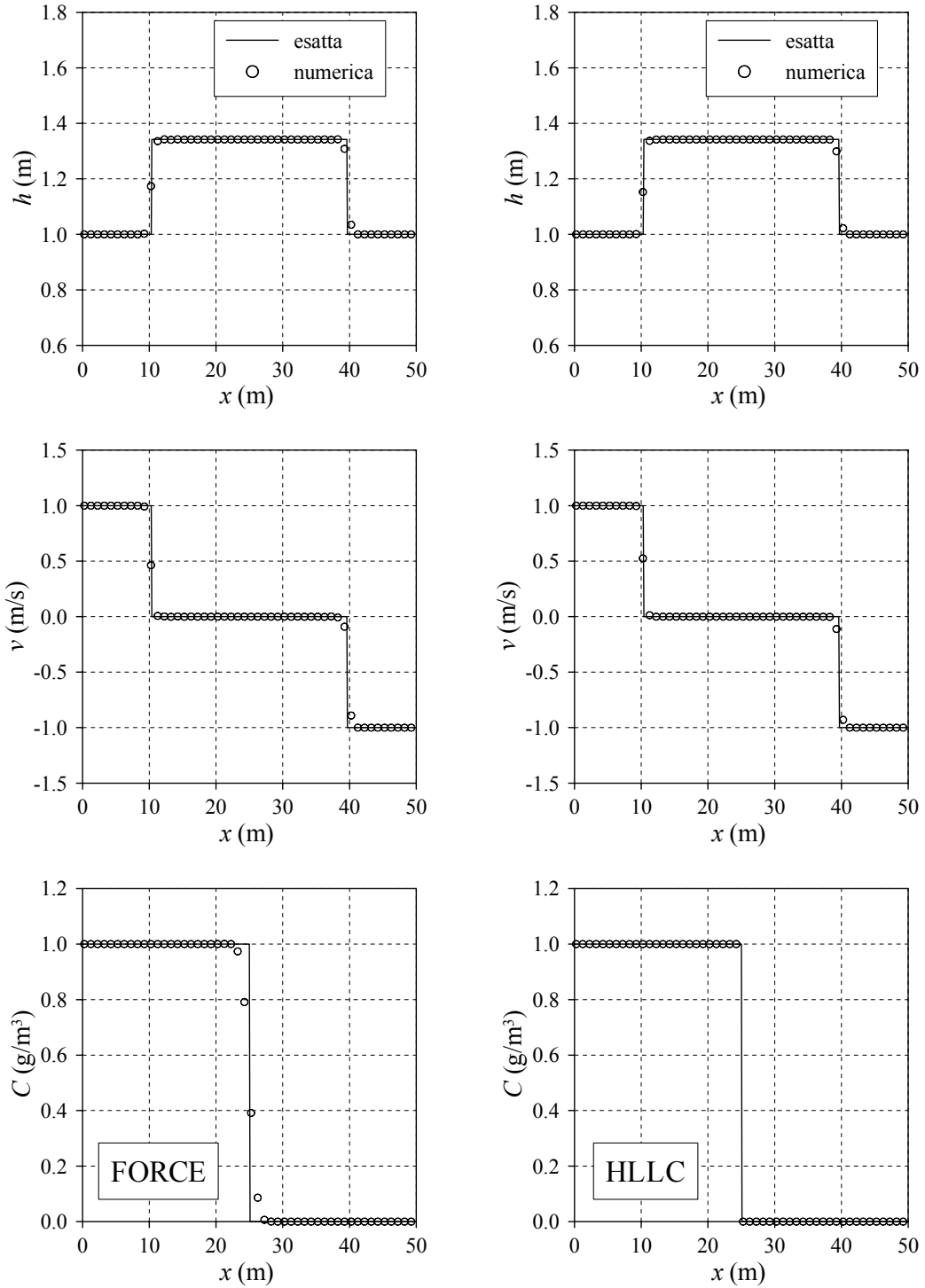


Figura 3.6: *Test 6: confronto tra soluzione esatta e soluzioni numeriche.*

Test	x	y	h_i	v_i	h_e	v_e	r_{dam}	t_{out}
A	$0 \div 50$ m	$0 \div 50$ m	10.0 m	0.0 m/s	1.0 m	0.0 m/s	11.0 m	0.69 s
B	$-1.5 \div 1.5$	$-1.5 \div 1.5$	0.1	0.0	1.0	0.0	0.35	1.0

Tabella 3.2: Dati per due test bidimensionali a simmetria radiale.

- *Test 4.* Del tutto simile al Test 1, offre un caso di *dam-break* su letto bagnato largamente affrontato in letteratura e conosciuto come problema di *Stoker* [7, 19, 159, 160]. In Fig. 3.4 è visibile l'esito favorevole del confronto tra soluzione analitica e previsioni avanzate dai modelli di calcolo.
- *Test 5.* Non adeguandosi gli stati iniziali alla condizione (1.78), questo test ammette soluzione consistente in due onde di rarefazione disposte simmetricamente che si allontanano reciprocamente provocando l'asciugamento di una porzione di alveo tra esse incluso. La Fig. 3.5, oltre a sancire l'inabilità di ambedue i codici a cogliere l'asciugamento della zona intermedia, conferma le ragguardevoli difficoltà connesse alla modellazione accurata delle onde di contatto [179].
- *Test 6.* Definisce un problema di *Riemann* le cui condizioni iniziali sono rappresentative dell'interazione tra due masse idriche che, collidendo l'una contro l'altra, danno vita ad una configurazione simmetrica in cui lo stato intermedio nella *star region* è di quiete [118]. Gli schemi numerici in esame colgono con soddisfacente accuratezza le due onde a fronte ripido che si muovono, nel rispetto della simmetria, verso le frontiere del dominio; inoltre il metodo di tipo *upwind* riproduce esattamente la discontinuità di contatto statica, mentre quello centrato la sviluppa in un certo numero di elementi di discretizzazione spaziale (Fig. 3.6).

Dai precedenti raffronti si può indubbiamente concludere che gli schemi presentati nel Cap. 2 (anche quello SGM, che in assenza di contributo forzante di tipo geometrico degenera nello SLIC) sono in grado, con prestazioni praticamente equiparabili, di interpretare la natura ondulatoria del problema monodimensionale aumentato (1.52), ricostruendone con sufficiente precisione le strutture caratteristiche.

3.1.2 Problema di *dam-break* circolare

È un problema bidimensionale a simmetria radiale di esplosione cilindrica [4, 5, 7, 10, 81, 118, 124, 177] consistente nel fenomeno rapidamente vario conseguente al crollo repentino (a $t = 0$ s) di una colonna idrica cilindrica, a sezione circolare di raggio r_{dam} pari a 11 m ed alta $h_i = 10$ m, collocata su dominio quadrato di lato uguale a 50 m, orizzontale e privo di resistenza, inizialmente ed uniformemente bagnato, all'esterno dell'ideale sistema di ritenuta circolare, con uno strato d'acqua dello spessore h_e di 1 m (Tab. 3.2 - Test A).

Il campo di moto è stato discretizzato per mezzo di una partizione cartesiana uniforme di complessive 200×200 celle quadrate di lato uguale a 0.25 m; sono stati inoltre adottati, ai fini della simulazione numerica, un numero di *Courant* Cr pari a 0.35 e la funzione limitatrice di pendenza (2.28) di *van Leer* [10].

La Fig. 3.7 riporta in diagramma i profili di profondità idrica e velocità su sezione assiale ($y = 25$ m) e diagonale ($y = x$) calcolati all'istante $t = 0.69$ s [124] tramite gli schemi di tipo

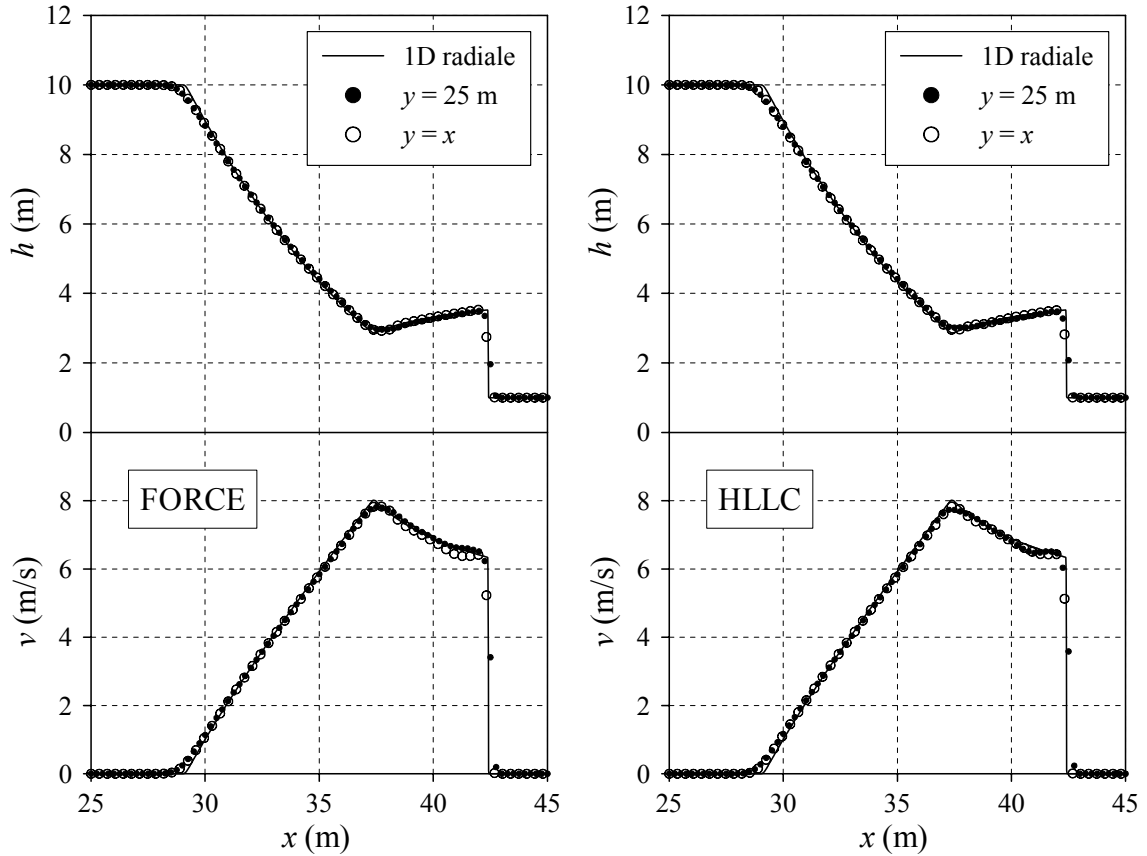


Figura 3.7: Problema di *dam-break* circolare: profili assiale e diagonale per altezza d'acqua e velocità all'istante $t = 0.69$ s. Risultati ottenuti dall'impiego di schemi MUSCL-*Hancock* con calcolo dei flussi eseguito con metodo FORCE e con solutore approssimato di Riemann HLLC. La soluzione numerica monodimensionale radiale approssima quella esatta.

MUSCL-*Hancock* descritti in precedenza. Nella stessa figura, i risultati computazionali vengono posti a confronto con la soluzione di riferimento acquisita risolvendo in coordinate polari (r, θ) il seguente problema monodimensionale non dipendente dall'anomalia θ [118, 124, 177], proiezione su piano radiale di quello originario bidimensionale (1.16):

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{U} + \frac{\partial}{\partial r} \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \mathbf{S}(\mathbf{U}), \quad (3.1)$$

dove $\mathbf{U} = [h, vh]^T$, $\mathbf{F}(\mathbf{U}) = [vh, v^2h + \frac{1}{2}gh^2]^T$, $\mathbf{S}(\mathbf{U}) = -\frac{1}{r} [vh, v^2h]^T$ e $v(t, r)$ rappresenta la velocità in direzione radiale; tale soluzione di riferimento, conseguita discretizzando ai volumi finiti il dominio monodimensionale $25 \text{ m} \leq r \leq 50 \text{ m}$ con 2000 intervalli uniformi ed applicando la tecnica WAF (*Weighted Average Flux*) [10, 26, 28, 71, 177–179] alla (3.1), può a buon titolo essere considerata ottima approssimazione di quella esatta. Dall'attenta disamina dei diagrammi riportati in Fig. 3.7, convenientemente limitati tra le ascisse $x = 25 \text{ m}$ e $x = 45 \text{ m}$ per poter riconoscere agevolmente

tutti i punti di calcolo restituiti senza omissioni, si desume che i due metodi numerici utilizzati forniscono soluzioni che, oltre a riprodurre in maniera più che soddisfacente quella di riferimento e a risolvere lo *shock* con accuratezza, si distinguono tra loro per differenze di fatto inapprezzabili. Inoltre sembra essere preservata in maniera eccellente la simmetria.

In Fig. 3.8 si può osservare, infine, una ricostruzione tridimensionale del campo di altezze idriche calcolato per l'istante $t = 0.69$ s impiegando il codice SLIC. Si noti come, dopo il rilascio dell'ipotetica parete cilindrica di contenimento, un'onda a fronte ripido si trasferisca radialmente verso l'esterno, mentre un'onda di depressione retroceda verso l'interno: si configura cioè una struttura che si diversifica da quella del tutto simile del caso monodimensionale di *Stoker* per l'andamento non uniforme delle grandezze conservate tra le due onde non lineari causato dalla presenza del termine forzante $\mathbf{S}(\mathbf{U})$ nelle (3.1) [118].

3.1.3 Problema di implosione cilindrica

Questo caso test, noto in letteratura come problema di *shock-focusing*, delinea un problema bidimensionale a simmetria circolare di implosione cilindrica. Esso è piuttosto severo e delicato, dal momento che è ampiamente documentato come causi serie difficoltà a numerosi codici di calcolo basati su discretizzazione cartesiana del campo di moto [7, 10, 25, 124, 137].

Nella parte centrale di un dominio quadrato adimensionale $(-1.5, 1.5) \times (-1.5, 1.5)$, orizzontale e liscio, è collocata un'opera di ritenuta cilindrica ideale di spessore nullo, a sezione circolare, caratterizzata da un raggio r_{dam} pari a 0.35 [124]. La configurazione di quiete iniziale, consistente in un'altezza idrica h_i interna alla parete pari a 0.1 e in un'altezza d'acqua esterna h_e uguale a 1.0 (Tab. 3.2 - Test B), viene turbata all'atto dell'istantanea rimozione (a $t = 0$) dell'elemento di separazione tra i due suddetti stati. Si assiste alla propagazione, governata da un campo di gravità adimensionale con accelerazione $g = 1.0$ [124], di un'onda di *shock* e di un'onda di depressione circolari rispettivamente verso l'interno e l'esterno del dominio. L'onda a fronte ripido si concentra via via verso il *focusing point* $(0, 0)$ e, superata questa singolarità, si espande successivamente verso la frontiera geometrica del dominio, come evidenziato nella Fig. 3.9 che restituisce una rappresentazione tridimensionale del campo adimensionale di altezze idriche calcolato dal modello numerico SLIC per gli istanti $t = 0.2$, $t = 0.4$ e $t = 1.0$.

Il fenomeno è stato simulato mediante i due soliti schemi di tipo MUSCL-*Hancock*, impostando il numero di *Courant* pari a 0.25 ed accettando ancora l'effetto di viscosità artificiale introdotto dalla funzione *limiter* di *van Leer*; inoltre il dominio spaziale è stato suddiviso uniformemente in 160×160 elementi quadrati [10, 124].

I profili assiali ($y = 0$) e diagonali ($y = x$) stimati per la profondità idrica e la velocità sono comparati in Fig. 3.10 con la soluzione di raffronto, che si intende buona approssimazione di quella esatta essendo stata ottenuta risolvendo numericamente mediante metodo WAF [178] il problema monodimensionale radiale (3.1) sull'intervallo $0 \leq r \leq 1.5$ suddiviso in 5000 segmenti uguali. Si rilevi come la simmetria circolare sia ben mantenuta, soprattutto per la variabile h , e come venga ottimamente colta l'onda di *shock* attraverso la quale si riscontra l'inversione della direzione del moto. Una singolare perdita di simmetria, particolarmente accentuata nello schema che fa uso del solutore approssimato HLLC del problema di *Riemann*, si evidenzia nei profili di velocità radiale in prossimità del *focusing point*: questo comportamento è certamente riconducibile al fatto [10, 137] che il fenomeno di implosione, non simulato accuratamente con reticolo spaziale fisso, introduce errori il cui effetto, largamente risentito nella fase di espansione dell'onda di *shock*, può essere ridimensionato perfezionando opportune procedure di limitazione delle pendenze [137].

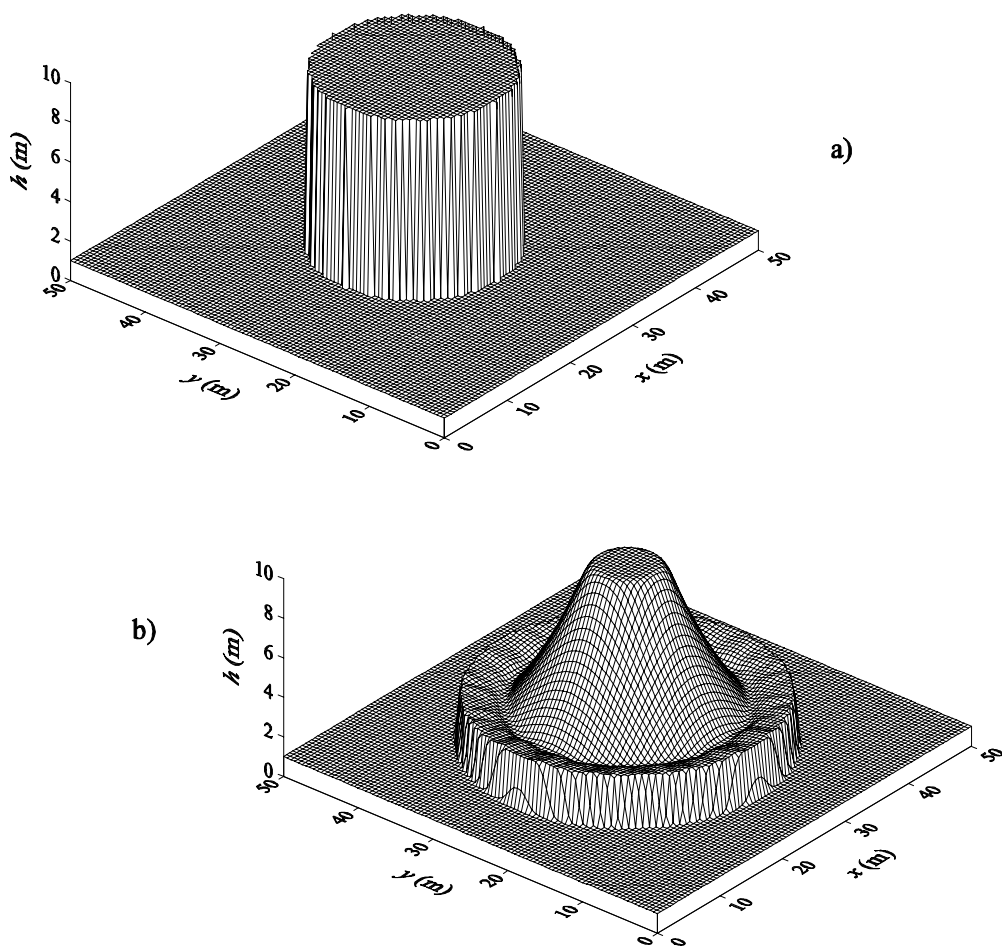


Figura 3.8: Diagrammi tridimensionali dell'altezza idrica per problema di esplosione cilindrica: a) condizione iniziale, b) risultato ottenuto dal modello SLIC all'istante $t = 0.69$ s.

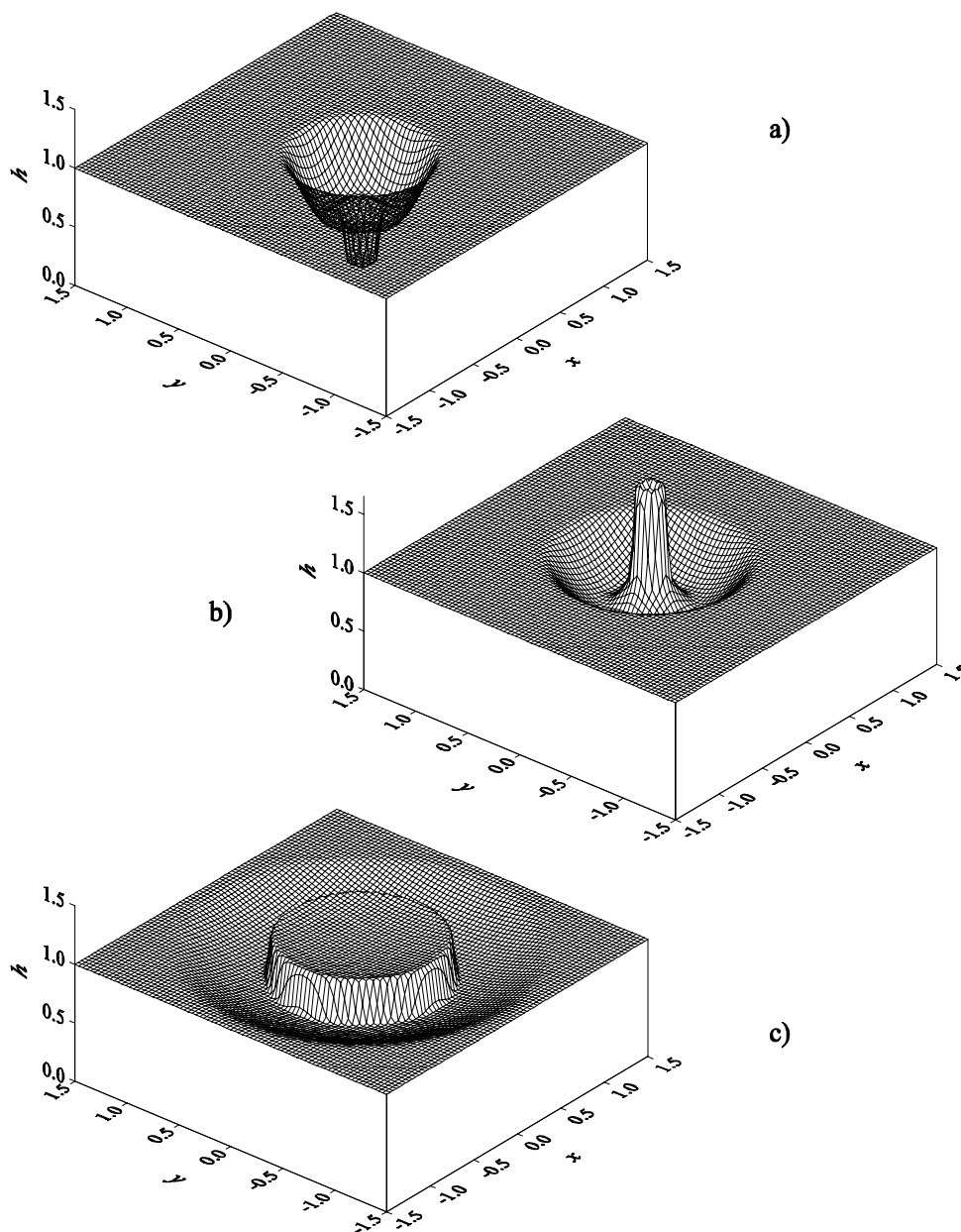


Figura 3.9: Diagrammi tridimensionali dell'altezza idrica per problema di implosione cilindrica ottenuti mediante modello SLIC agli istanti: a) $t = 0.2$, b) $t = 0.4$, c) $t = 1.0$.

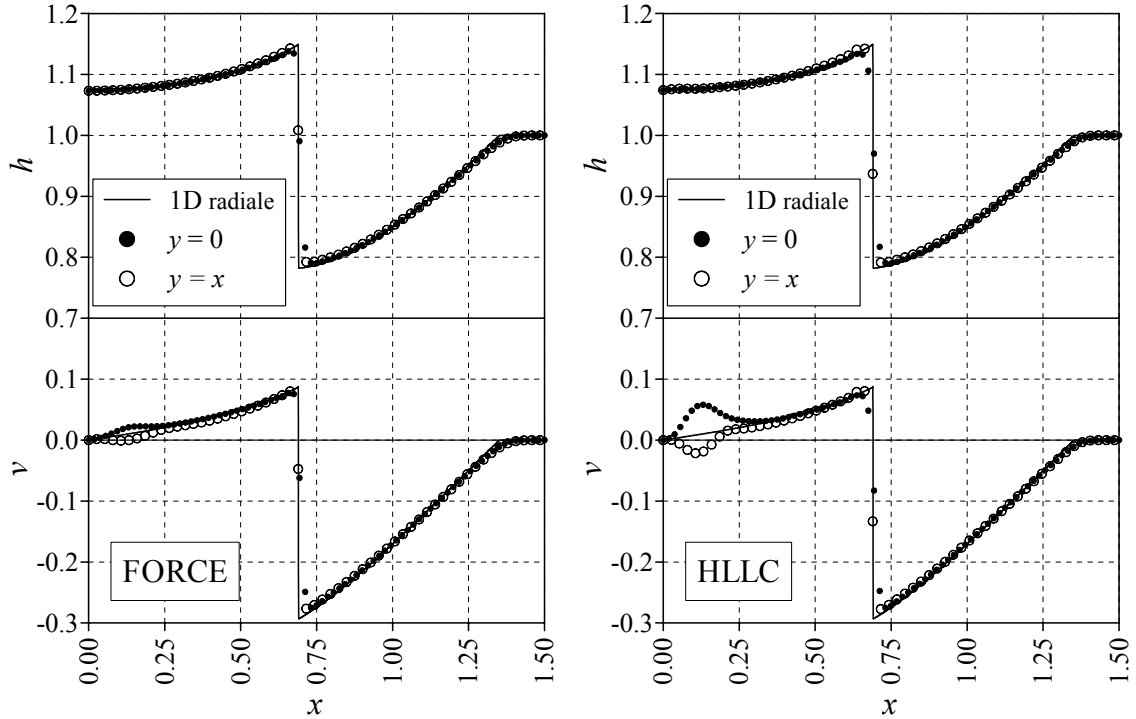


Figura 3.10: *Problema di shock-focusing: profili assiale e diagonale per altezza d'acqua e velocità all'istante $t = 1.00$. Risultati ottenuti dall'impiego di schemi MUSCL-Hancock con calcolo dei flussi eseguito con metodo FORCE e con solutore approssimato di Riemann HLLC. La soluzione numerica monodimensionale radiale approssima quella esatta.*

3.1.4 Corrente stazionaria su salto di fondo

Questo paragrafo tratta di quattro distinti casi test inerenti i flussi permanenti che si instaurano in un canale rettangolare di larghezza unitaria, lungo 20 m ($-10 \text{ m} \leq x \leq 10 \text{ m}$), privo di resistenza, con fondo irregolare rispondente all'equazione:

$$b(x, y) = \begin{cases} 0.2 - 0.05x^2 & \text{per } -2 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}, \quad (3.2)$$

qualora si impongano le seguenti condizioni al bordo:

- a) sul contorno di monte una portata uguale a $0.18 \text{ m}^3/\text{s}$ e sul contorno di valle un livello idrico pari a 0.33 m [38, 87, 123, 203, 213];
- b) sul contorno di monte una portata di $1.53 \text{ m}^3/\text{s}$ e a valle un contorno trasmissivo [87, 213];
- c) sul contorno di monte una portata uguale a $4.42 \text{ m}^3/\text{s}$ e sul contorno di valle una profondità idrica pari a 2.00 m [87, 213];
- d) sul contorno di monte una portata di $1.53 \text{ m}^3/\text{s}$ e un'altezza idrica uguale a 0.30 m ; a valle un contorno di tipo trasmissivo.

Nel caso a) si sviluppa una corrente transcritica con formazione di un risalto idraulico, mentre nel caso b) una corrente transcritica che emerge veloce dal salto di fondo; nei casi c) e d), infine, la corrente si mantiene ovunque rispettivamente subcritica e supercritica. Si ricorre ad essi proponendosi lo scopo di accertare non solo le proprietà *shock-capturing* e le capacità predittive degli schemi di calcolo presentati nel Cap. 2 in presenza di transizioni da corrente veloce a corrente lenta e viceversa, ma soprattutto la correttezza e l'affidabilità della tecnica di trattamento del termine sorgente di pendenza.

Ai fini computazionali il dominio spaziale è stato discretizzato mediante 200×10 elementi quadrati di lato uguale a 0.10 m; il numero di *Courant* è stato fissato pari a 0.35 ed è stata adottata ancora una volta la funzione limitatrice di pendenza di *van Leer*; la scelta delle condizioni iniziali non è particolarmente rilevante, avendo influenza solo sulla durata e sulla dinamica della fase transitoria che precede il raggiungimento della condizione di regime.

Nelle Figg. 3.11, 3.12, 3.13 e 3.14 appare l'accostamento, limitatamente all'intervallo $-3 \text{ m} \leq x \leq 3 \text{ m}$ per maggiore chiarezza, tra i risultati scaturiti dalla modellazione numerica e la soluzione di riferimento valutata risolvendo con un passo di discretizzazione spaziale $\Delta x = 0.005 \text{ m}$ l'equazione di *Bernoulli* e bilanciando con la stessa accuratezza nello spazio le spinte dinamiche per la collocazione dell'eventuale risalto idraulico [49, 129]. I due modelli matematici confrontati appartengono uno alla tipologia dei metodi SGM (*Surface Gradient Method*) descritta nel paragrafo 2.2.5, l'altro alla famiglia dei metodi DGM (*Depth Gradient Method*); quest'ultimo tratta con tecnica frazionata distintamente il termine sorgente dalla parte omogenea delle equazioni di conservazione (1.11), alla quale riserva una procedura di discretizzazione, nota con l'acronimo SLIC, di cui si è riferito diffusamente nel paragrafo 2.2.1.

Entrambi approssimano in maniera soddisfacente su tutto il campo di moto sia i profili della superficie libera che i profili di velocità; inoltre riproducono con buona precisione l'altezza e la posizione del risalto idraulico che si stabilisce nel caso a). I risultati relativi al codice DGM presentano nei casi a), b) e c) una quasi impercettibile oscillazione spuria della quota idrica in corrispondenza dei piedi di monte e di valle del salto di fondo e una lieve imprecisione nella stima della velocità in prossimità delle propaggini estreme dell'ostacolo: a ciò si può imputare la responsabilità di una previsione non corretta della portata. Tali effetti, dovuti principalmente al trattamento *splitting* del termine sorgente, risultano tanto più evidenti quanto maggiore è l'altezza dell'irregolarità e quanto minore è la sua risoluzione resa dalla discretizzazione nello spazio [10]; essi sono per contro notevolmente ridotti, se non completamente assenti, nei profili calcolati con codice SGM, pur sopravvivendo nel caso a) una certa discrepanza, indotta dalla presenza del risalto, tra portata stimata e portata attesa. Nel caso d), invece, lo schema di tipo DGM restituisce un'approssimazione particolarmente accurata (anche in termini di portata specifica) della soluzione esatta, mentre la tecnica SGM introduce nel profilo di velocità oscillazioni spurie localizzate sui lembi del salto di fondo.

3.1.5 Risalto idraulico stazionario in canale scabro

Questo test [43, 79, 133, 213] è finalizzato ad appurare la correttezza e la robustezza della procedura di trasposizione al discreto del termine forzante di resistenza delineata nel paragrafo 2.2.4 e si concretizza nella verifica della localizzazione del risalto idraulico che si stabilisce in una corrente permanente monodimensionale transcritica convogliata da un alveo orizzontale scabro. La posizione del risalto è infatti largamente determinata dall'effetto di resistenza al moto offerta dal fondo [43, 48, 214].

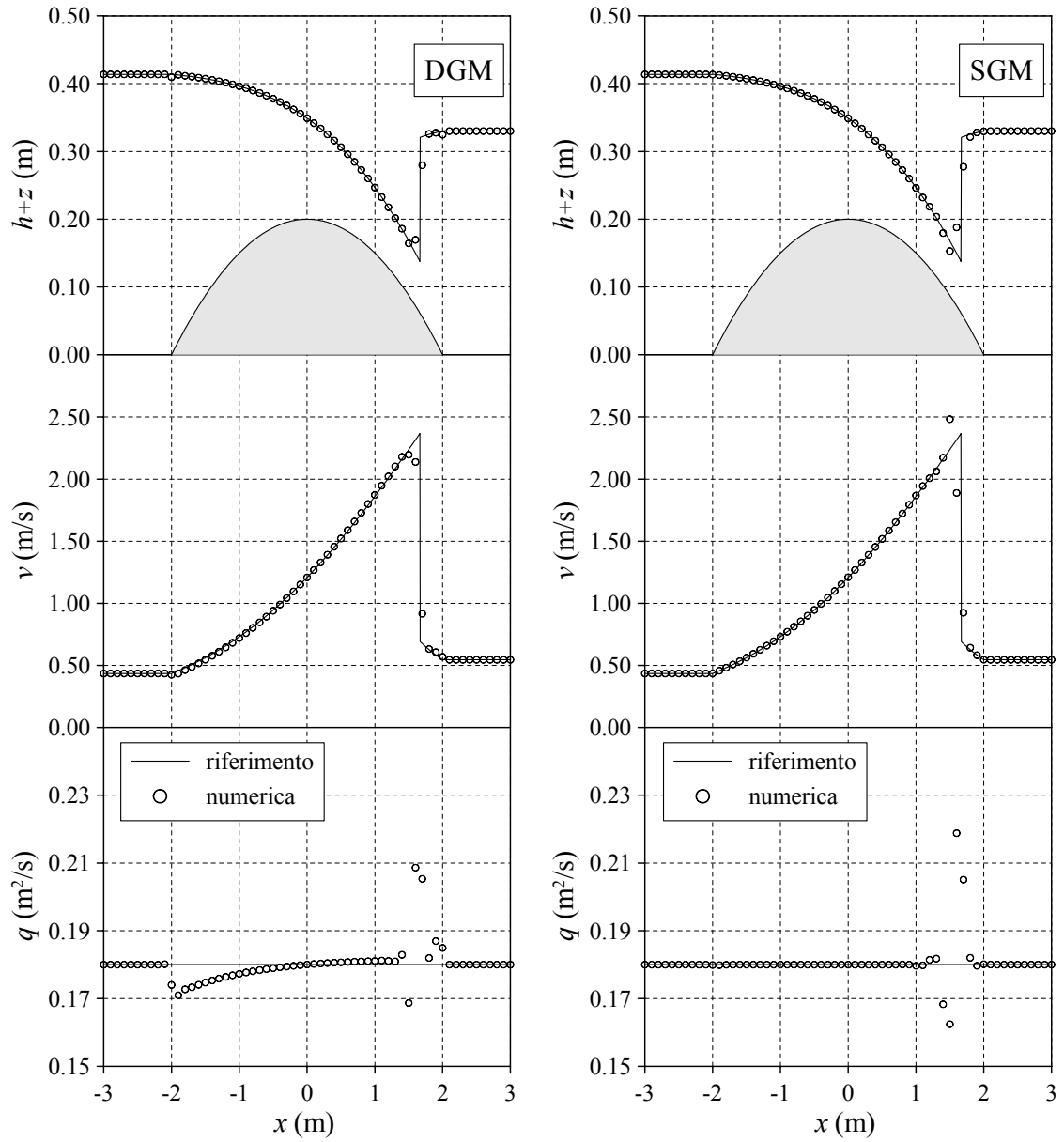


Figura 3.11: Caso a): confronto (condotto per due metodi, uno di tipo DGM, l'altro di tipo SGM) tra soluzione di riferimento e risultati numerici per flusso monodimensionale stazionario transcritico (in presenza di risalto) su irregolarità di fondo parabolica.

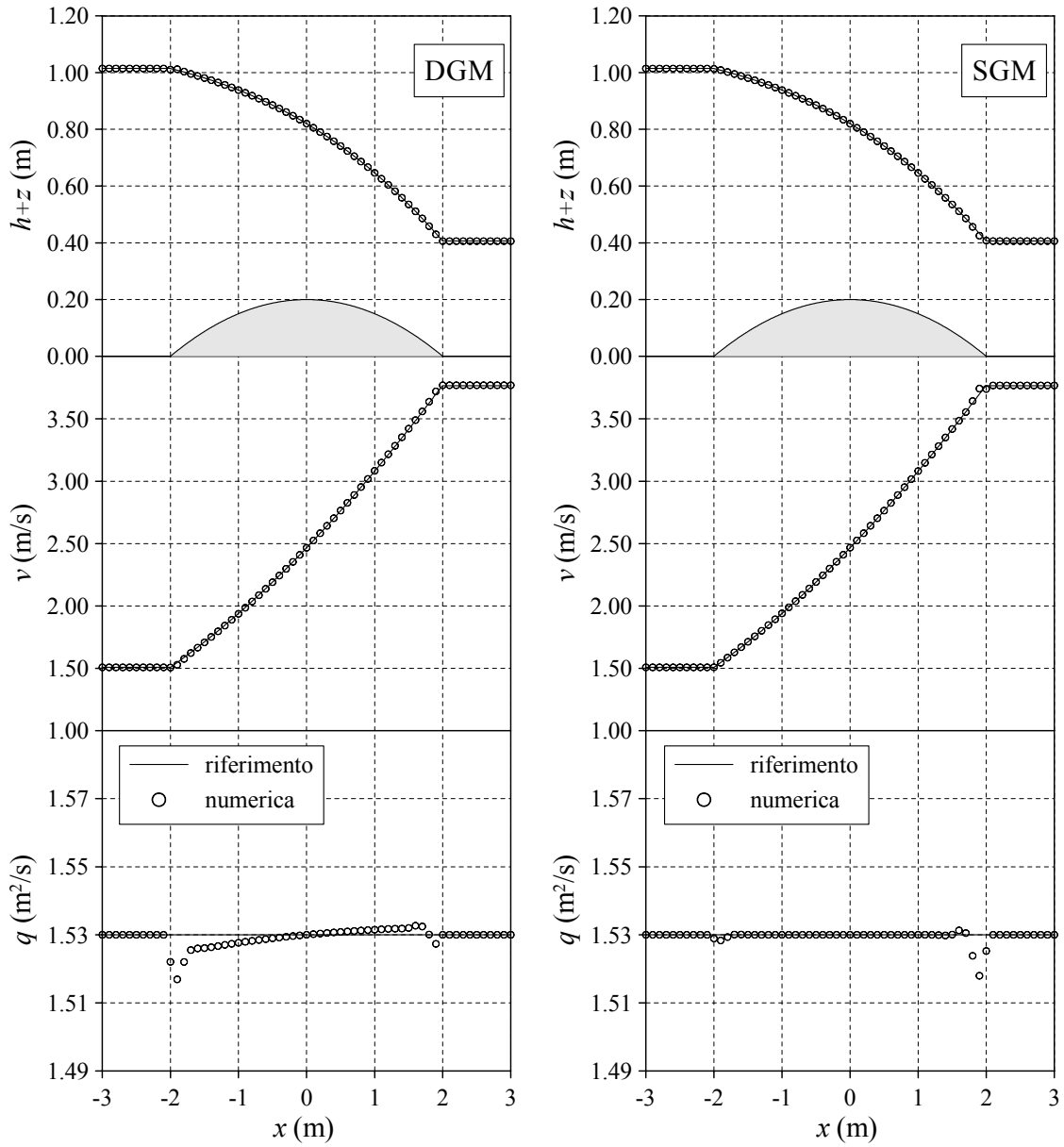


Figura 3.12: Caso b): confronto (condotto per due metodi, uno di tipo DGM, l'altro di tipo SGM) tra soluzione di riferimento e risultati numerici per flusso monodimensionale stazionario transcritico (senza risalto) su irregolarità di fondo parabolica.

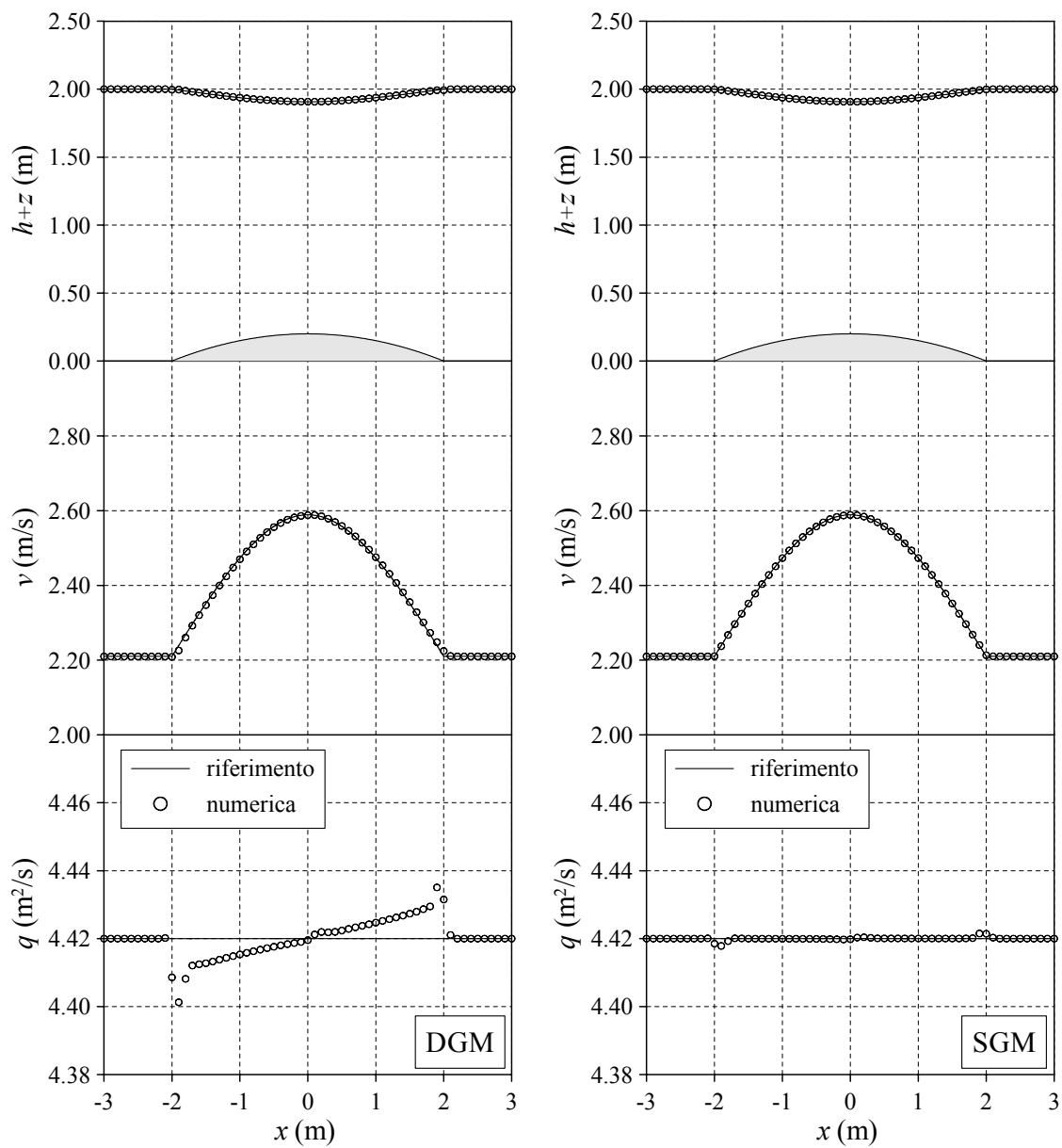


Figura 3.13: Caso c): confronto (condotto per due metodi, uno di tipo DGM, l'altro di tipo SGM) tra soluzione di riferimento e risultati numerici per flusso monodimensionale stazionario subcritico su irregolarità di fondo parabolica.

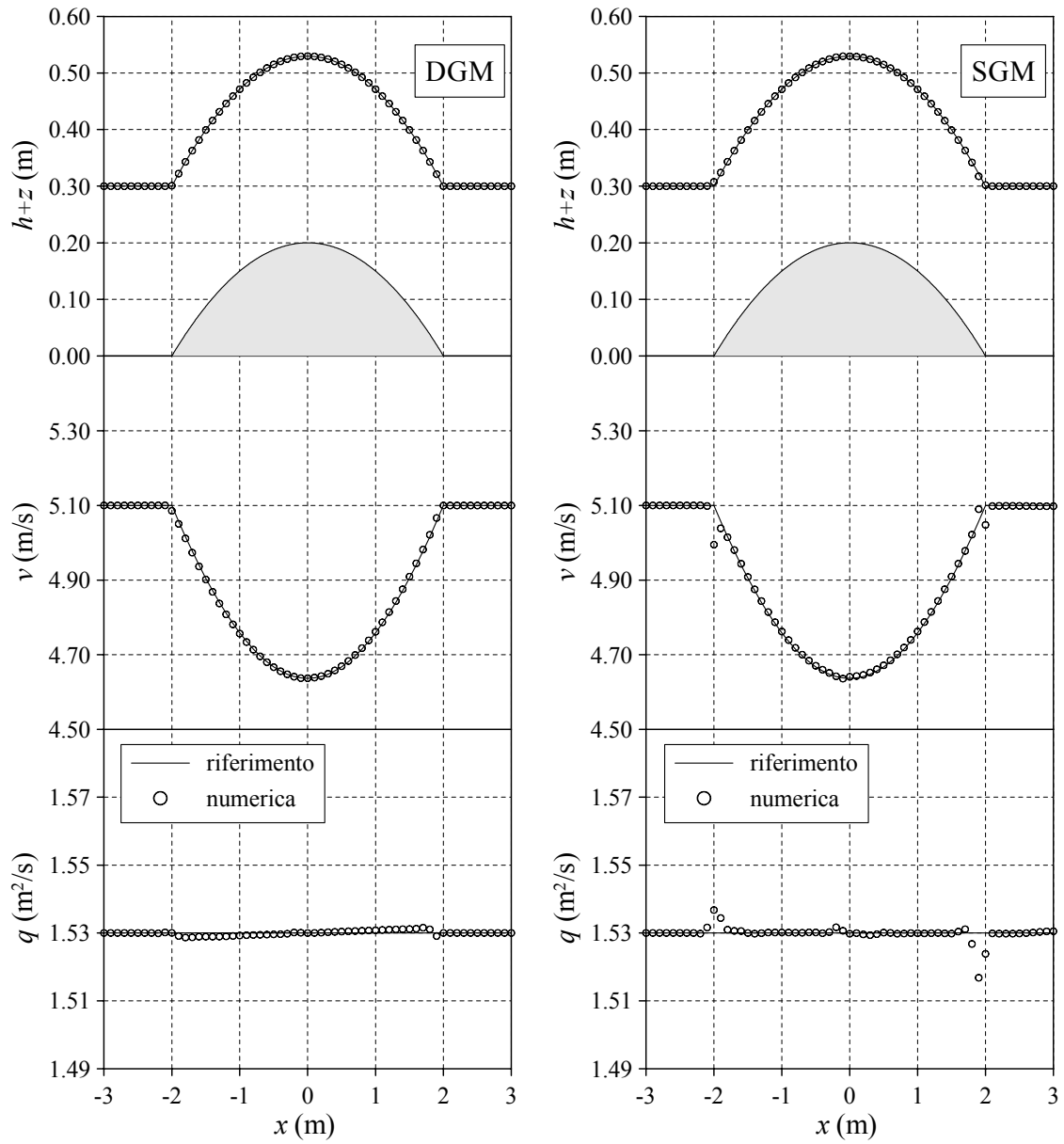


Figura 3.14: Caso d): confronto (condotto per due metodi, uno di tipo DGM, l'altro di tipo SGM) tra soluzione di riferimento e risultati numerici per flusso monodimensionale stazionario supercritico su irregolarità di fondo parabolica.

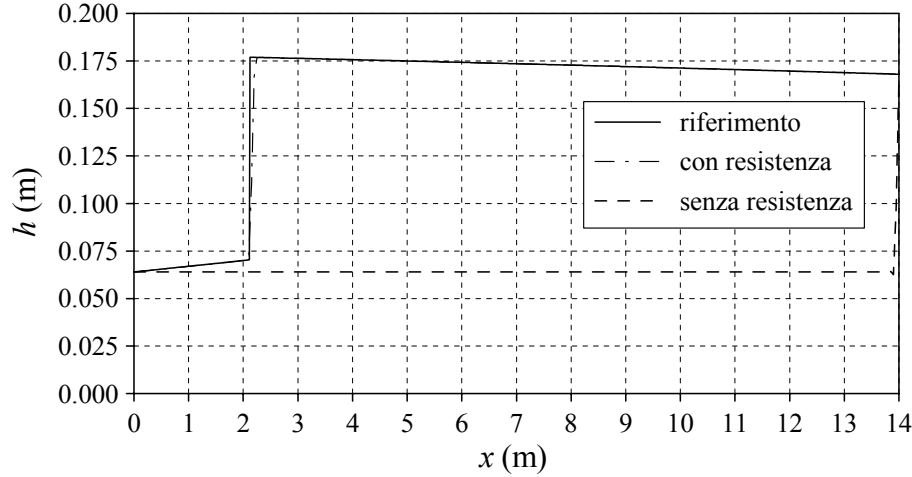


Figura 3.15: Risalto idraulico in corrente stazionaria: confronto tra profilo idrico di riferimento e profili numerici calcolati col codice SLIC associato a trattamento *splitting* semi-implicito del termine sorgente.

Nella fattispecie [43], in un canale a sezione rettangolare, lungo 14 m e largo 0.46 m, a fondo orizzontale caratterizzato da un coefficiente di *Manning* n stimabile mediamente in $0.01 \text{ s m}^{-1/3}$, è imposta a monte una corrente veloce ($h_m = 0.064 \text{ m}$ e $v_m = 1.92 \text{ m/s}$, a cui corrisponde $Fr_m = 2.3$) e a valle una condizione al bordo di livello idrico fissato ($h_v = 0.168 \text{ m}$).

La Fig. 3.15 illustra come l'andamento delle altezze idriche, calcolato tramite il metodo SLIC ($Cr = 0.35$) associato ad una procedura *splitting* del termine sorgente, si conformi ottimamente al profilo di moto permanente di riferimento tracciato risolvendo numericamente l'equazione di bilancio energetico ed imponendo l'uguaglianza delle spinte dinamiche per il posizionamento del risalto [49, 129].

Il dominio di calcolo è stato ripartito in 280×10 celle rettangolari, tutte di dimensioni $0.050 \text{ m} \times 0.046 \text{ m}$.

Infine, a conferma del ruolo determinante svolto nel caso in esame dal termine sorgente di resistenza, è disegnato in Fig. 3.15 anche il profilo computato annullando la scabrezza [213].

3.1.6 Deviazione brusca in corrente veloce

Quest'ultimo test, che trova un interessante parallelo nel campo della dinamica dei fluidi comprimibili [144, 179, 206], considera l'onda positiva obliqua [43, 102, 129, 132, 205] che si forma su un dominio orizzontale rettangolare $40 \text{ m} \times 20 \text{ m}$, in assenza di resistenza, a seguito dell'interazione tra una corrente permanente supercritica, caratterizzata da un'altezza $h_m = 1.0 \text{ m}$ e una velocità $u_m = 8.57 \text{ m/s}$ (per un numero di *Froude* $Fr_m = 2.74$), ed una parete solida *free-slip* convergente che individua un angolo $\alpha = 8.95^\circ$ con la direzione x del flusso indisturbato [38, 124].

Tale onda, coincidente con una linea di disturbo inclinata di un angolo β rispetto alla direzione x , ha origine nel vertice della deviazione; attraverso di essa le caratteristiche del moto cambiano in maniera discontinua e si assestano su un'altezza h_v ed una velocità u_v parallela alla parete.

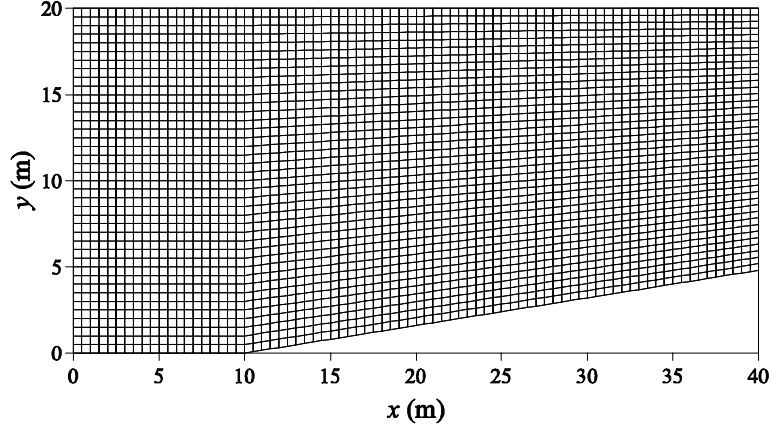


Figura 3.16: Reticolo di calcolo adottato per la descrizione di una brusca deviazione di angolo $\alpha = 8.95^\circ$.

Proiettando l'equazione del moto sulle direzioni ortogonale e parallela al fronte d'onda e facendo uso dell'equazione di continuità, nell'ipotesi che sia trascurabile la componente verticale della velocità ed idrostatica la distribuzione delle pressioni, si ottiene il sistema di relazioni [129]:

$$\begin{cases} \sin \beta = \frac{1}{Fr_m} \sqrt{\frac{1}{2} \frac{h_v}{h_m} \left(1 + \frac{h_v}{h_m}\right)} \\ h_m \tan \beta = h_v \tan(\beta - \alpha) \\ \frac{u_m}{u_v} = \frac{h_v \sin(\beta - \alpha)}{h_m \sin \beta} \end{cases}, \quad (3.3)$$

che consente di dedurre, noti l'angolo di incidenza α e le caratteristiche idrauliche della corrente a monte, le seguenti uguaglianze [4, 124]: $\beta = 30^\circ$, $h_v = 1.5$ m e $u_v = 7.9556$ m/s. In più il numero di *Froude* della corrente in arrivo è sufficientemente maggiore di uno in relazione all'entità della deviazione affinché l'onda sia a fronte ripido [129]:

$$Fr_m \cdot \sin \beta = 1.37 \gtrsim 1.28; \quad (3.4)$$

poiché $Fr_v = 2.07 > 1.0$, il flusso a valle si conserva supercritico.

Al dominio di calcolo è stato sovrapposto un insieme di 80×40 elementi quadrangolari organizzati secondo la *mesh* strutturata non cartesiana riportata in Fig. 3.16. Sulle frontiere destra ($x = 40$ m) e superiore ($y = 20$ m) sono state imposte condizioni al contorno di tipo assorbente [124], mentre a quella sinistra ($x = 0$ m) sono stati assegnati contemporaneamente una portata specifica di $8.57 \text{ m}^2/\text{s}$ ed un livello idrico pari ad 1.0 m. Al numero di *Courant* è stato attribuito il valore di 0.45.

La Fig. 3.17 mostra l'abilità del metodo SLIC a valutare appropriatamente l'angolo di *Mach* β e le grandezze idrauliche a valle dello *shock*.

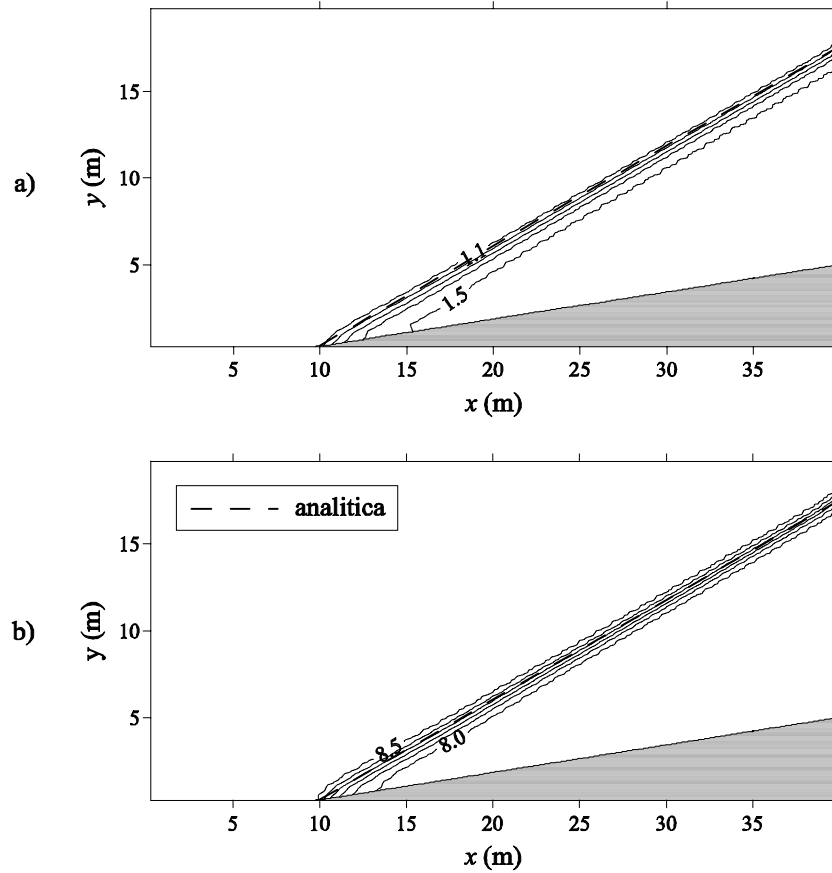


Figura 3.17: Corrente veloce ($Fr_m = 2.74$) in regime permanente che subisce una deviazione di $\alpha = 8.95^\circ$: mappe a curve di livello calcolate a) per l'altezza idrica (in m) e b) per il modulo della velocità (in m/s). In tratteggio il fronte d'onda analitico.

3.2 Confronto con casi di laboratorio

Per ottenere una prova aggiuntiva dell'affidabilità della tecnica numerica “alle acque basse” che accoppia al metodo SLIC una procedura frazionata e semi-implicita di gestione dei termini forzanti di pendenza e resistenza, tale modello è stato utilizzato per simulare due distinti flussi bidimensionali rapidamente variati conseguenti a *dam-break*, sui quali sono state condotte campagne per l'acquisizione di dati sperimentali.

La comparazione tra le previsioni formulate dal codice ed i risultati delle indagini di laboratorio permette di valutare l'applicabilità del metodo a casi di pratico interesse in cui il campo di moto sia reso particolarmente complesso dalla presenza di ostacoli insormontabili, asperità topografiche, aree inizialmente asciutte, ecc. [33, 42, 66, 70].

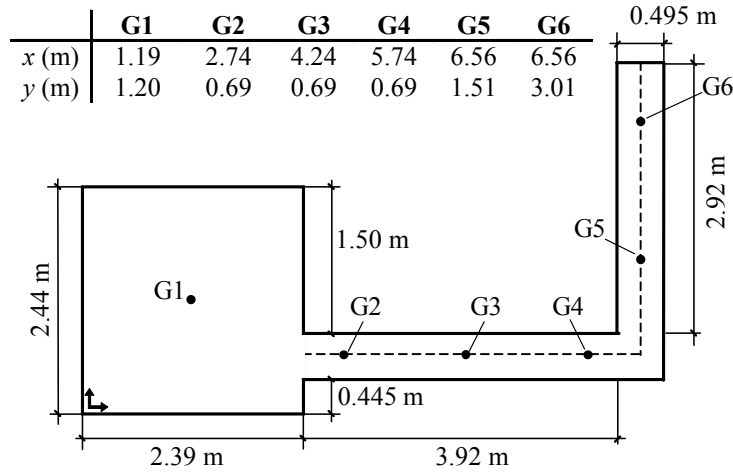


Figura 3.18: Apparato sperimentale e posizione dei trasduttori per il Test CADAM con brusca deviazione a 90° .

3.2.1 Test CADAM relativo a brusco cambiamento di direzione a 90°

Tale indagine sperimentale, promossa nell'ambito del progetto europeo CADAM (*Concerted Action on Dam-break Modelling*) [72], è stata svolta presso il Dipartimento di Ingegneria Civile dell'Università Cattolica di Louvain (Belgio) [72–75] su un canale a sezione rettangolare di larghezza B pari a 0.495 m, lungo complessivamente 7.6 m (Fig. 3.18), avente fondo in acciaio (dal coefficiente di scabrezza di Manning $n_f = 0.0095 \text{ m s}^{-1/3}$) e pareti in vetro ($n_p = 0.0195 \text{ m s}^{-1/3}$) [73]. Tale canale, ottenuto dalla connessione a 90° di due tronchi di lunghezza diversa per realizzare una brusca variazione di direzione, risulta aperto nella sezione terminale e collegato a monte ad un serbatoio avente dimensioni di $2.44 \text{ m} \times 2.39 \text{ m}$ e fondo orizzontale collocato ad una quota inferiore di 0.33 m rispetto a quella del fondo del canale. Inizialmente il canale è asciutto ed il serbatoio occupato da una massa idrica in quiete di altezza pari a 0.53 m.

All'atto della pressoché istantanea rimozione della paratia interposta tra canale ed invaso a monte, un'onda di sommersione avanza rapidamente raggiungendo il gomito a 90° dopo circa 3 s. Mentre la riflessione contro la parete ortogonale all'asse del primo tronco origina un'onda di *shock* che risale verso il serbatoio, raggiungendolo dopo poco più di 15 s dall'inizio del fenomeno, la massa d'acqua che prosegue nel tratto a valle subisce molteplici riflessioni sulle pareti solide, evidenziando nette strutture bidimensionali dette *cross-waves* [7].

In corrispondenza di sei stazioni di misura G_i ($i = 1, \dots, 6$), cinque delle quali distribuite lungo l'asse del canale ed una (G_1) posizionata nel serbatoio (Fig. 3.18), è stata rilevata sperimentalmente l'evoluzione temporale dei livelli idrici.

La simulazione numerica [10] è stata condotta suddividendo il campo di moto in elementi quadrati di lato pari a 1.5 cm ed attribuendo al fondo un indice di scabrezza di Manning \bar{n} funzione della profondità idrica h secondo l'espressione:

$$\bar{n} = \left(\frac{2h n_p^{3/2} + B n_f^{3/2}}{B} \right)^{2/3}, \quad (3.5)$$

che si ricava dalla formula di *Einstein* [48, 73] sopprimendo il contributo proveniente dalla porzione sommersa delle pareti al calcolo del perimetro bagnato che compare al denominatore. Poiché le pareti laterali sono state modellate come contorni solidi riflettenti che non introducono effetti resistivi sul moto, questo espediente consente di computare in maniera semplificata la crescente influenza esercitata dalle pareti del canale all'aumentare di h . Inoltre non è stato introdotto alcun effetto concentrato di perdita energetica in corrispondenza del brusco cambiamento di direzione. Ugualmente non è stato simulato il gradino di 0.33 m che congiunge il fondo del canale al fondo del serbatoio, con l'evidente conseguenza che le celerità di propagazione delle perturbazioni nell'invaso siano da intendersi nettamente sottostimate, determinando un'imprecisa ricostruzione dei fenomeni che si verificano al suo interno durante il processo di svuotamento. Una condizione di tipo trasmissivo è stata infine imposta sulla sezione finale di valle al termine di un prolungamento fittizio del canale a forte pendenza, finalizzato ad indurre lo stabilirsi dello stato critico sul cambiamento di pendenza: questa modifica nella ricostruzione della conformazione geometrica dell'installazione di laboratorio è decisiva per imitare una caduta libera all'estremità di valle e per poter applicare correttamente una condizione al bordo di tipo *far-field* compatibile con il carattere cinematico della corrente in uscita (veloce) [7].

In Fig. 3.19 sono rappresentati, a titolo di esempio, alcuni risultati ottenuti dal calcolo trascorsi 7 s dalla rimozione del sistema di ritenuta [74].

Infine in Fig. 3.20 gli idrogrammi calcolati vengono accostati a quelli osservati per ognuno dei punti di indagine. Il confronto è soddisfacente anche per le stazioni collocate in prossimità del gomito. Infatti:

- gli andamenti relativi alla stazione $G1$ sono sostanzialmente sovrapposti nonostante non sia stata fedelmente riprodotta la transizione altimetrica tra fondo del serbatoio e fondo del canale;
- l'arrivo dei fronti di bagnamento è ottimamente colto in ogni punto di misura, così come è ben simulata l'onda di *shock* che risale verso il serbatoio; tuttavia un leggero ritardo nella collocazione temporale dello *shock* stesso è presente per la stazione $G4$;
- nella posizione $G2$ sono riscontrabili una sottostima delle altezze idriche nel periodo iniziale del fenomeno ed una sovrastima del ramo di discesa precedente lo *shock* rilevato correttamente per $t = 15$ s;
- nella stazione $G5$, ove si risente in maniera considerevole del disturbo arrecato dalla curva, è palese il non perfetto accordo tra altezze d'acqua calcolate e misurate nella fase terminale dell'esperienza;
- la sovrapposizione eccellente tra risultati numerici e dati sperimentali relativi alla stazione $G6$ rassicura circa la schematizzazione numerica della frontiera di valle.

D'altra parte il modello non è in grado di restituire il sistema complesso di oscillazioni secondarie che gli idrogrammi sperimentali mettono in risalto.

3.2.2 Test IMPACT relativo ad ostacolo isolato

Questo caso è stato proposto nell'ambito del progetto di ricerca europeo IMPACT (*Investigation of extreme flood Processes And unCertainTy*) con il duplice intento di fornire dati sperimentali

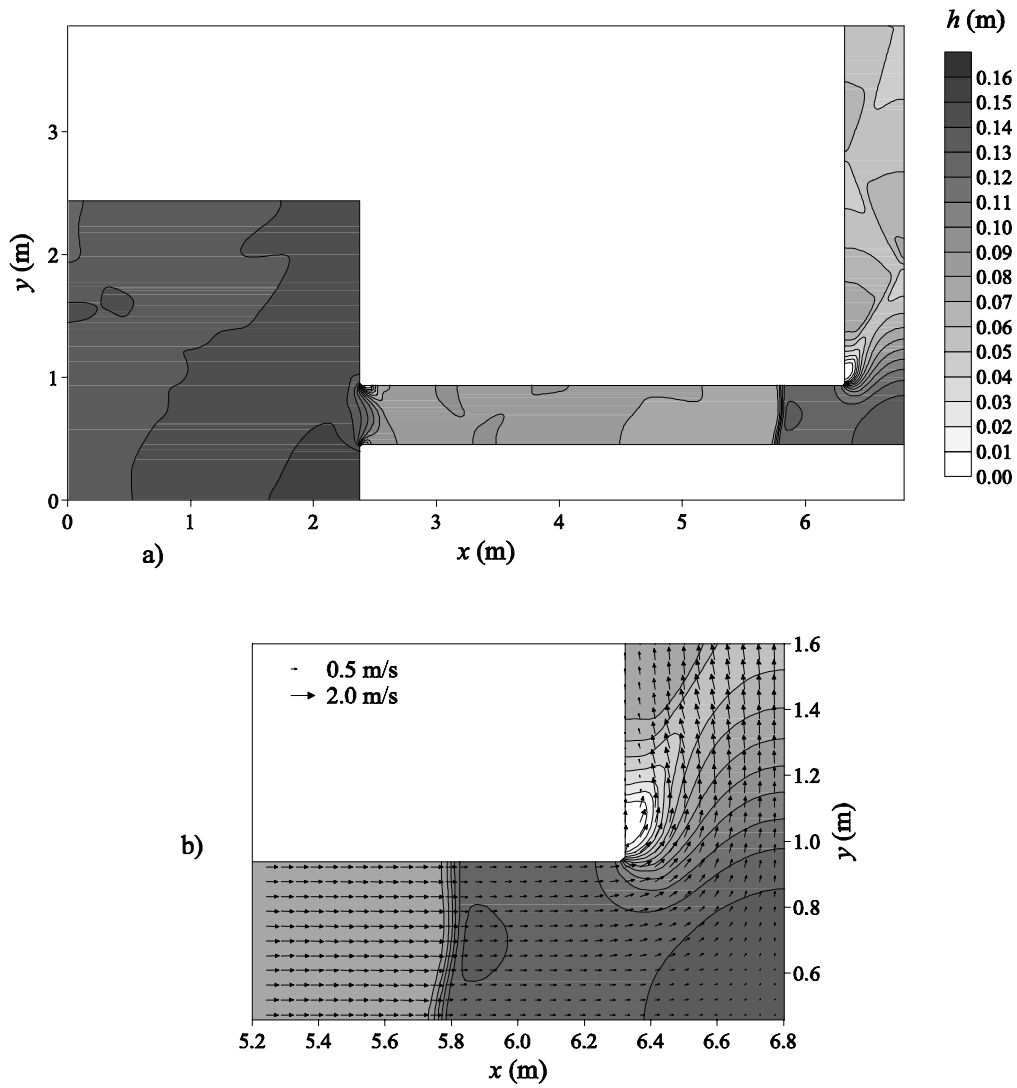


Figura 3.19: Risultati numerici per $t = 7.0$ s relativi al Test CADAM con brusca deviazione a 90° : a) mappa a curve di livello per l'altezza idrica (in m), b) dettaglio del campo di velocità in corrispondenza del gomito.

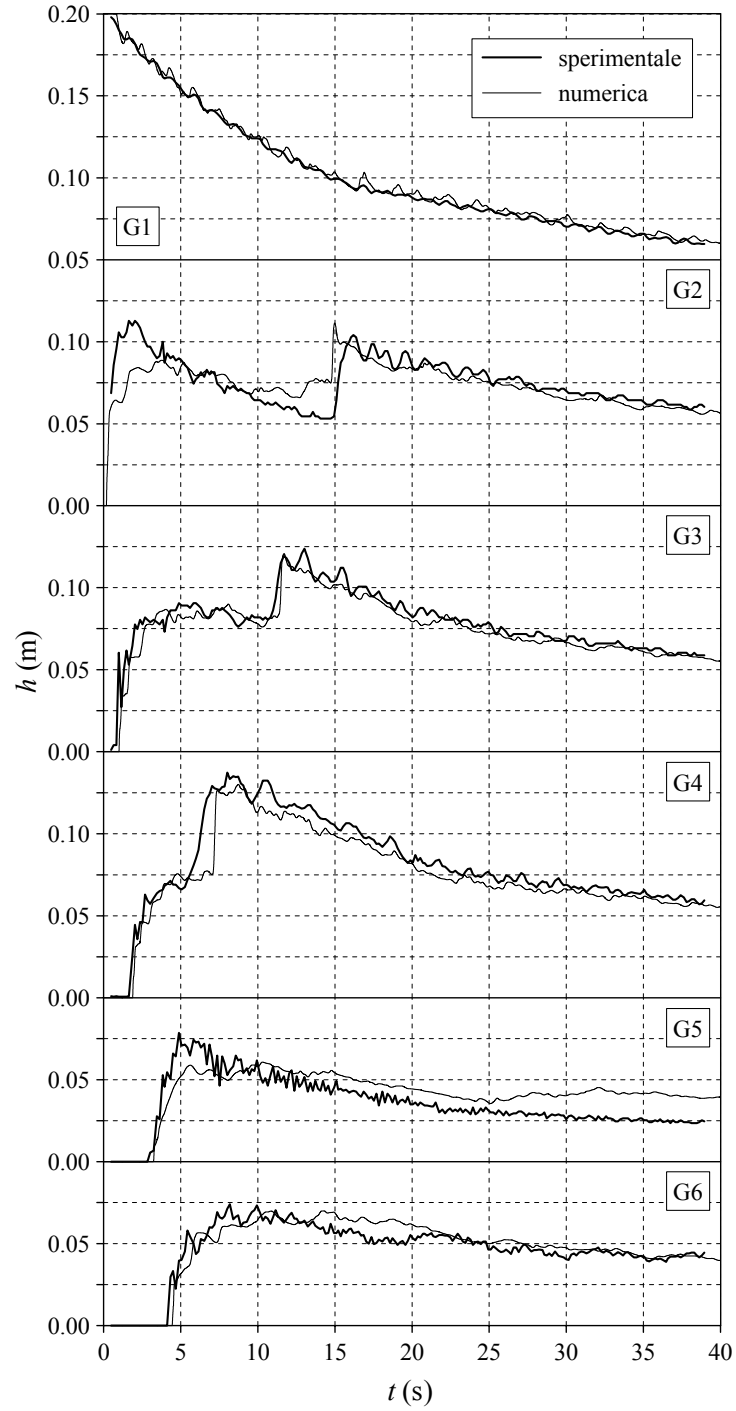


Figura 3.20: *Test CADAM relativo a brusca deviazione a 90°: confronto tra idrogrammi sperimentali ed idrogrammi numerici.*

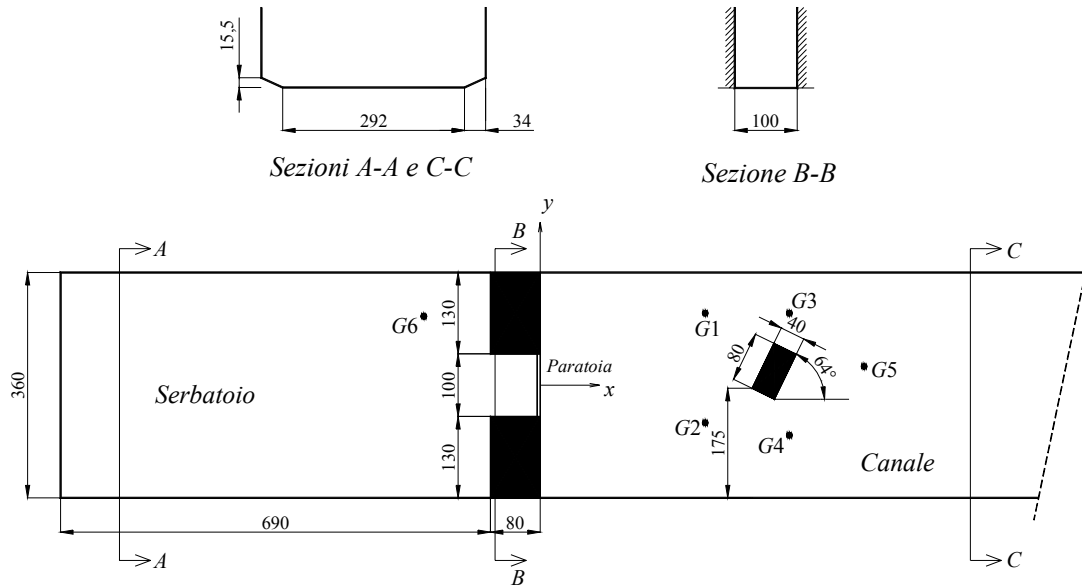


Figura 3.21: Apparato sperimentale per il Test IMPACT relativo ad ostacolo isolato (dimensioni in cm).

Vertice	x (m)	y (m)
B1	3.40	-0.05
B2	3.76	-0.23
B3	4.11	0.49
B4	3.75	0.67

Tabella 3.3: Coordinate dei quattro vertici dell'ostacolo per il Test IMPACT.

utili a testare i codici di calcolo sviluppati dagli enti partecipanti al gruppo di lavoro e di indagare l'effetto esercitato da un ostacolo isolato su un'onda di *dam-break*. L'indagine di laboratorio è stata effettuata presso il Dipartimento di Ingegneria Civile dell'Università Cattolica di Louvain [76] in un canale disposto orizzontalmente di 3.60 m di larghezza, lungo 35.80 m, del quale una parte di estremità lunga 6.90 m è stata destinata a serbatoio (Fig. 3.21). Alla distanza di 3.40 m rispetto al paramento di valle dello sbarramento, frontalmente rispetto alla paratia (larga 1.00 m), è stato collocato, a formare un angolo di 64° con l'asse del canale, un ostacolo insormontabile di forma parallelepipedica a base rettangolare $0.80 \text{ m} \times 0.40 \text{ m}$, i cui vertici hanno le coordinate riportate in Tab. 3.3 nel sistema di riferimento evidenziato in Fig. 3.21. Dati sperimentali sono stati acquisiti per una durata complessiva di 30 s in sei stazioni di misura, cinque delle quali (G_i , $i = 1, \dots, 5$) concentrate nei pressi dell'ostacolo: le relative coordinate sono raccolte in Tab. 3.4.

La configurazione iniziale prevede un livello idrico di 40 cm all'interno del serbatoio ed un velo d'acqua di spessore pari ad 1 cm a valle. In seguito alla repentina rimozione del sistema di ritenuta (per $t = 0 \text{ s}$), un'onda a fronte ripido si espande rapidamente verso valle raggiungendo l'ostacolo

Punto	x (m)	y (m)
$G1$	2.65	1.15
$G2$	2.65	-0.60
$G3$	4.00	1.15
$G4$	4.00	-0.80
$G5$	5.20	0.30
$G6$	-1.87	1.10

Tabella 3.4: *Coordinate dei punti di misura dell'altezza idrica per il Test IMPACT.*

dopo circa 2 s; la dinamica del fenomeno ne risulta pesantemente condizionata, sia localmente che in una zona di una certa estensione a valle: un risalto idraulico si stabilisce a monte dell'ostacolo ed immediatamente a valle si genera una scia di ricircolo esaurita la quale il flusso tende a diventare monodimensionale (Fig. 3.22).

La modellazione numerica di questo severo test è stata compiuta adottando lo schema bidimensionale “alle acque basse” basato sul metodo SLIC a due distinte *mesh*, entrambe di tipo strutturato: la prima, cartesiana, è costituita da 716×72 elementi quadrati identici di lato $\Delta x = \Delta y = 0.05$ m; la seconda, non cartesiana, un dettaglio della quale nella zona dell'ostacolo è riprodotto in Fig. 3.23, è organizzata in modo da adattare 73944 celle quadrangolari alla geometria del problema [9]. Sono state imposte condizioni al contorno riflettenti *free-slip* in corrispondenza delle pareti solide, trascurando di fatto gli effetti resistivi introdotti dalle pareti laterali del canale e dall'ostacolo; sulla sezione estrema di valle (distante circa 29 m dallo sbarramento) è stata applicata sia una condizione al bordo di tipo riflettente che trasmissivo per avere prova della sua ininfluenza sulla struttura del flusso in vicinanza dell'ostacolo nel corso dei 30 s di osservazione [76]. Inoltre è stato suggerito [76] di assegnare al fondo del canale un indice di scabrezza di *Manning* pari a $0.01 \text{ m s}^{-1/3}$.

In Fig. 3.24 si presenta il confronto tra idrogrammi numerici e sperimentali per l'altezza idrica nei sei punti di misura:

- alla stazione $G1$ l'andamento della profondità idrica è ben simulato dallo schema che opera su reticolo non cartesiano, se si fa eccezione per due brevi periodi a cavallo degli istanti $t = 5.0$ s e $t = 22.5$ s in cui sembra risentirsi della difficoltà di localizzazione spaziale delle strutture indotte sul campo di moto dall'ostacolo e dalle pareti laterali;
- questo problema è ancor più evidente nella stazione $G2$ dove il *trend* sembra essere ben riprodotto fino all'istante $t = 12.5$ s (benché appaia leggermente sovrastimata l'altezza dell'onda di *shock* originata dal *dam-break*); successivamente, il fatto che solo il codice applicato alla griglia cartesiana riesca a cogliere, seppur differito nel tempo, il passaggio del punto $G2$ alla zona in cui vige una condizione di corrente subcritica (Fig. 3.22), segnala un'imprecisa modellazione dell'evoluzione temporale e della conformazione spaziale (in realtà fortemente influenzata dalla scabrezza) del risalto idraulico a monte dell'ostacolo;
- nella stazione $G3$ sia l'altezza dell'onda conseguente al rapido rilascio che le altezze idriche nei 5 s successivi al suo arrivo risultano lievemente sovrastimate; inoltre solo il processo di calcolo su *mesh* cartesiana sembra interpretare la tendenza dei livelli alla crescita a partire dall'istante $t = 25.0$ s;

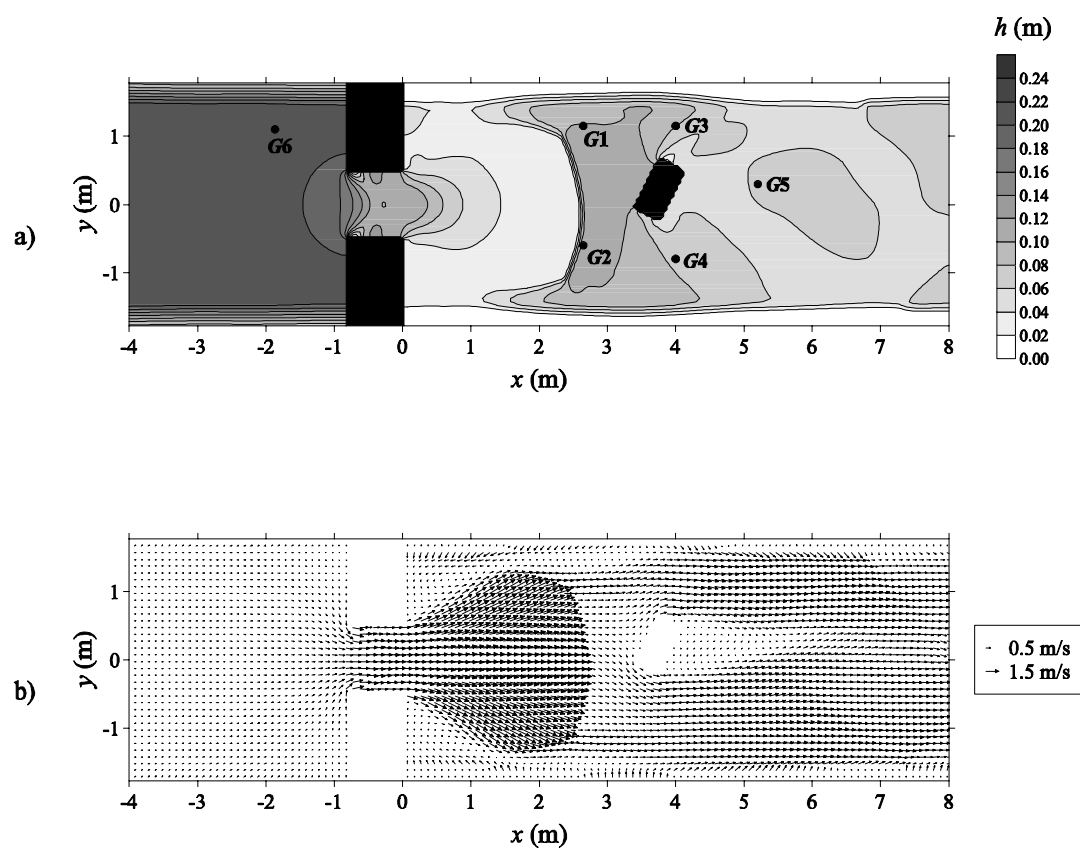


Figura 3.22: Test IMPACT relativo ad ostacolo isolato: dettaglio a) della mappa delle altezze idriche (in m), b) del campo di velocità, all'istante $t = 20.0$ s.

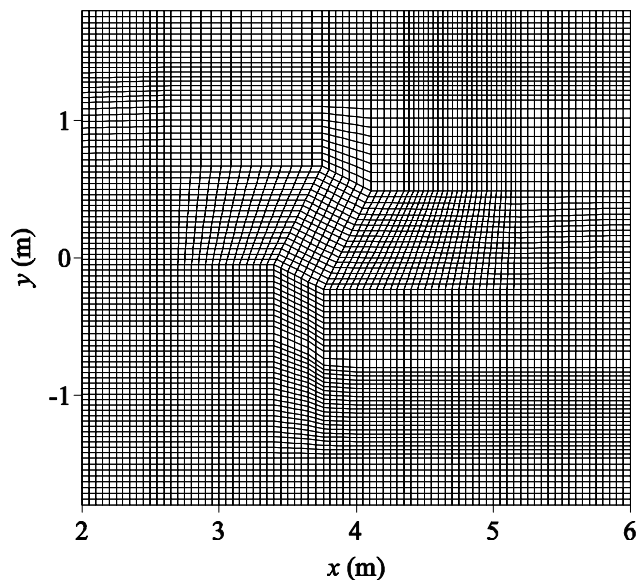


Figura 3.23: Dettaglio della griglia strutturata non cartesiana adottata nei pressi dell'ostacolo.

- per la stazione $G4$, nella fase iniziale dell'acquisizione ($3\text{ s} < t < 5\text{ s}$), la responsabilità della netta discordanza tra dati sperimentali e predizioni formulate dai codici di calcolo impiegati è da attribuire nuovamente all'incapacità di questi ultimi a posizionare correttamente le complesse strutture del moto; a seguire gli idrogrammi numerici sono in accettabile accordo con quello misurato, anche in corrispondenza della debole risalita che si verifica per $t = 14.0\text{ s}$;
- la stazione $G5$, collocata ai limiti estremi della scia provocata dall'ostacolo nella zona dove si assiste al ricongiungimento delle due correnti supercritiche che lo aggirano (Fig. 3.22), offre dati empirici molto oscillanti che il calcolo non riproduce in maniera soddisfacente;
- nella stazione $G6$, situata all'interno del serbatoio, i risultati computazionali interpretano ottimamente i dati di laboratorio; tuttavia la pendenza trasversale sui bordi laterali del canale introduce un disturbo di carattere numerico che turba la persistenza dello stato di quiete precedentemente all'arrivo della testa dell'onda di rarefazione.

Se il flusso indagato si rivela particolarmente instabile in prossimità dell'ostacolo, mostrando oscillazioni secondarie ad alta frequenza (Fig. 3.24) probabilmente ascrivibili all'interferenza di molteplici riflessioni sulle pareti del canale, i risultati del calcolo, per contro, appaiono *smooth*. Inoltre il sistematico ritardo con cui viene simulato nelle stazioni G_i ($i = 1, \dots, 5$) l'arrivo del fronte iniziale, unitamente al ritardo con cui l'onda di depressione numerica si risente nel punto di misura $G6$, induce ad avanzare l'ipotesi che sussista uno *shift*, quantificabile in 0.5 s circa, tra le origini temporali sperimentale e numerica.

In Fig. 3.25 si pongono a confronto le distribuzioni di velocità misurate e calcolate per gli istanti $t = 1.0\text{ s}$, $t = 5.0\text{ s}$ e $t = 10.0\text{ s}$: nonostante le misurazioni siano abbastanza disperse, si può osservare come i risultati numerici ricostruiscano con buona accuratezza sia qualitativamente che quantitativamente le caratteristiche principali del moto.

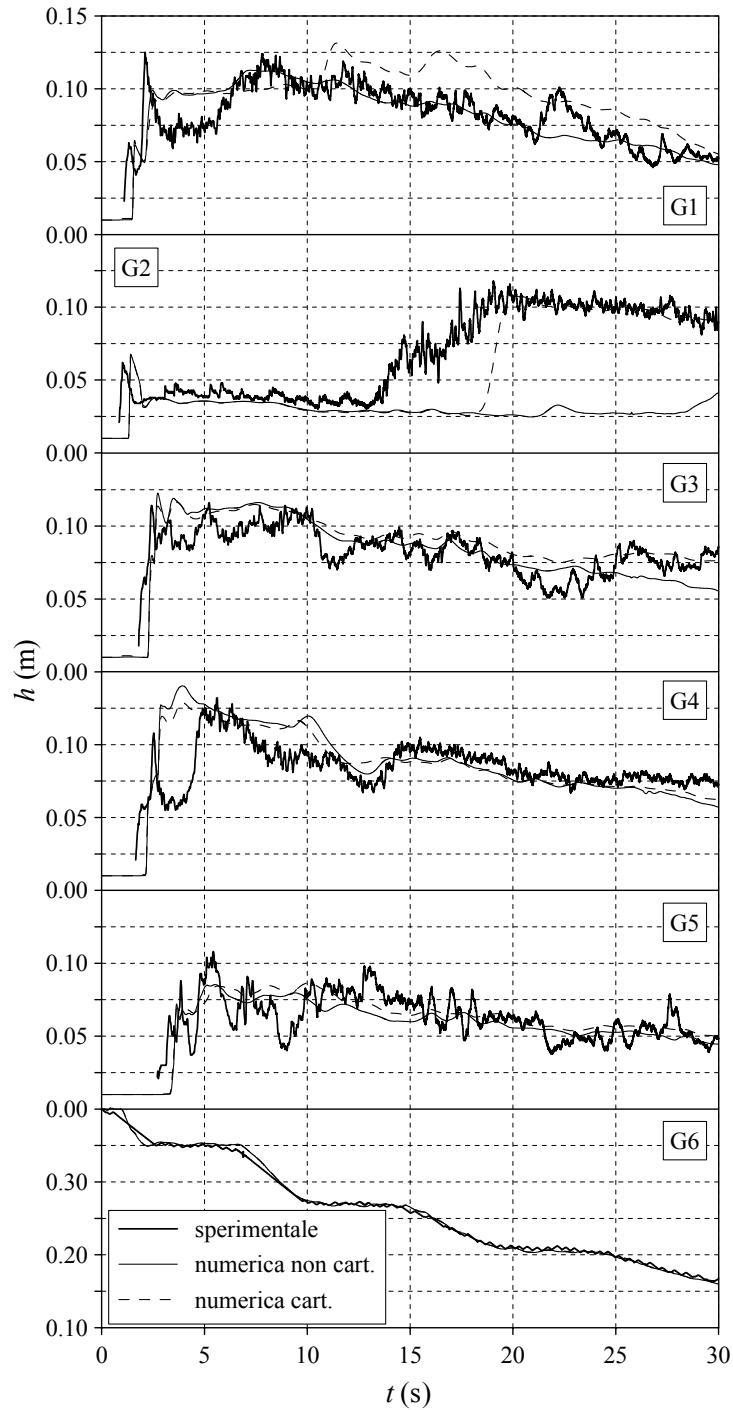


Figura 3.24: Test IMPACT relativo ad ostacolo isolato: confronto tra idrogrammi sperimentali e numerici ottenuti sia su reticolo strutturato non cartesiano che su griglia cartesiana.

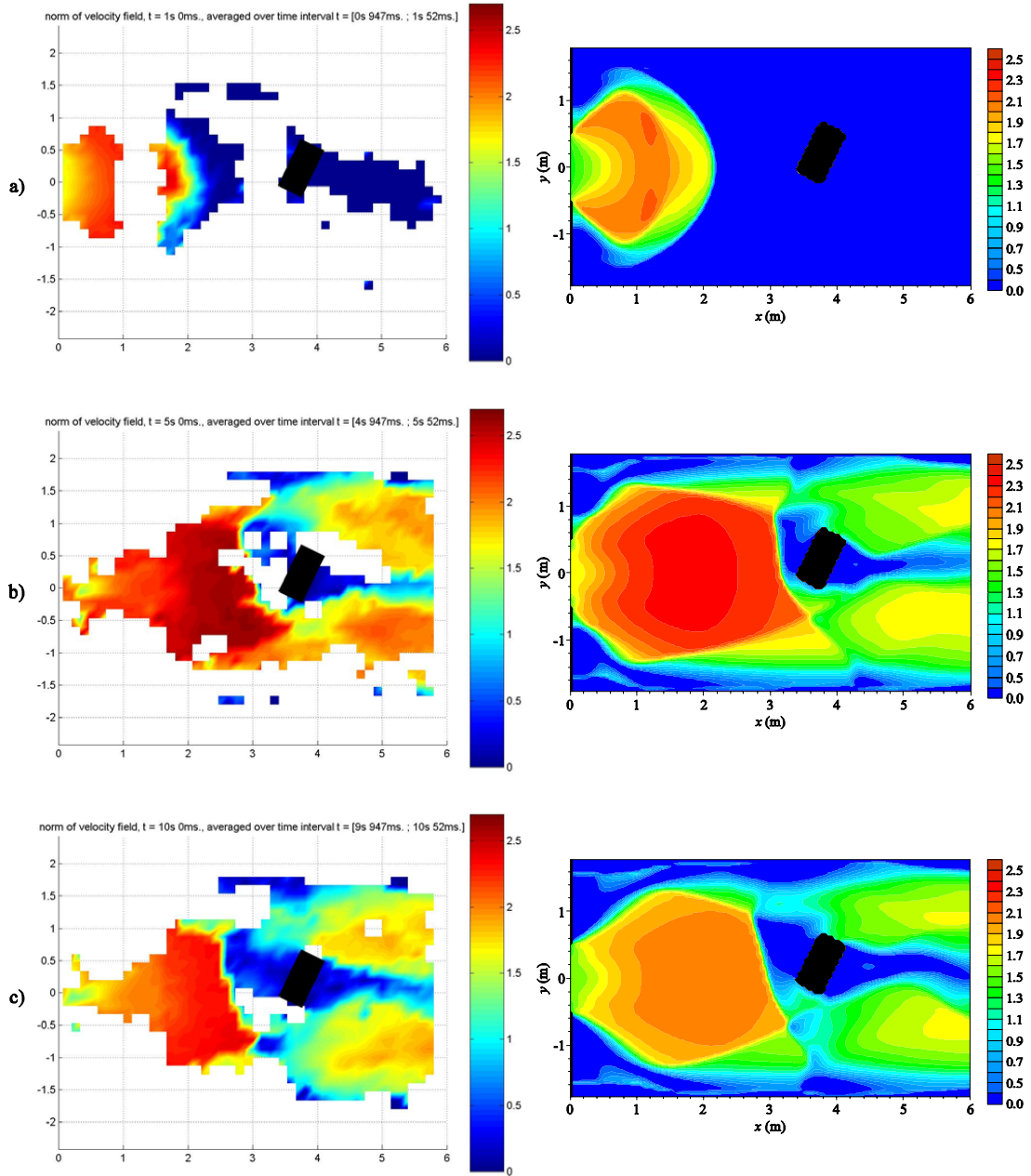


Figura 3.25: Mappe del modulo della velocità (in m/s) per il Test IMPACT agli istanti: a) $t = 1.0$ s, b) $t = 5.0$ s, c) $t = 10.0$ s; confronto tra dati sperimentali (a sinistra) e risultati numerici (a destra) ottenuti mediante codice numerico applicato a griglia cartesiana.

Capitolo 4

Le esperienze di laboratorio

In quest'ultimo capitolo si descrivono le fasi e si discutono i risultati di un'indagine di laboratorio finalizzata ad investigare il moto a superficie libera, bidimensionale e rapidamente vario, conseguente alla rapida rimozione di un sistema di ritenuta ed eventualmente condizionato dalla presenza di un ostacolo (sormontabile o insormontabile).

Informazioni quantitative sulla distribuzione della profondità idrica nell'area di interesse sono state dedotte mediante tecnica colorimetrica [33, 164] applicata ad immagini acquisite con fotocamera digitale. A conoscenza dello scrivente, questa tecnica è stata adottata per la prima volta da Braschi *et al.* [33] e, a differenza delle metodologie classiche che restituiscono misurazioni su un numero limitato di punti sperimentali, si presta bene a ricostruire globalmente il fenomeno indagato sull'intero campo di moto.

Tale sperimentazione ha permesso di fornire test, da aggiungere ai molteplici reperibili in letteratura, [7, 11, 12, 17, 21, 34, 70–73, 76, 95, 189] utili per verificare la capacità dei codici numerici a simulare rapidi transitori bidimensionali in applicazioni realistiche ed in presenza di batimetrie irregolari.

Largo spazio viene dedicato, infine, alla presentazione dei confronti tra i risultati delle prove sperimentali e le previsioni formulate da due dei codici numerici ai volumi finiti descritti nel Cap. 2.

4.1 L'apparato sperimentale

L'apparato sperimentale (Fig. 4.1), realizzato presso il laboratorio di Idraulica dell'Università degli Studi di Parma, è costituito da una vasca rettangolare in Plexiglas trasparente, a fondo piano e orizzontale, suddivisa in due parti da due setti: la prima, di dimensioni più limitate, svolge la funzione di serbatoio, la seconda, più estesa, è destinata ad essere interessata dall'onda generata dalla rapida rimozione di un sistema di ritenuta (Figg. 4.2 e 4.3).

Tale dispositivo consta di una paratoia in alluminio, di 3 mm di spessore, avente forma trapezia per migliorare le prestazioni di tenuta ed agevolare il sollevamento. Essa è alloggiata in due fenditure ricavate nei setti divisorii ed è movimentata da un pistone pneumatico, ad azionamento controllato manualmente con valvola a leva, il quale realizza una corsa complessiva di 20 cm in un intervallo di tempo stimato in soli 8 centesimi di secondo da ripresa video a 50 frames/s.

Per riprodurre schematicamente l'effetto indotto sui fenomeni di allagamento dalle complessità geometriche delle topografie reali, un test è stato condotto posizionando asimmetricamente nel-

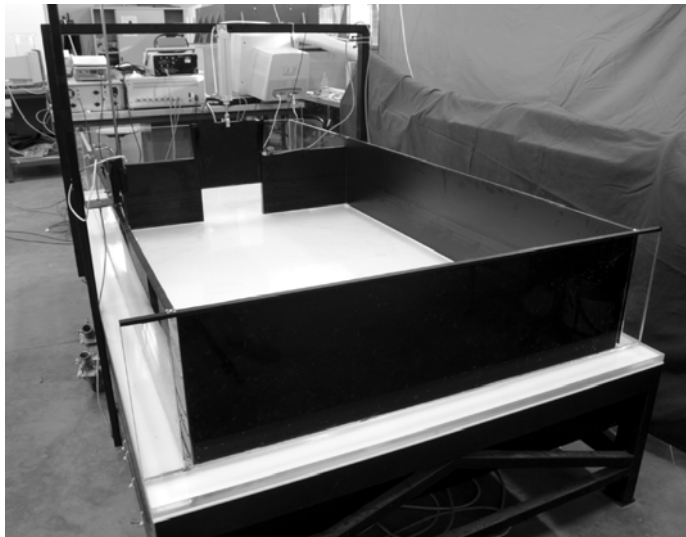


Figura 4.1: *Immagine fotografica dell'apparato sperimentale.*

la zona inondabile un ostacolo (Figg. 4.2 e 4.4), sempre in Plexiglas trasparente, di dimensioni (Figg. 4.5 - 4.6) tali da consentirne il sormonto da parte dell'onda di sommersione ed allo stesso tempo tali da influenzare significativamente lo sviluppo del fenomeno; un secondo test ha permesso di indagare gli effetti di un ostacolo ligneo insormontabile (Figg. 4.3 e 4.7), di forma parallelepipedica e dimensioni planimetriche $30\text{ cm} \times 15\text{ cm}$, in grado di causare un sensibile disturbo al campo di moto.

L'area di interesse a valle della zona d'invaso è stata illuminata dal basso (Figg. 4.2 e 4.3) con lampade fluorescenti in grado di emettere una luce fredda dalla temperatura di colore pari a 6500 K e di garantire una distribuzione abbastanza uniforme dell'intensità luminosa; per incrementare l'uniformità di illuminazione, una sottile lastra opalina in Plexiglas è stata interposta tra l'impianto illuminante e la lastra di fondo della vasca.

Informazioni colorimetriche [8, 22, 33, 164] sono state ottenute disperdendo nella massa idrica una fissata quantità di colorante (*blu di metilene*). Una ripresa fotografica dei fenomeni oggetto di indagine, limitatamente alla zona retroilluminata, è stata eseguita mediante fotocamera reflex digitale (Canon EOS 10D), ad ottica zoom, con sensore CMOS ad alta sensibilità di dimensioni $22.7\text{ mm} \times 15.1\text{ mm}$. La risoluzione ottenuta in formato RAW a 12 bit per *pixel* risulta pari a $3072 \times 2048\text{ pixel}$. La frequenza di acquisizione in modalità di scatto continuo è di 3 Hz per un massimo di 9 fotogrammi; a seguire, il riempimento del *buffer* consente lo scatto ogni 1.8 s circa. La stessa fotocamera, controllata da calcolatore a mezzo di interfaccia USB e *software* di scatto remoto, è stata posizionata ad un'altezza pari a 2.87 m circa rispetto al fondo della vasca su un supporto regolabile finemente per conseguire approssimativamente la verticalità dell'asse ottico ed il suo allineamento con il centro della zona allagabile.

Per associare un'informazione temporale alle fotografie acquisite dalle prove sperimentali, è stato inserito nel campo ripreso un cronometro digitale a *led* rossi con scansione al centesimo di secondo, sincronizzato al sollevamento della paratia tramite un segnale elettrico di *trigger* generato dal cambiamento di stato di un interruttore.

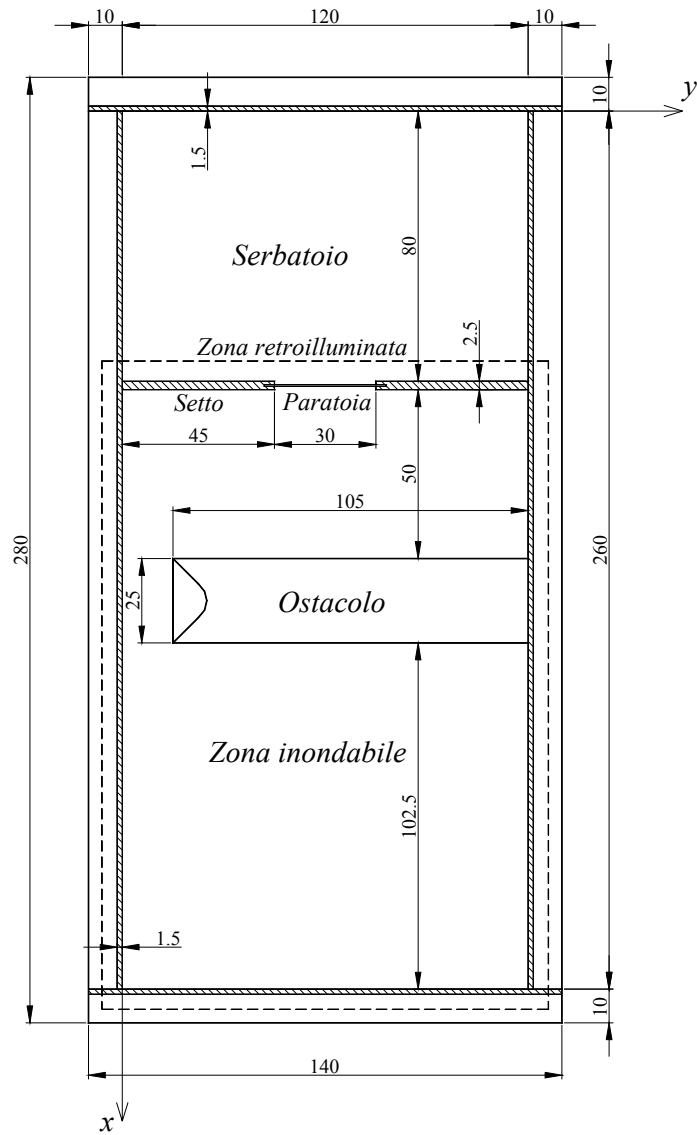


Figura 4.2: Rappresentazione planimetrica dell'apparato sperimentale (dimensioni in cm) per il Test 3.

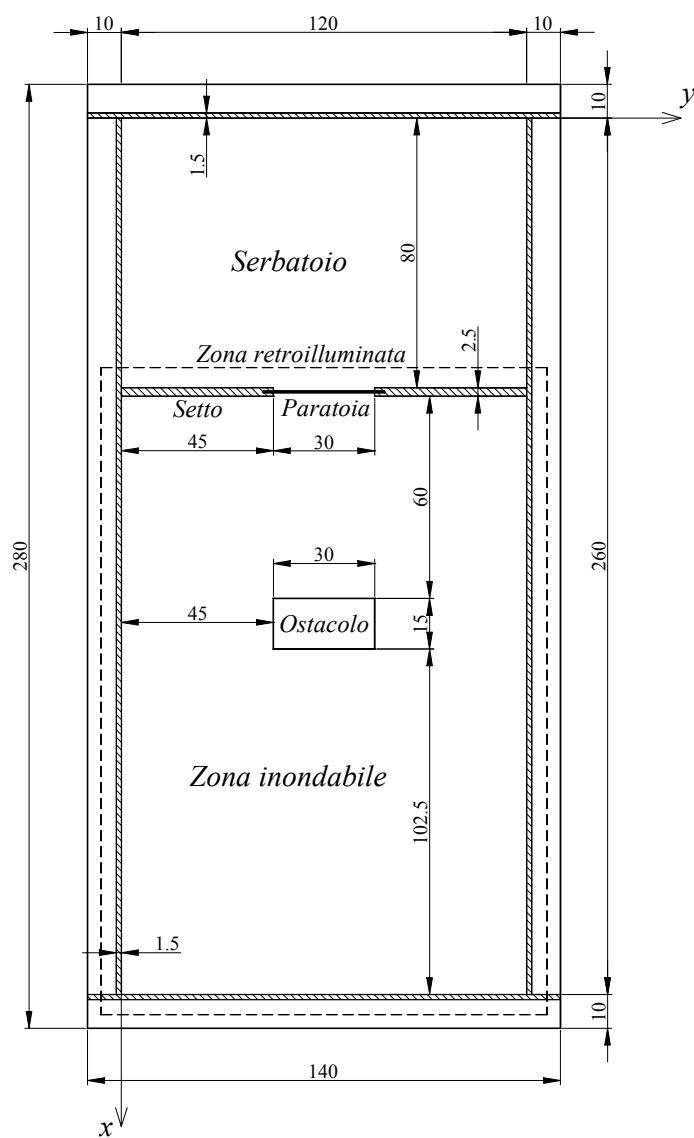


Figura 4.3: Rappresentazione planimetrica dell'apparato sperimentale (dimensioni in cm) per il Test 4.

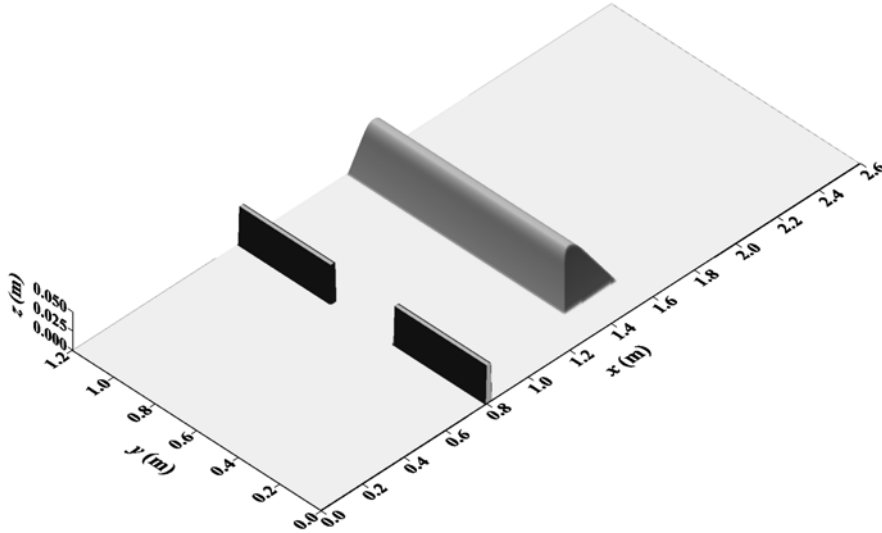


Figura 4.4: Posizionamento dell'ostacolo sormontabile.

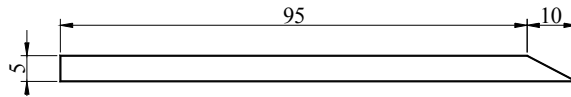


Figura 4.5: Sezione longitudinale media dell'ostacolo sormontabile (dimensioni in cm).

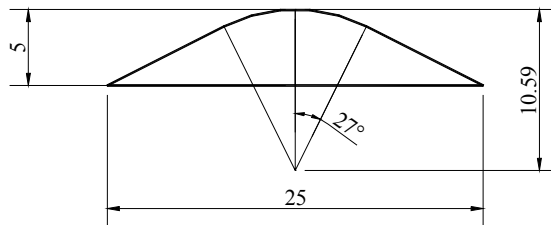
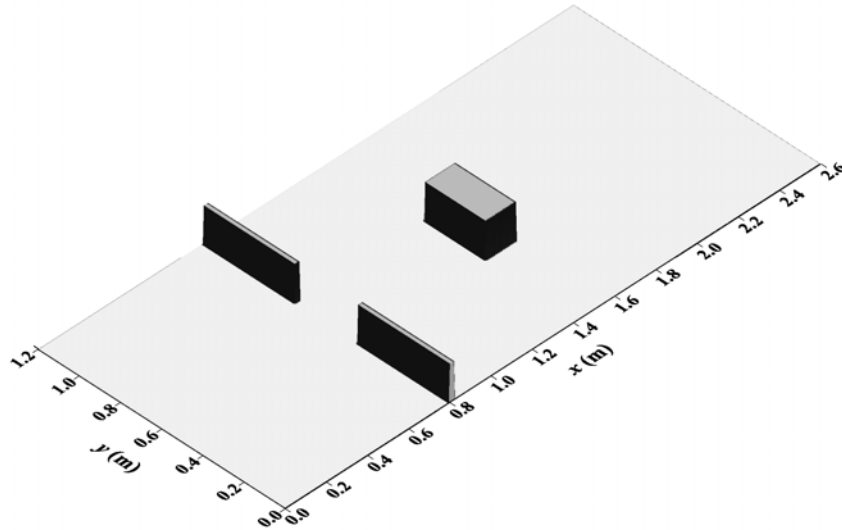


Figura 4.6: Sezione trasversale dell'ostacolo sormontabile (dimensioni in cm).

Figura 4.7: *Posizionamento dell'ostacolo insormontabile.*

Test	Livello idrico iniziale nel serbatoio (m)	Livello idrico iniziale a valle (m)	Ostacolo
1	0.15	0.00	Assente
2	0.15	0.01	Assente
3	0.15	0.00	Sormontabile
4	0.15	0.00	Insormontabile

Tabella 4.1: *Caratteristiche principali dei test sperimentali.*

L'indagine è stata completata da misure puntuali di livello idrico effettuate con trasduttore ultrasonico di tipo piezoelettrico (Banner Q45UR) collocato nei pressi della parete longitudinale ($x \simeq 1.647$ m, $y \simeq 0.022$ m), fuori dalla proiezione prospettica dell'area retroilluminata.

Nel seguito si riportano i risultati delle prove di laboratorio eseguite, le cui caratteristiche sono riassunte in Tab. 4.1.

4.2 La tecnica di acquisizione

I campi di altezze idriche ad istanti noti, relativi alle prove documentate in Tab. 4.1, sono stati rilevati scattando fotografie della zona di indagine (Figg. 4.8 - 4.9), una volta dispersa nella massa idrica una certa quantità di colorante (*blu di metilene*) per ottenere una soluzione dall'intensità di colore crescente con la profondità. Le immagini RAW, acquisite in spazio colore *Adobe RGB*, sono state prima convertite in formato TIFF a 8 *bit* per *pixel*, evitando l'applicazione di algoritmi di

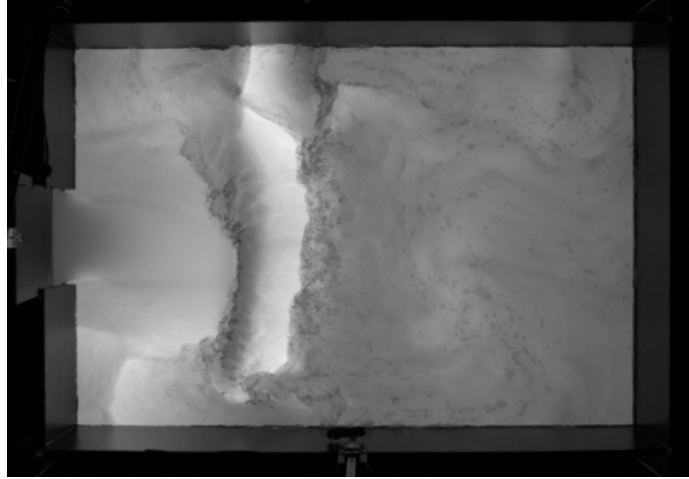
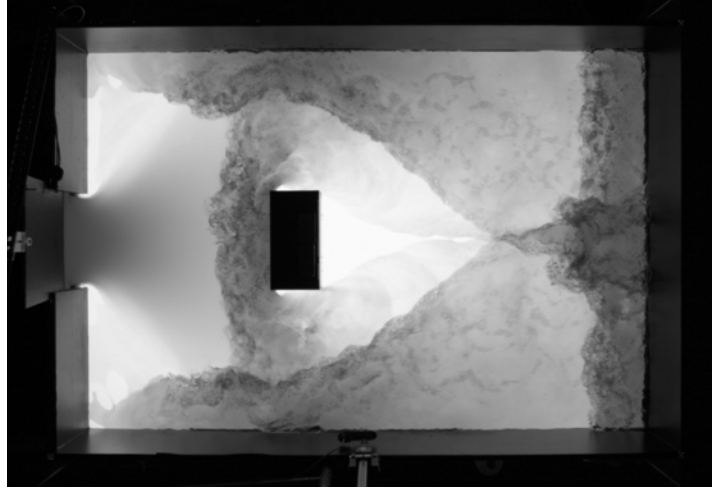


Figura 4.8: Fotografia relativa al Test 3 scattata all'istante $t = 4.77$ s.

compressione e di filtri di *sharpness*, e successivamente in scala di grigi (da 0 per nero puro a 255 per bianco puro).

E' stato così possibile stimare indirettamente la profondità idrica nell'area inondabile avendo preliminarmente ricavato per ogni *pixel*, da una procedura di calibrazione spaziale, la relazione tra tono di grigio e tirante. Tale procedimento è stato ripetuto per ogni prova scattando una serie di fotografie della zona retroilluminata sommersa da massa idrica colorata in quiete per altezze d'acqua progressivamente decrescenti da 15 a 1 cm (Fig. 4.10). In questa fase le altezze sono state misurate per mezzo del citato trasduttore ultrasonico in corrispondenza di un punto indice di coordinate $x \simeq 1.647$ m e $y \simeq 0.022$ m; la principale causa di errore è costituita dal fatto di aver trascurato lo stato deformativo della vasca, per di più dipendente dalla quantità d'acqua contenuta. Tutto ciò è stato messo in atto nel tentativo di ovviare agli effetti di disturbo locale indotti da una non perfetta uniformità di illuminazione, dal comportamento ottico dell'ostacolo sormontabile (se presente), dalla vignettatura introdotta dall'ottica dell'obiettivo e dalle svariate cause di non ripetibilità riscontrabili (luminosità ambiente, imprecisioni nella titolazione dell'acqua col tracciante e nel posizionamento della fotocamera, ecc.). Tre curve di trasferimento tipo appaiono in Fig. 4.11: si noti come la risoluzione della procedura di valutazione delle altezze d'acqua dai toni di grigio sia alta (errore medio di circa 0.2 mm) per piccole profondità (si registra infatti una variazione di 55-60 toni di grigio tra 0 e 1 cm), mentre decresca considerevolmente (errore medio pari a circa 3 mm) per profondità maggiori (approssimativamente 6 toni tra 13 e 15 cm). Ad un'incertezza relativa sulla stima delle altezze d'acqua del 2% circa, si sommano errori di ripetibilità che, causando differenze di uno, o al massimo due, toni di grigio in corrispondenza di uno stesso *pixel* in fotografie scattate a parità di condizioni, introducono incertezze relative pari al 2-4%.

Tale tecnica colorimetrica è del tutto non invasiva e si è dimostrata utile a restituire informazioni quantitative ad alta risoluzione spaziale sull'intera area di interesse [8, 33, 164] e vantaggiosa, rispetto a misurazioni puntuali localizzate in poche posizioni, al fine di cogliere le complesse strutture mobili originate da interferenze e riflessioni di onde. La concentrazione del tracciante (pari a 12.5 g/m^3 circa) e i valori dei parametri di esposizione (impostati come da Tab. 4.2) sono stati scelti in modo da poter disporre di un intervallo di toni di grigio il più ampio possibile; l'altezza

Figura 4.9: *Fotografia relativa al Test 4 scattata all'istante $t = 2.51$ s.*

Lunghezza focale c	24 mm
Apertura del diaframma	2.8f
Tempo di otturazione	0.01 s
Sensibilità del sensore	ISO 100
Temperatura di colore	5200 K
Spazio colore	Adobe RGB

Tabella 4.2: *Impostazioni dei parametri di scatto.*

dell'ostacolo parallelepipedo (uguale a 15 cm) è tale da impedire il sormonto da parte dell'onda di sommersione e da limitare al minimo l'estensione dell'attigua zona di ombra.

All'immagine riferita ad un sistema cartesiano ortogonale FC, ξ, η , solidale all'elemento sensibile (Fig. 4.12), calibrati mediante procedura automatica [65] i parametri di orientamento interno della fotocamera (Tab. 4.3), è stata poi applicata la trasformazione seguente per la modellazione non bilanciata delle distorsioni radiale e decentrata provocate dall'ottica [65]:

$$\xi_c = \xi + dr_\xi + dp_\xi, \quad \eta_c = \eta + dr_\eta + dp_\eta, \quad (4.1)$$

dove le componenti della correzione della distorsione radiale valgono:

$$dr_\xi = (\xi - \xi_0)(1 + dr), \quad dr_\eta = (\eta - \eta_0)(1 + dr), \quad (4.2)$$

con:

$$dr = k_1 r^2 + k_2 r^4, \quad r^2 = (\xi - \xi_0)^2 + (\eta - \eta_0)^2, \quad (4.3)$$

mentre quelle della distorsione decentrata valgono:

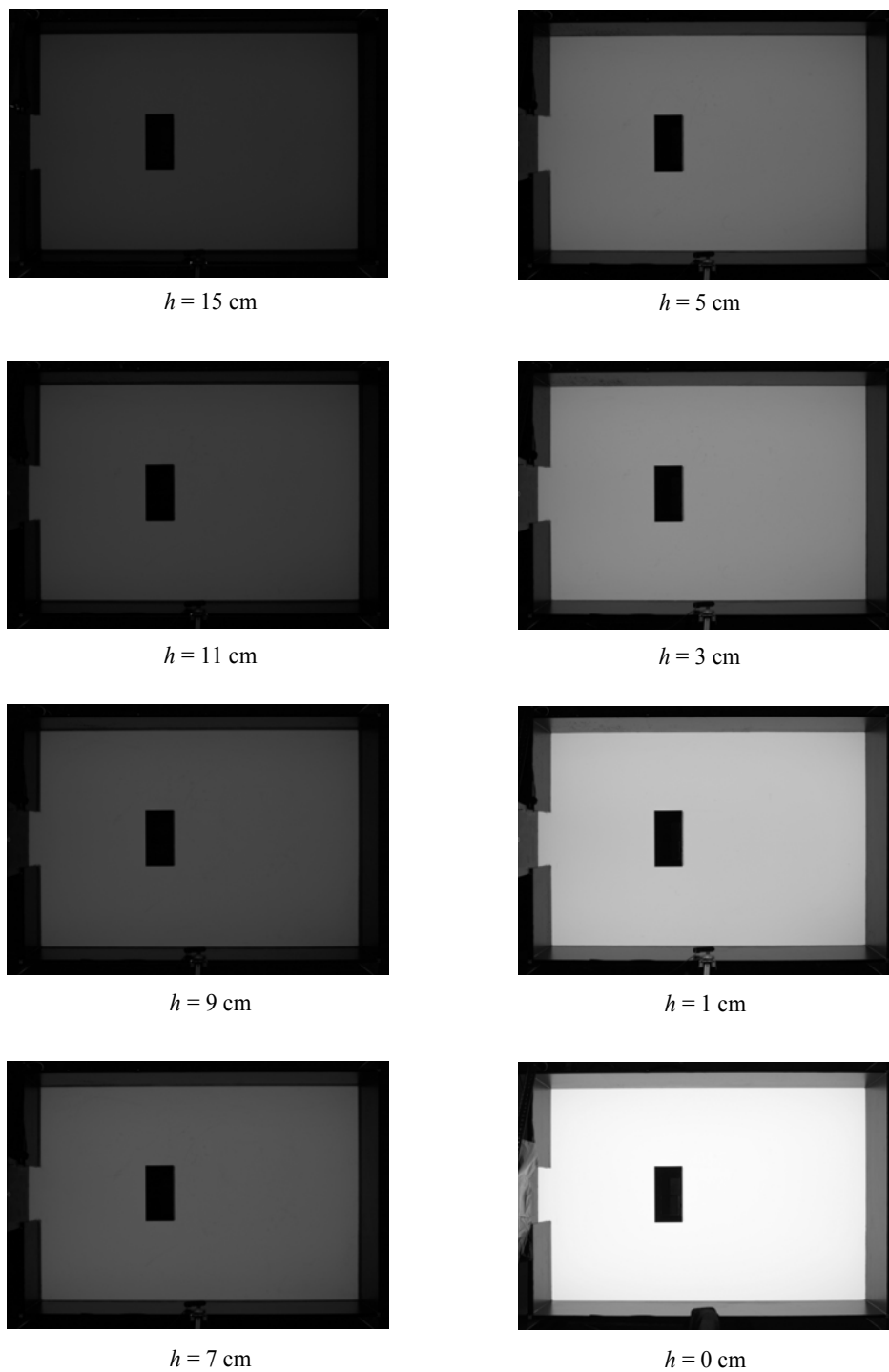


Figura 4.10: Immagini fotografiche utilizzate in fase di calibrazione spaziale durante il Test 4.

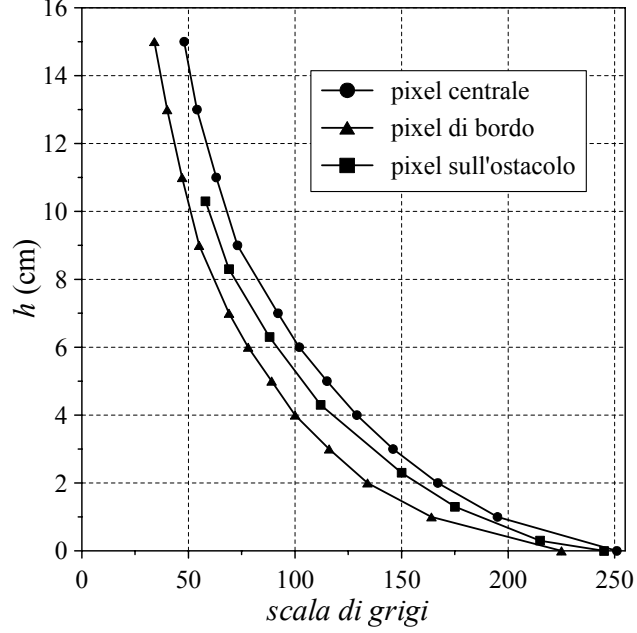


Figura 4.11: Esempi di funzioni di conversione tono di grigio-altezza d'acqua per pixel centrale, pixel di bordo e pixel posizionato sull'ostacolo sormontabile.

$$\begin{aligned} dp_\xi &= p_1 [r^2 + 2(\xi - \xi_0)]^2 + 2p_2 (\xi - \xi_0) (\eta - \eta_0), \\ dp_\eta &= p_2 [r^2 + 2(\eta - \eta_0)]^2 + 2p_1 (\xi - \xi_0) (\eta - \eta_0). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Per la ricostruzione della proiezione ortogonale del campo di altezze idriche sul piano xy solidale all'apparato sperimentale (Fig. 4.2) a partire da un'immagine fotografica, cioè da una proiezione prospettica, si è fatto ricorso, una volta stimati gli stessi tiranti z per ogni *pixel* ed i parametri di orientamento esterno della fotocamera (Tab. 4.4), alle *equazioni di collinearità* [107], che traducono analiticamente l'allineamento (Fig. 4.12) tra centro di presa $O(x_0, y_0, z_0)$, punto immagine $P'(\xi, \eta)$ e punto oggetto $P(x, y, z)$:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + (z - z_0) \frac{r_{11}(\xi - \xi_0) + r_{12}(\eta - \eta_0) - r_{13}c}{r_{31}(\xi - \xi_0) + r_{32}(\eta - \eta_0) - r_{33}c}, \\ y &= y_0 + (z - z_0) \frac{r_{21}(\xi - \xi_0) + r_{22}(\eta - \eta_0) - r_{23}c}{r_{31}(\xi - \xi_0) + r_{32}(\eta - \eta_0) - r_{33}c}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Nelle (4.5) i fattori r_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) indicano gli elementi della matrice di rotazione R del sistema a cui sono riferiti i punti immagine rispetto a quello dei punti oggetto (Figg. 4.12 e 4.13):

$$R = \begin{bmatrix} \cos \varphi \cos \kappa & -\cos \varphi \sin \kappa & \sin \varphi \\ \cos \omega \sin \kappa + \sin \omega \sin \varphi \cos \kappa & \cos \omega \cos \kappa - \sin \omega \sin \varphi \sin \kappa & -\sin \omega \cos \varphi \\ \sin \omega \sin \kappa - \cos \omega \sin \varphi \cos \kappa & \sin \omega \cos \kappa + \cos \omega \sin \varphi \sin \kappa & \cos \omega \cos \varphi \end{bmatrix}. \quad (4.6)$$

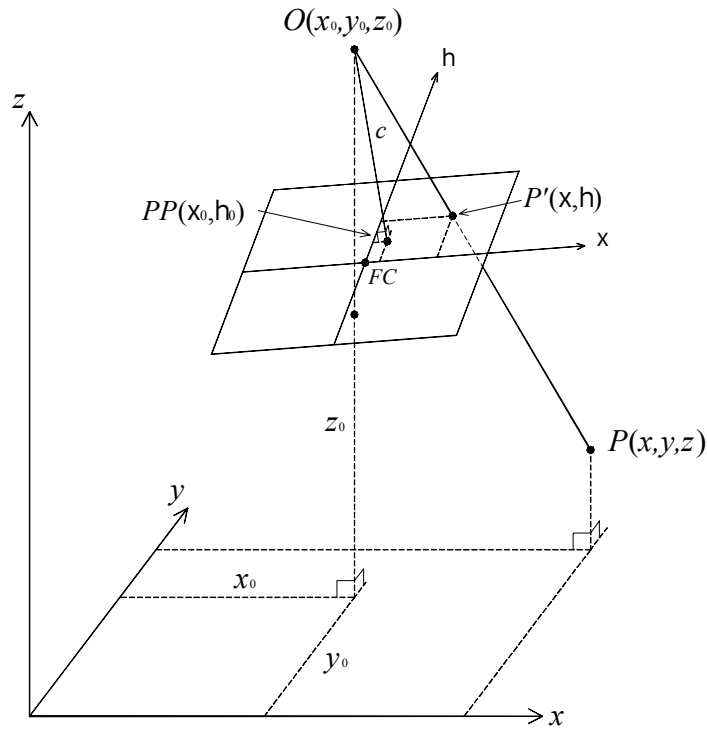


Figura 4.12: Relazione tra le coordinate dei punti immagine e dei punti oggetto [107].

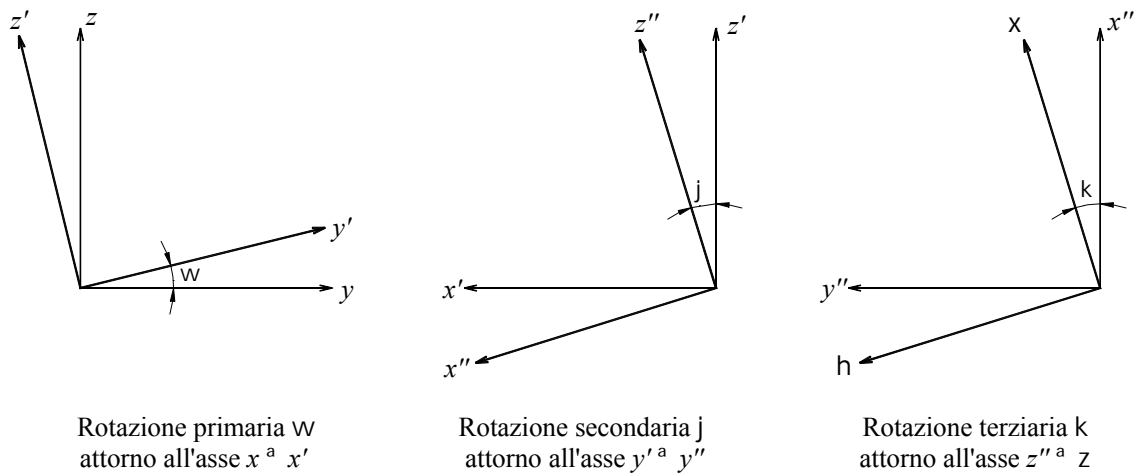


Figura 4.13: Sequenza delle tre rotazioni della terna xyz .

Lunghezza focale stimata c	24.434 mm	
Dimensioni stimate del sensore	$L = 22.6547$ mm	$H = 15.1000$ mm
Coordinate del punto principale PP	$\xi_0 = 11.2166$ mm	$\eta_0 = 7.5097$ mm
Parametri di distorsione radiale	$k_1 = 2.099 \cdot 10^{-4}$ mm ⁻²	$k_2 = -1.029 \cdot 10^{-6}$ mm ⁻⁴
Parametri di distorsione decentrata	$p_1 = 4.675 \cdot 10^{-5}$ mm ⁻¹	$p_2 = -1.600 \cdot 10^{-5}$ mm ⁻¹

Tabella 4.3: *Parametri di orientamento interno della fotocamera.*

Coordinate oggetto del centro di presa O	x_0, y_0, z_0
Angoli di rotazione del sistema “immagine” rispetto a quello “oggetto” (positivi se antiorari)	primario ω , secondario φ , terziario κ

Tabella 4.4: *Parametri di orientamento esterno della fotocamera.*

La valutazione dei parametri di orientamento esterno della macchina (Tab. 4.4), che definiscono la posizione e l’assetto della stessa rispetto al sistema di coordinate oggetto, è stata effettuata risolvendo un sistema non lineare di sei equazioni (le (4.5)) in sei incognite ($x_0, y_0, z_0, \omega, \varphi, \kappa$), note le coordinate oggetto e ricavate le relative coordinate immagine di tre punti di appoggio non allineati. Tali coordinate oggetto sono state fissate in seguito a procedura di compensazione di una serie di misure plano-altimetriche ridondanti relative ad un quadrilatero i cui vertici sono stati materializzati sull’apparato sperimentale con opportuni segnali.

La risoluzione conseguibile nel sistema di coordinate immagine è pari alla dimensione del *pixel* ($7.4 \mu\text{m}$ circa); con fattore di ingrandimento $z_0/c \simeq 120$, essa comporta una risoluzione nel sistema di coordinate oggetto, in corrispondenza del fondo della vasca ($z = 0$ m), di circa 1 mm.

La stima delle coordinate x e y dalle (4.5), considerando preponderanti gli errori commessi nella valutazione di z , è affetta dall’incertezza relativa massima in prossimità dei bordi:

$$\frac{\delta(x - x_0)}{|x - x_0|} \simeq \frac{L}{2c} \frac{\delta(z - z_0)}{|z - z_0|} \simeq 2.5\%,$$

$$\frac{\delta(y - y_0)}{|y - y_0|} \simeq \frac{H}{2c} \frac{\delta(z - z_0)}{|z - z_0|} \simeq 1.6\%,$$
(4.7)

dove $\delta(x - x_0)$, $\delta(y - y_0)$ e $\delta(z - z_0)$ rappresentano le incertezze delle variabili $(x - x_0)$, $(y - y_0)$ e $(z - z_0)$ rispettivamente. Inoltre, viste le modeste altezze d’acqua in gioco, ai fini della ricostruzione delle ortofoto è stato ritenuto trascurabile l’effetto della rifrazione all’interfaccia aria-acqua.

Per ovviare al disturbo introdotto in vicinanza dei contorni dalle riflessioni anomale dei raggi luminosi sulle pareti di bordo, si è provveduto ad annerirle internamente, determinando di fatto una diminuzione dell’estensione del campo retroilluminato tanto più sensibile quanto maggiore è l’altezza d’acqua in adiacenza ai bordi stessi. Altra fonte di errore è costituita dall’intrappolamento di bolle d’aria nella massa idrica: se quelle di dimensioni minori risultano impercettibili alla risoluzione dell’acquisizione fotografica, quelle maggiori si distinguono per un tono di colore decisamente più intenso sui contorni che darebbe luogo ad una stima inattendibile della profondità idrica. Per tale ragione, valutazioni di h superiori a quella inizialmente presente nel serbatoio (15 cm) sono state ritenute erranee e pertanto trascurate.

Infine, i dati sperimentali ottenuti sono stati interpolati su griglia cartesiana *cell-centered* ad elementi quadrati di lato 5 mm, perfettamente sovrapponibile a quella numerica limitatamente alla

zona di interesse. Per ogni centro di griglia si è valutata l'altezza d'acqua applicando la legge di interpolazione:

$$\tilde{z} = \frac{\sum_{i=1}^N \frac{z_i}{d_i^2}}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{d_i^2}} \quad (4.8)$$

ad N dati rintracciati in una regione delimitata da una circonferenza di raggio pari ad 1 cm e caratterizzati da altezza d'acqua z_i e da distanza d_i dal nodo in esame; quest'ultimo, in mancanza di un numero sufficiente di informazioni utili per interpolare un valore ragionevole, viene omesso.

In definitiva, la procedura delineata [8, 22], pur essendo affetta da imprecisioni imputabili alla stima indiretta delle altezze d'acqua, soprattutto in presenza di forti gradienti e di bolle d'aria ed in vicinanza delle pareti, consente tuttavia di ricostruire globalmente gli aspetti rilevanti dei fenomeni indagati, riconoscendone in maniera abbastanza accurata le strutture e le forme peculiari.

Come già sottolineato, un trasduttore ultrasonico di distanza è stato collocato in prossimità di una parete longitudinale della vasca ($x \simeq 1.627$ m, $y \simeq 0.022$ m) ad un'altezza di 21 cm rispetto al fondo. Tale sensore, come si è riscontrato nelle specifiche tecniche fornite dalla casa costruttrice, è sensibile alla presenza di un bersaglio a distanza compresa tra 5 e 25 cm, restituisce in uscita un segnale analogico in tensione nel *range* 0 ÷ 10 V e garantisce una risoluzione relativa pari allo 0.2%. La curva di calibrazione è sostanzialmente lineare e risponde, come si è appurato da preliminare fase di taratura dello strumento, all'equazione:

$$\delta \text{ (cm)} = 1.995 \cdot \Delta V \text{ (V)} + 25.245, \quad (4.9)$$

in cui δ simboleggia la distanza (in cm) del bersaglio e ΔV la differenza di potenziale (in V) acquisita; l'errore di linearità è uguale a ± 2 mm. Tramite convertitore analogico-digitale il segnale è stato campionato con frequenza di 100 Hz.

4.3 I risultati

Le esperienze di laboratorio presentate sono state simulate numericamente su PC con processore AMD *Athlon* 1900 per mezzo dei codici di calcolo di tipo MUSCL-*Hancock* illustrati nel Cap. 2: per le prime tre si è fatto uso del metodo SLIC, mentre per il Test 4 ci si è avvalsi del solutore approssimato HLLC del problema di *Riemann* ai fini del calcolo dei flussi numerici intercella.

Il dominio computazionale è stato descritto mediante discretizzazione cartesiana *cell-centered* ad elementi quadrati di lato 5 mm (per complessivi 124800 elementi). L'intervallo temporale di aggiornamento delle variabili incognite è controllato dall'estensione bidimensionale della condizione di stabilità lineare di *Courant-Friedrichs-Lewy*, nella quale il numero di *Courant* è stato posto uguale a 0.475. Condizioni al contorno riflettenti sono state imposte sui contorni. Infine, il coefficiente di resistenza di *Manning* per il fondo in Plexiglas è stato assunto pari a $0.007 \text{ s m}^{-1/3}$ in seguito a procedura iterativa di calibrazione finalizzata ad indurre, nella simulazione numerica relativa al Test 1, un arrivo del fronte di bagnamento sulla parete di fondo sincrono rispetto a quello rilevato nella corrispondente esperienza.

Alcuni risultati numerici sono restituiti a titolo di esempio nelle Figg. 4.14 - 4.15.

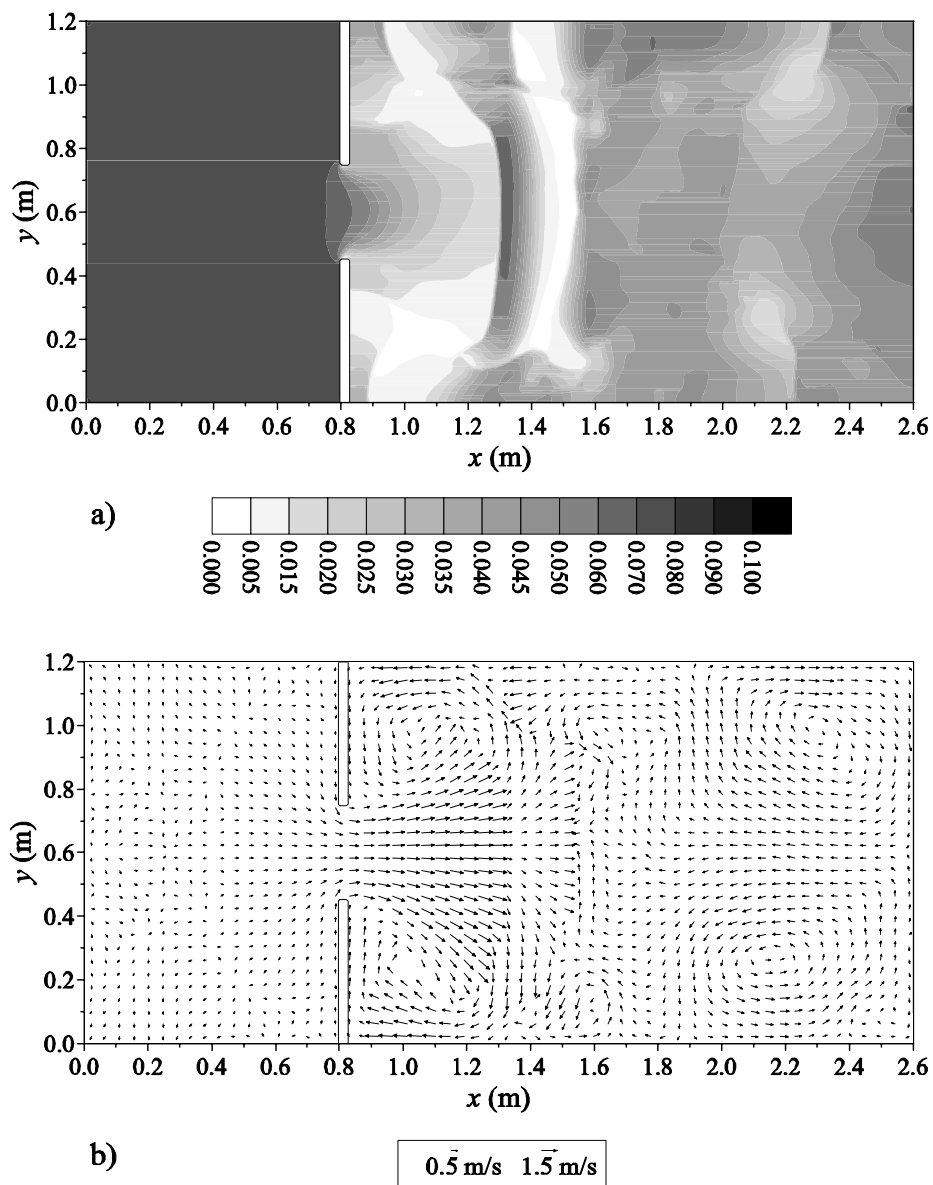


Figura 4.14: Risultati numerici relativi al Test 3 all'istante $t = 4.77$ s : a) mappa delle altezze idriche (in m), b) campo di velocità.

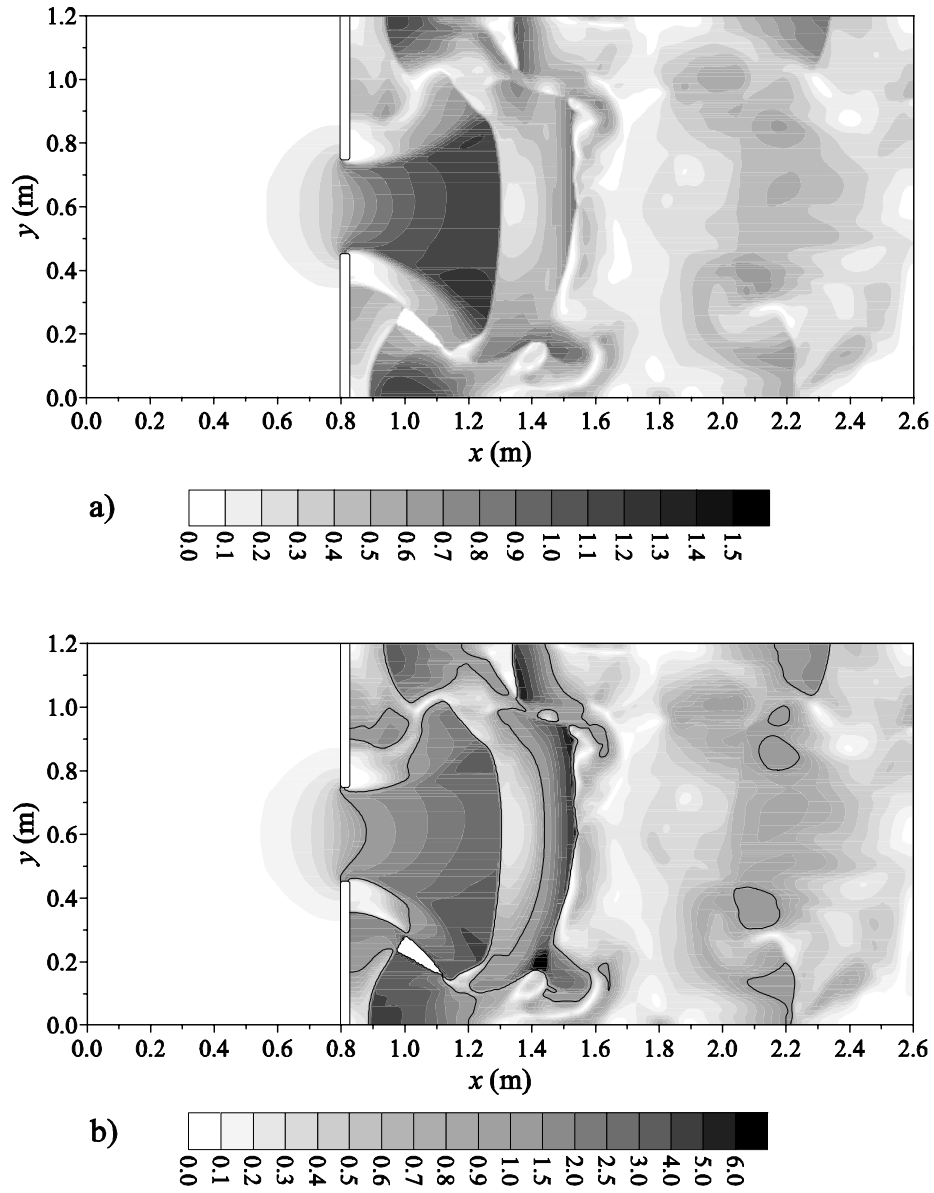


Figura 4.15: Risultati numerici relativi al Test 3 all'istante $t = 4.77$ s : a) mappa del modulo della velocità (in m/s), b) mappa del numero di Froude (con indicata la linea per $Fr = 1$).

Le figure dalla 4.16 alla 4.27 pongono a confronto, per i quattro test di laboratorio in oggetto, le mappe sperimentali e numeriche delle profondità idriche relative all'area indagata per diversi istanti temporali. Si osservi come appaiano annerite le regioni nei pressi dei bordi delle immagini in cui non è stato possibile interpolare un valore attendibile di altezza idrica per la presenza delle pareti fisiche della vasca o dell'ostacolo insormontabile; tali regioni risultano ovviamente più estese all'aumentare dell'altezza d'acqua. Analogamente sono state annerite le aree in corrispondenza delle quali anomale riflessioni (ascrivibili alla presenza di bolle d'aria o di forti pendenze della superficie libera) hanno condotto ad una stima del tirante idrico ritenuta non veritiera (superiore al livello statico iniziale nel serbatoio).

Dalle immagini menzionate si può apprezzare come vengano ben riprodotte dai modelli numerici la posizione e la forma delle onde di sommersione e delle onde di *shock*, sia conseguenti a rapido rilascio su letto bagnato, sia originate dalla riflessione contro le pareti laterali, quelle dell'ostacolo e la parete di fondo. Le differenze più significative sono riconducibili agli aspetti del fenomeno che non sono stati simulati numericamente, quali principalmente gli effetti della turbolenza e della tensione superficiale; in più al contatto con i bordi laterali del campo di moto non è stato modellato lo strato limite di parete.

In particolare, le figure inerenti il Test 3 mostrano come l'ostacolo sormontabile eserciti un moderato condizionamento sul flusso idrico; le complesse strutture che si formano, soprattutto quella a monte dell'ostacolo sul lato dello stesso aderente alla parete longitudinale, figurano predette dal codice con soddisfacente accuratezza, anche se le relative dimensioni planimetriche risultano leggermente sottostimate. Inoltre, l'elaborazione delle fotografie non elimina l'indesiderata traccia di tale ostacolo a causa del disturbo ottico localmente introdotto dal medesimo. Le fotografie relative al Test 4 evidenziano le caratteristiche decisamente tridimensionali dell'urto del fronte di sommersione contro l'ostacolo insormontabile. Il campo di moto ne risulta fortemente condizionato e sembra fedelmente riprodotto dal codice numerico, sia nello sviluppo temporale, sia nel complesso assetto e nell'estensione delle forme principali; qualche sensibile differenza rispetto alle risultanze sperimentali si nota nelle strutture che traggono origine dalla riflessione contro la parete di fondo.

Le Figg. 4.28 e 4.29 raffrontano, distintamente per le quattro prove eseguite, gli idrogrammi relativi ad un punto di indagine ($x = 1.6475$ m, $y = 0.0225$ m) collocato in prossimità di una parete longitudinale per evitare la presenza della sonda ultrasonica nella porzione utile delle fotografie acquisite: gli andamenti dell'altezza idrica previsti dal codice di calcolo sono rappresentati insieme a quelli sperimentali ottenuti dall'applicazione delle due tecniche sperimentali adottate. I dati ottenuti dalle misurazioni effettuate puntualmente ad alta frequenza temporale mediante trasduttore ultrasonico sono stati sottoposti all'azione esercitata da un filtro di media mobile ad 11 valori. È possibile constatare un sostanziale accordo tra i risultati scaturiti dai due diversi approcci sperimentali, se si fa eccezione per i valori di picco registrati in corrispondenza del fronte di bagnamento durante i Test 1, 3 e 4. Nonostante il posizionamento infelice del punto di misura disturbato dalla vicinanza della parete, l'andamento numerico delle altezze d'acqua riproduce abbastanza bene quello sperimentale. Infatti il calcolo coglie con precisione l'arrivo del fronte di bagnamento per le prove 1 e 4, accelerandolo leggermente nel Test 3; tuttavia, viene collocata leggermente anticipata nel tempo, sistematicamente per tutte le prove e nettamente per la quarta, l'onda a fronte ripido che risale verso monte.

In definitiva, l'esito favorevole della comparazione tra acquisizioni sperimentali e previsioni formulate dai modelli numerici conferma l'affidabilità e la robustezza dei codici stessi a ricostruire le caratteristiche principali dei fenomeni analizzati. Esso sembra pertanto adatto all'impiego nelle pratiche applicazioni in cui di norma il campo di moto risulta particolarmente articolato e le ipotesi che stanno alla base della schematizzazione matematica non sono rigorosamente soddisfatte.

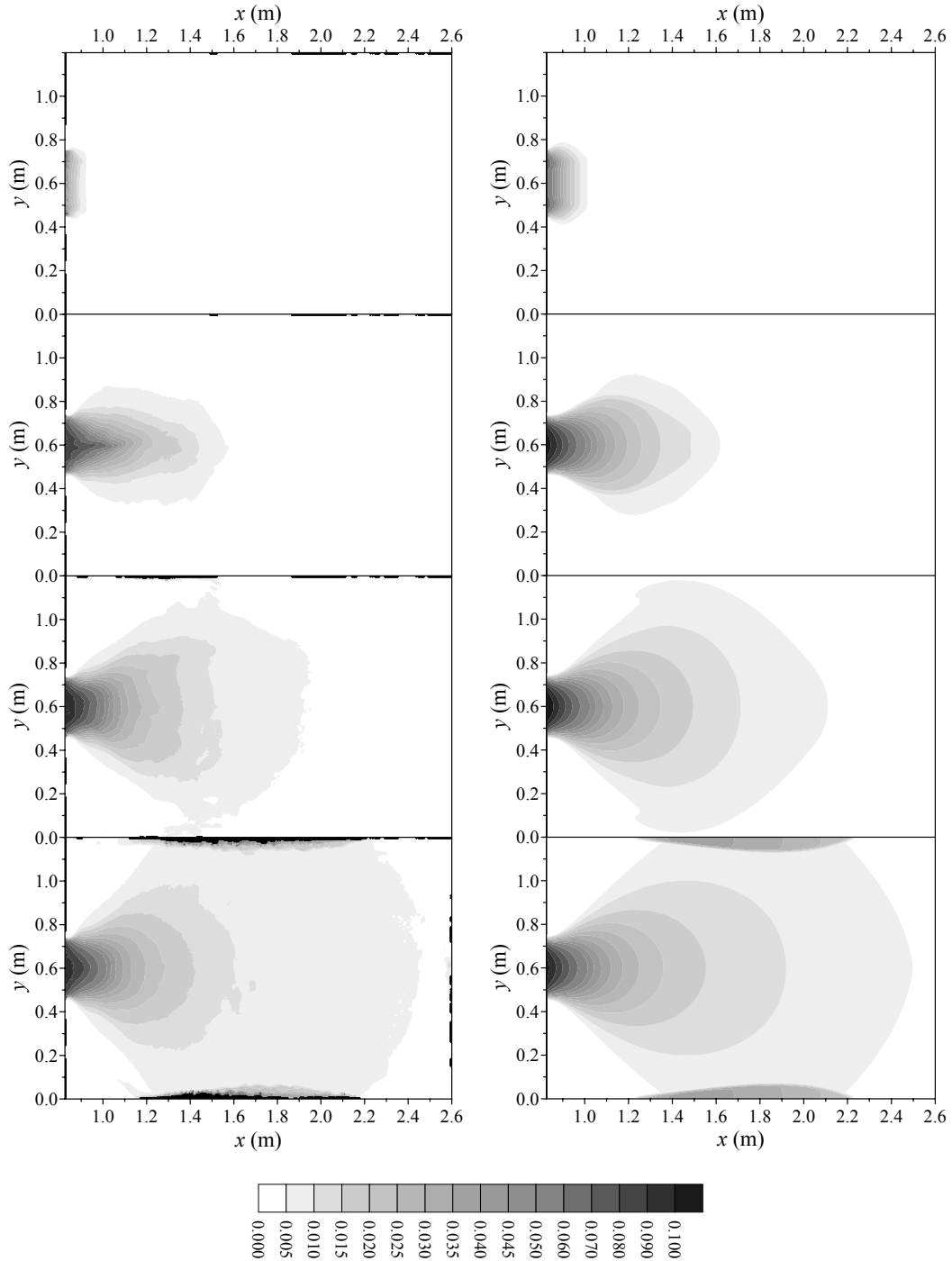


Figura 4.16: Mappe sperimentali (a sinistra) e numeriche (a destra) delle altezze idriche (in m) per il Test 1 agli istanti $t = 0.11$ s, $t = 0.46$ s, $t = 0.81$ s e $t = 1.16$ s.

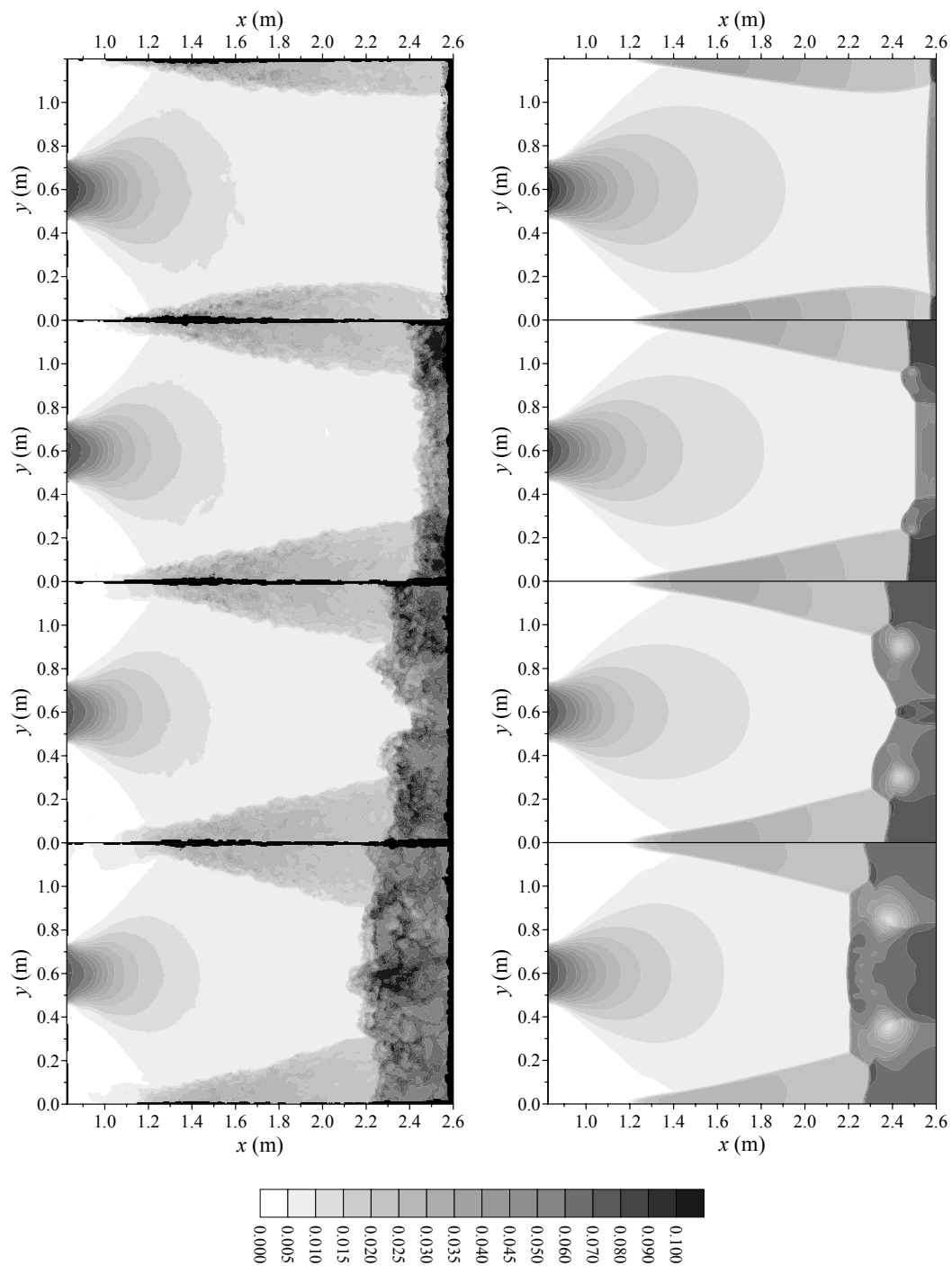


Figura 4.17: Mappe sperimentali (a sinistra) e numeriche (a destra) delle altezze idriche (in m) per il Test 1 agli istanti $t = 1.51\text{ s}$, $t = 1.87\text{ s}$, $t = 2.22\text{ s}$ e $t = 2.57\text{ s}$.

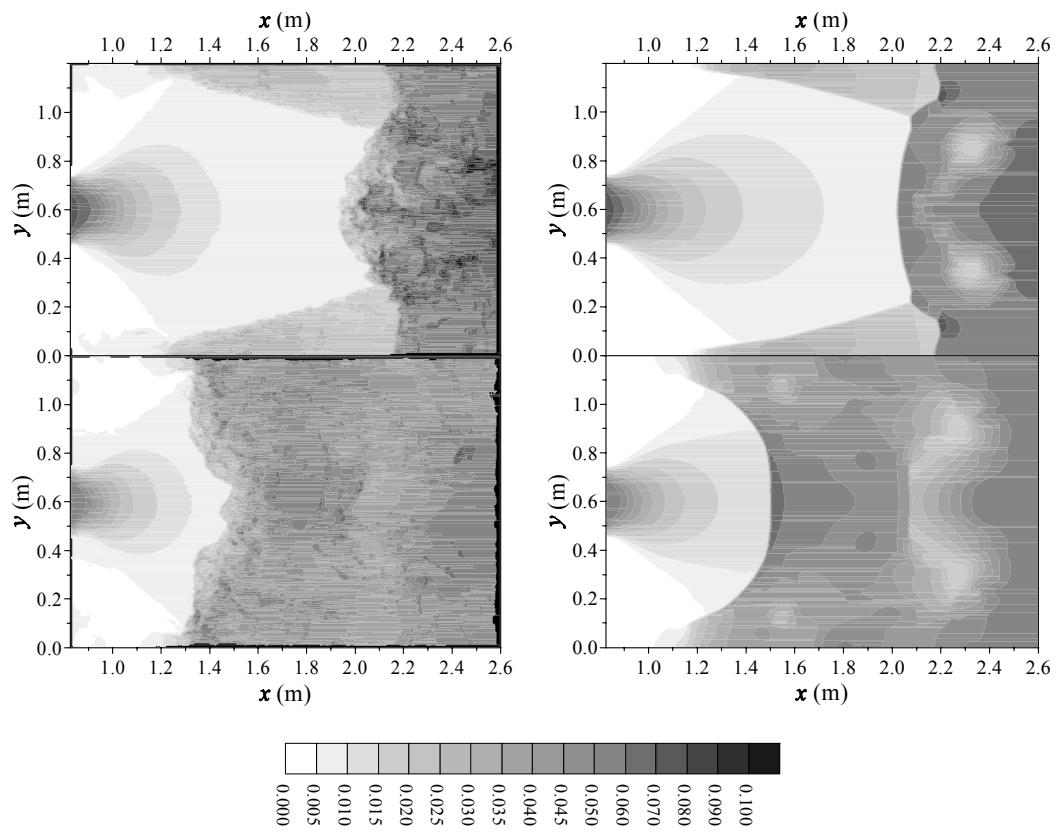


Figura 4.18: Mappe sperimentali (a sinistra) e numeriche (a destra) delle altezze idriche (in m) per il Test 1 agli istanti $t = 2.92$ s e $t = 4.77$ s.

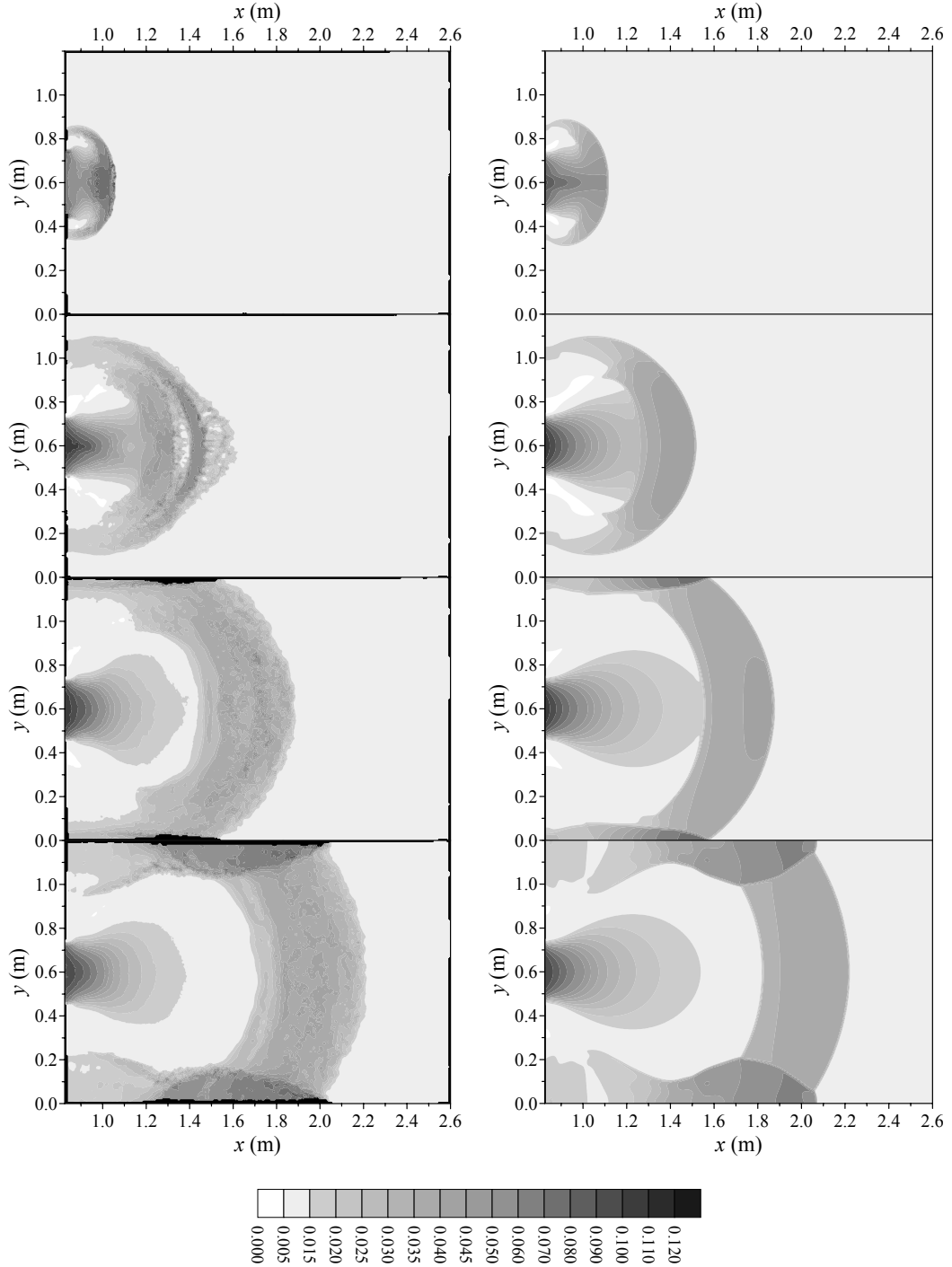


Figura 4.19: Mappe sperimentali (a sinistra) e numeriche (a destra) delle altezze idriche (in m) per il Test 2 agli istanti $t = 0.24$ s, $t = 0.59$ s, $t = 0.94$ s e $t = 1.29$ s.

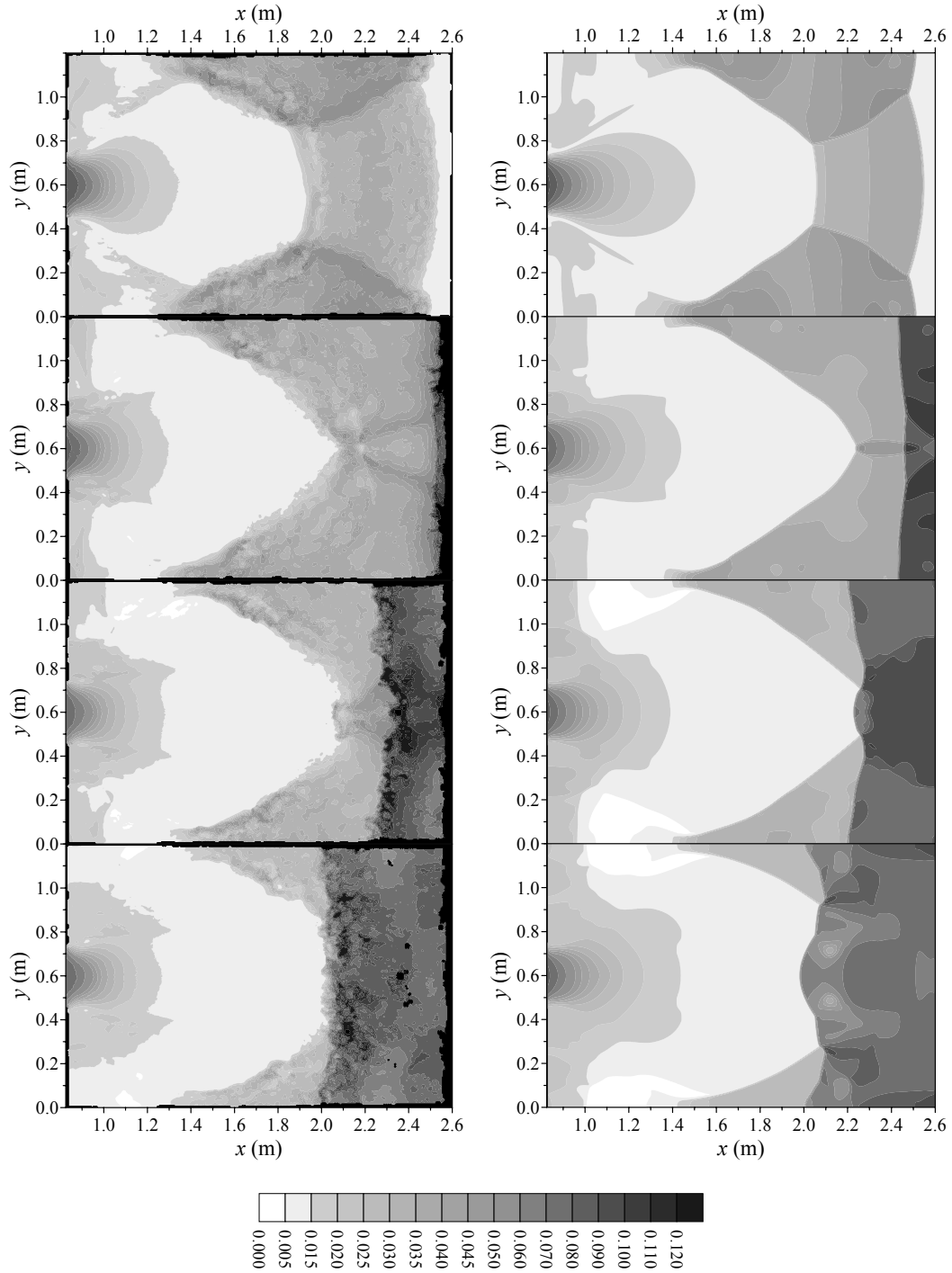


Figura 4.20: Mappe sperimentali (a sinistra) e numeriche (a destra) delle altezze idriche (in m) per il Test 2 agli istanti $t = 1.64$ s, $t = 2.00$ s, $t = 2.35$ s e $t = 2.70$ s.

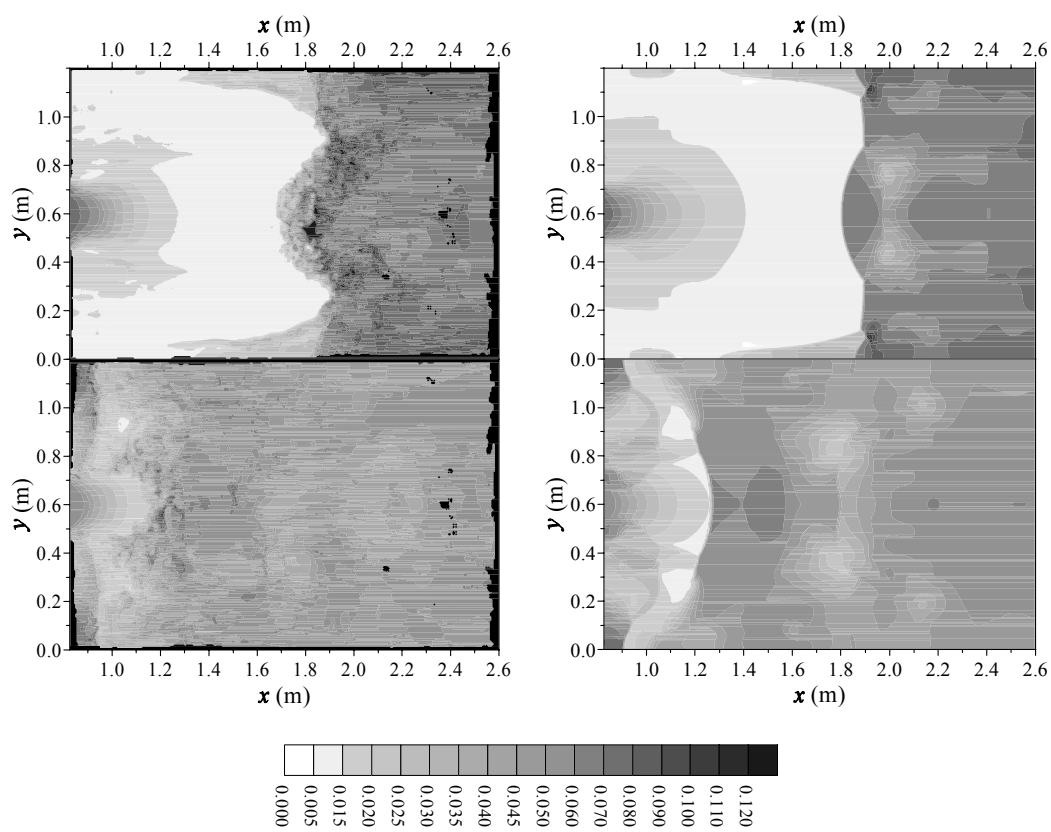


Figura 4.21: Mappe sperimentali (a sinistra) e numeriche (a destra) delle altezze idriche (in m) per il Test 2 agli istanti $t = 3.05$ s e $t = 4.89$ s.

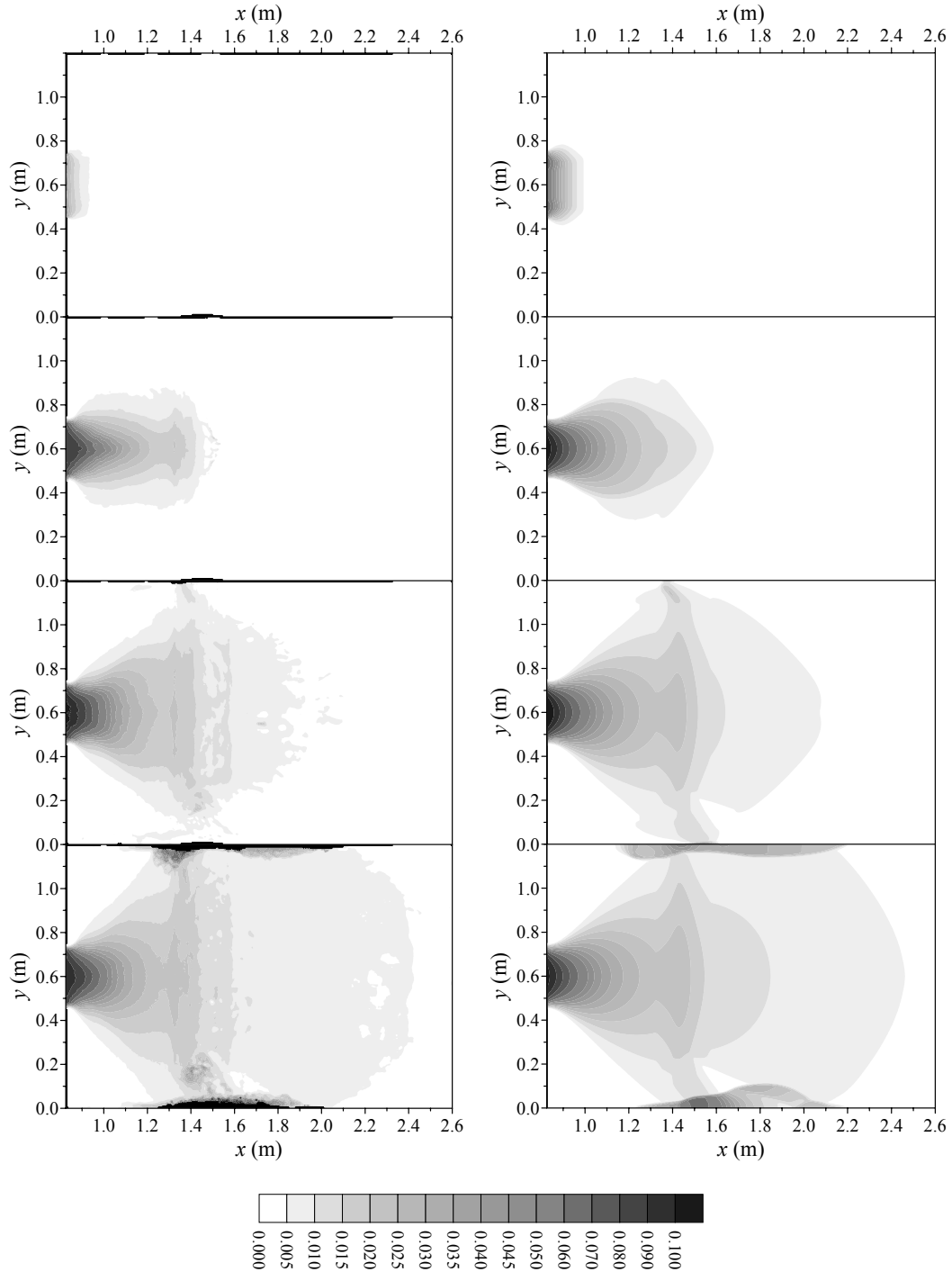


Figura 4.22: Mappe sperimentali (a sinistra) e numeriche (a destra) delle altezze idriche (in m) per il Test 3 agli istanti $t = 0.10$ s, $t = 0.46$ s, $t = 0.81$ s e $t = 1.16$ s.

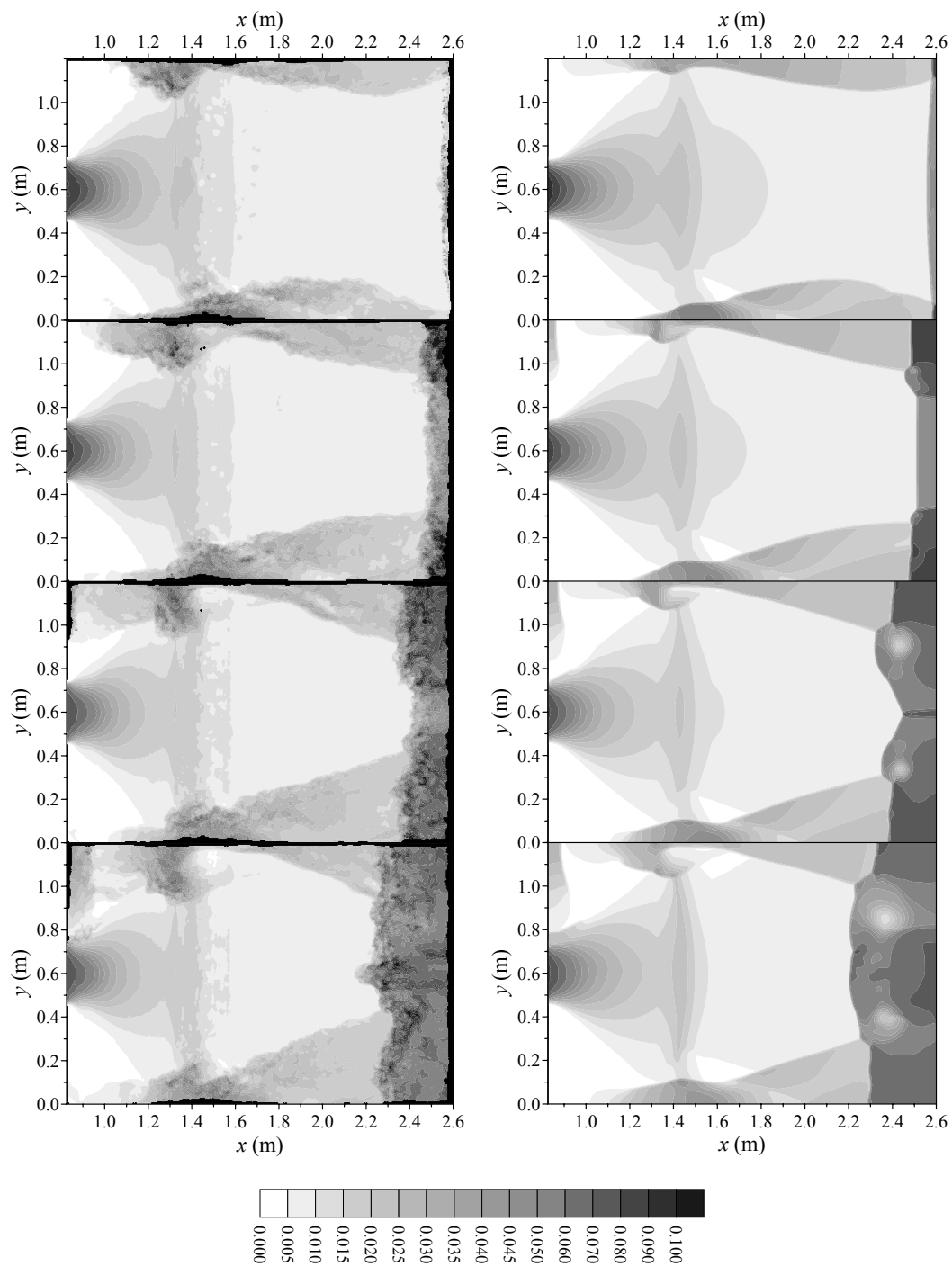


Figura 4.23: Mappe sperimentali (a sinistra) e numeriche (a destra) delle altezze idriche (in m) per il Test 3 agli istanti $t = 1.51\text{ s}$, $t = 1.86\text{ s}$, $t = 2.21\text{ s}$ e $t = 2.58\text{ s}$.

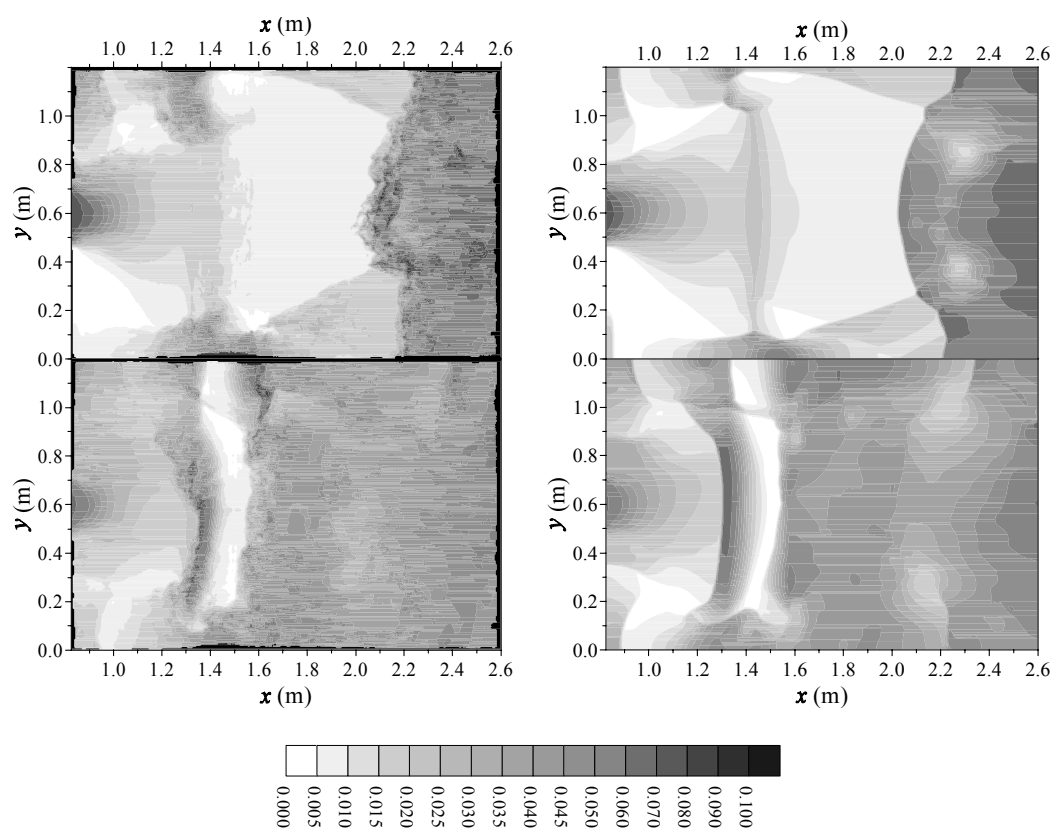


Figura 4.24: Mappe sperimentali (a sinistra) e numeriche (a destra) delle altezze idriche (in m) per il Test 3 agli istanti $t = 2.93$ s e $t = 4.77$ s.

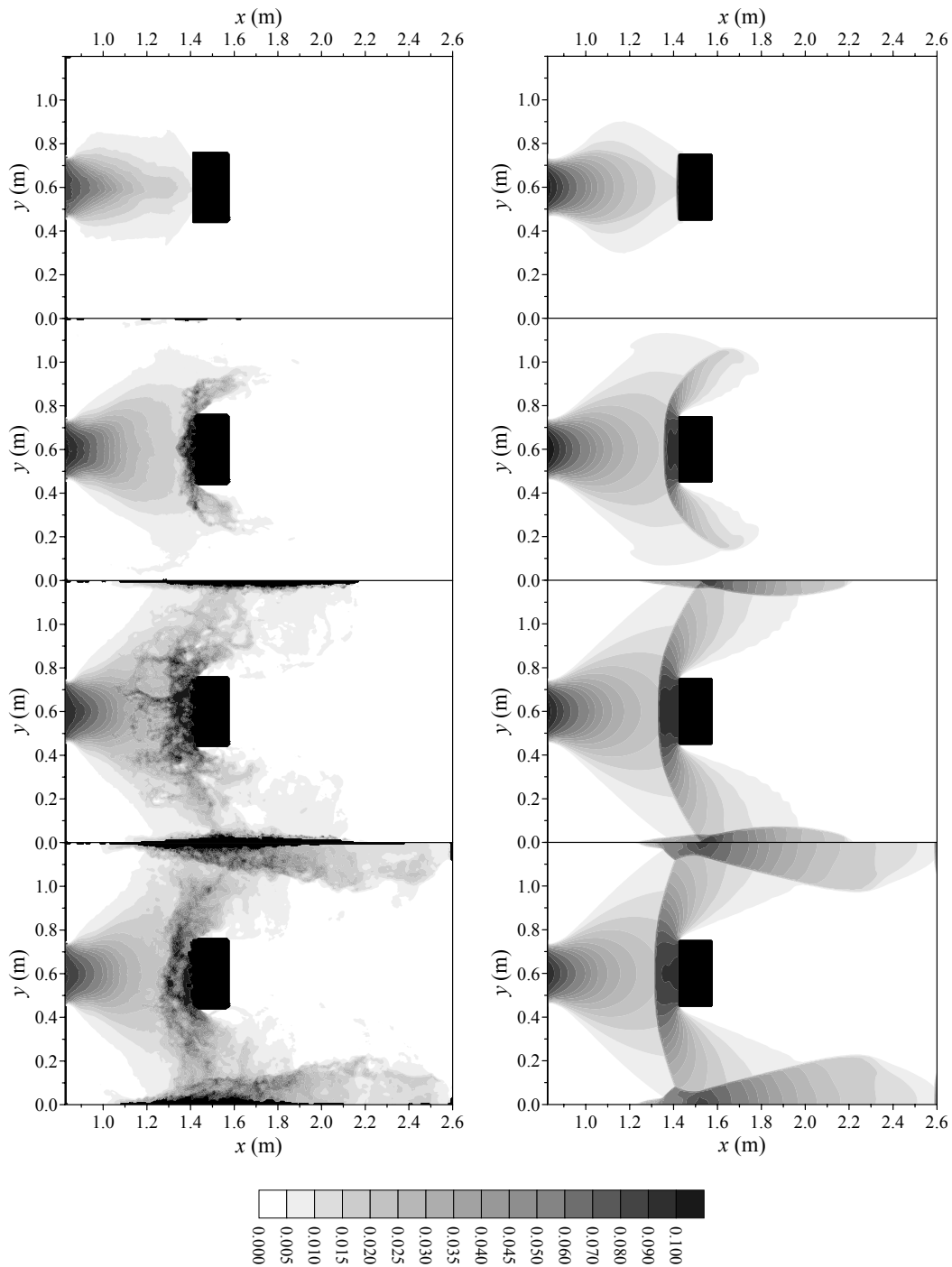


Figura 4.25: Mappe sperimentali (a sinistra) e numeriche (a destra) delle altezze idriche (in m) per il Test 4 agli istanti $t = 0.40$ s, $t = 0.75$ s, $t = 1.10$ s e $t = 1.45$ s.

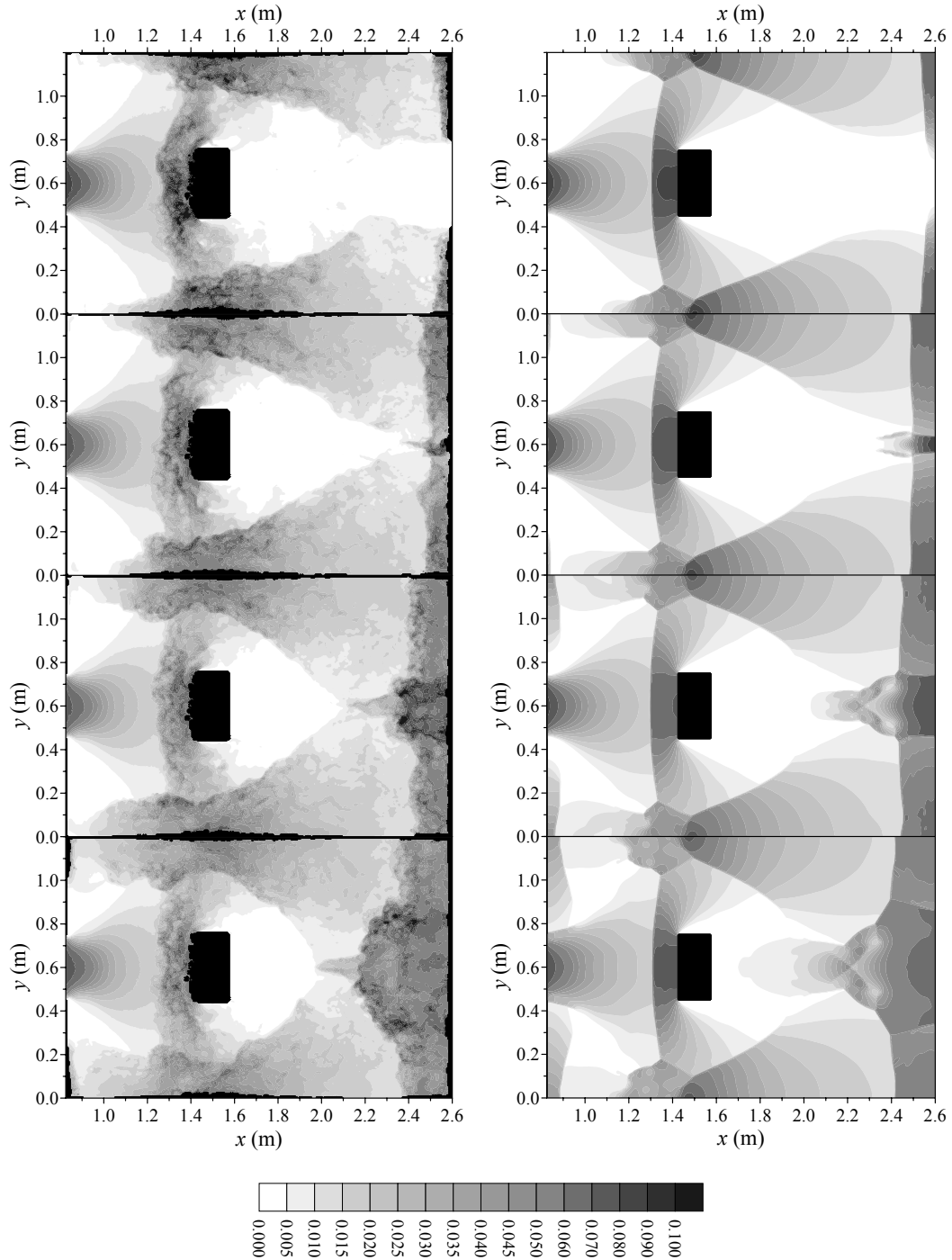


Figura 4.26: Mappe sperimentali (a sinistra) e numeriche (a destra) delle altezze idriche (in m) per il Test 4 agli istanti $t = 1.81$ s, $t = 2.16$ s, $t = 2.51$ s e $t = 2.86$ s.

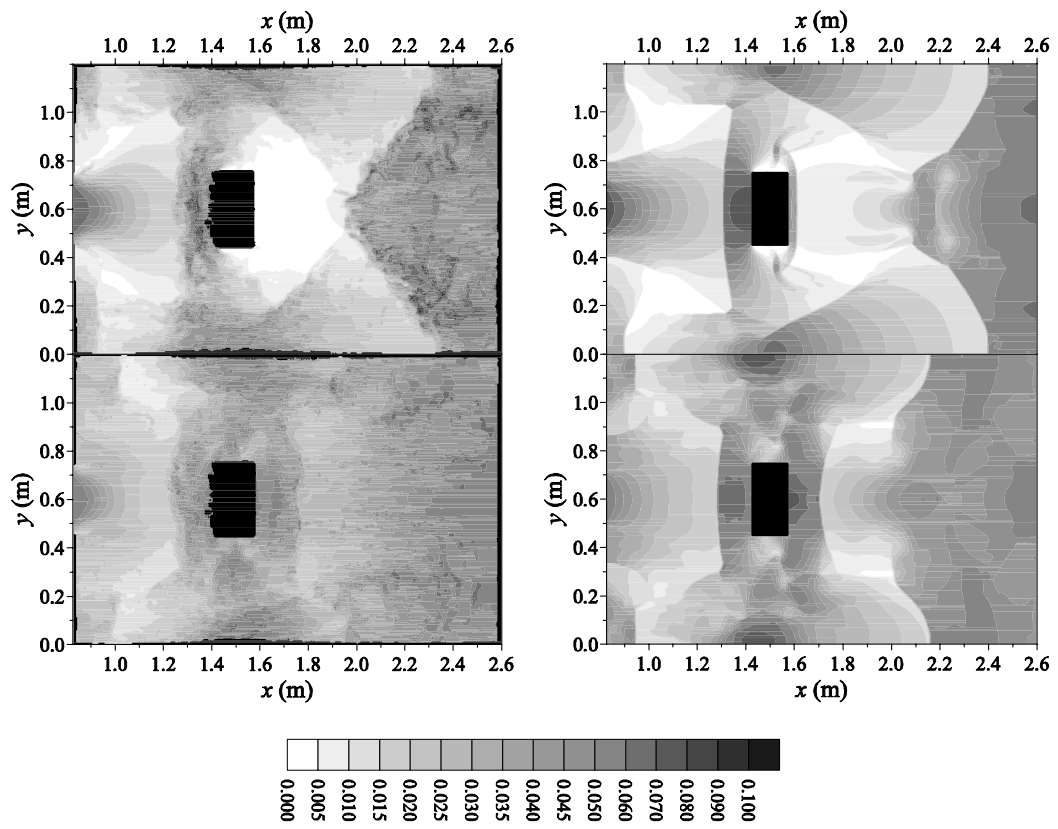


Figura 4.27: Mappe sperimentali (a sinistra) e numeriche (a destra) delle altezze idriche (in m) per il Test 4 agli istanti $t = 3.22$ s e $t = 5.06$ s.

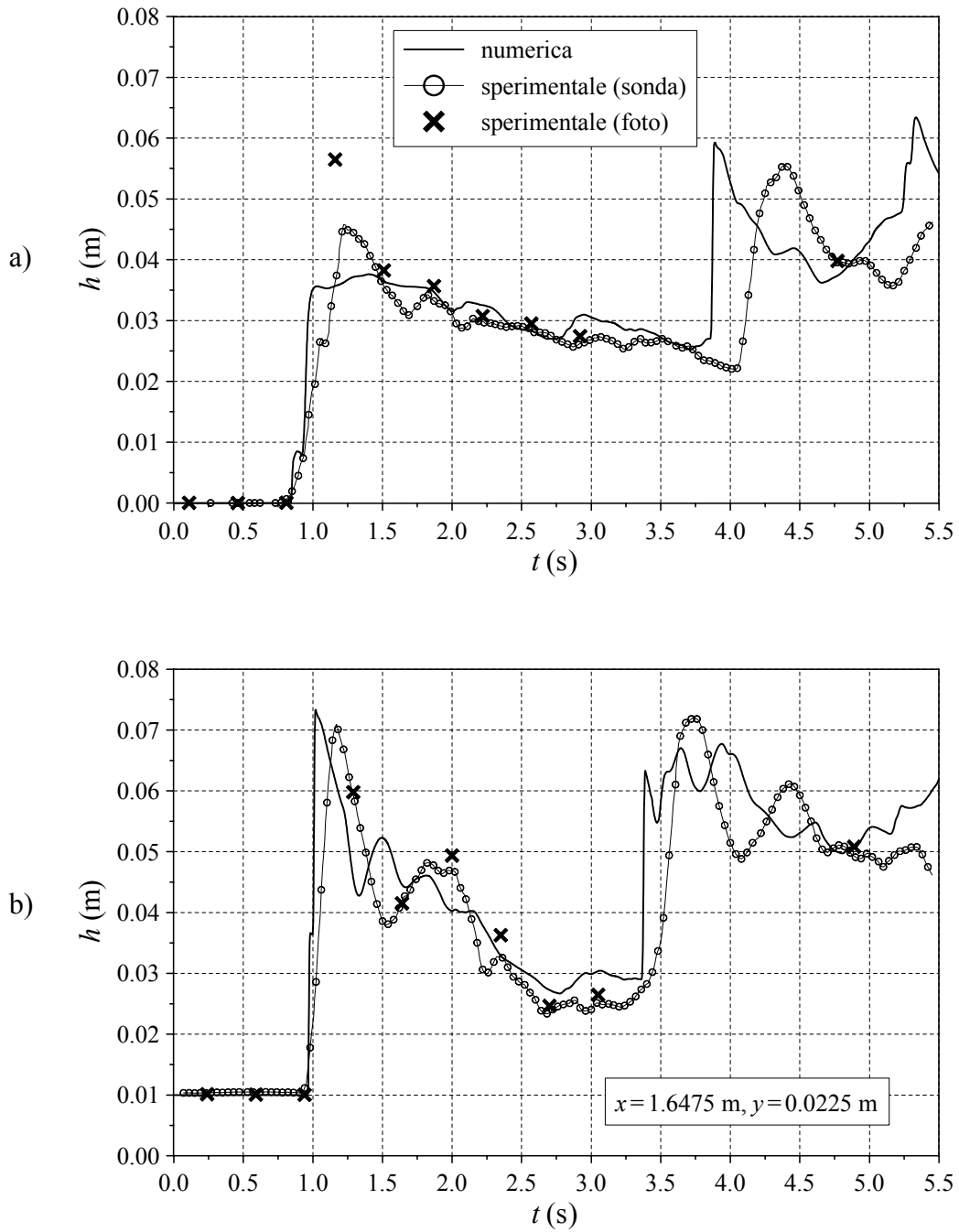


Figura 4.28: Confronto tra idrogrammi numerici e sperimentali per: a) Test 1, b) Test 2.

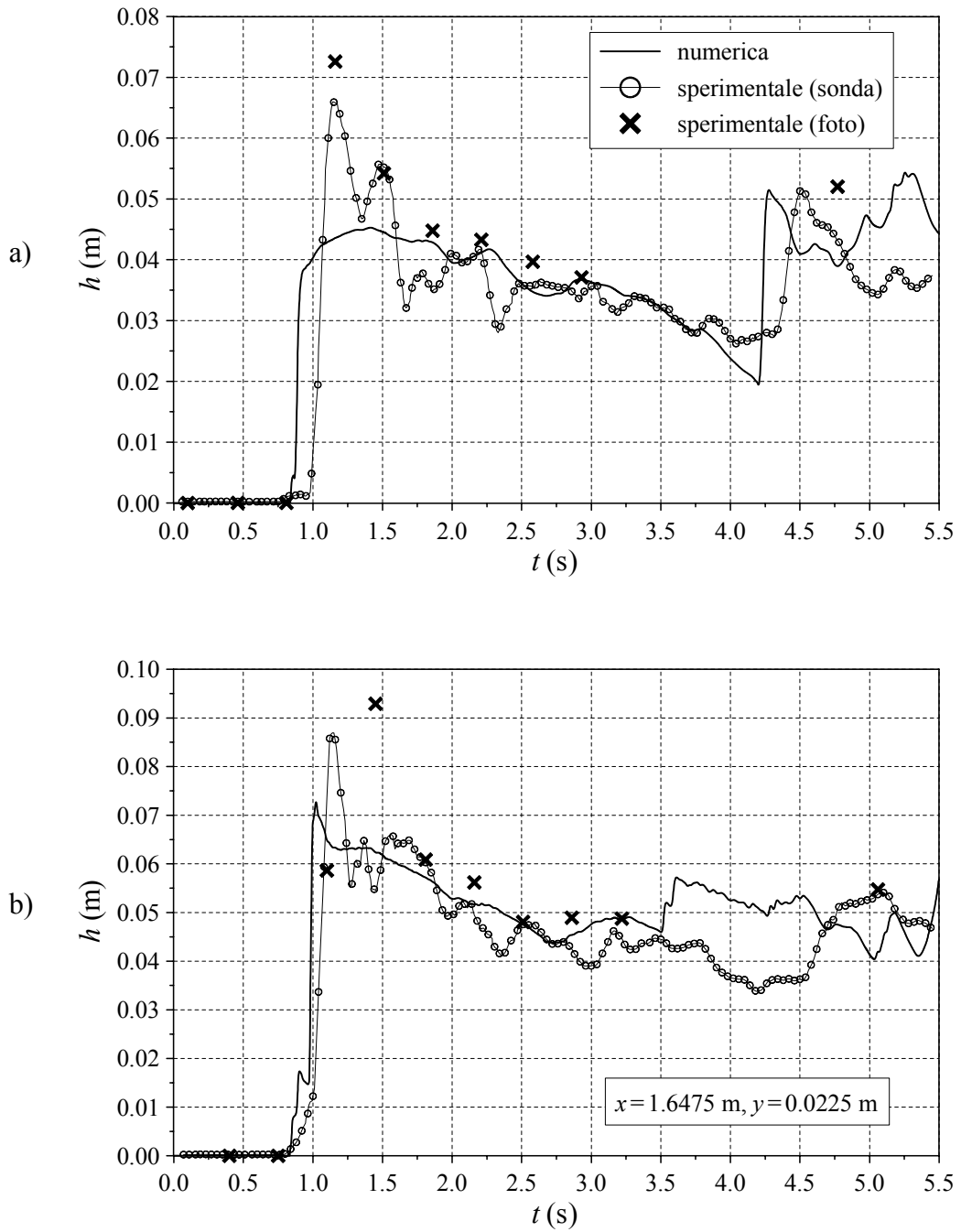


Figura 4.29: Confronto tra idrogrammi numerici e sperimentali per: a) Test 3, b) Test 4.

Conclusioni

Questa dissertazione ha affrontato lo studio di fenomeni idrici bidimensionali di propagazione di onde lunghe in regime di moto rapidamente vario.

Nell'ipotesi che le grandezze geometriche scala orizzontali siano preponderanti rispetto a quelle verticali, tali problemi idrodinamici possono essere schematizzati mediante un sistema differenziale di tipo iperbolico di leggi di conservazione non lineari.

Soprattutto nel campo dell'Aerodinamica, varie metodologie sono state perfezionate per la risoluzione numerica dei problemi iperbolici ai valori iniziali e al contorno. Nella presente tesi sono state discusse le proprietà di alcune di queste, appartenenti alla classe dei metodi ai volumi finiti *shock-capturing* ad alta risoluzione; le relative prestazioni sono state successivamente verificate per confronto con soluzioni di riferimento inerenti casi test di particolare interesse e con risultati sperimentali ottenuti su modelli fisici di laboratorio.

Un'indagine sperimentale condotta presso il laboratorio di Idraulica dell'Università degli Studi di Parma ha fornito ulteriori elementi di raffronto utili a confermare l'affidabilità e la robustezza dei modelli numerici implementati. Inoltre la tecnica di acquisizione adottata, del tutto non invasiva e consistente nell'elaborazione colorimetrica di immagini fotografiche digitali, si è dimostrata valida ai fini della ricostruzione delle caratteristiche globali dei fenomeni indagati.

In tutti i casi presi in esame, anche in quelli ove non risultano completamente soddisfatte le ipotesi su cui si basa la modellazione matematica, è stato possibile appurare una soddisfacente abilità da parte dei codici di calcolo a riprodurre con buona accuratezza la distribuzione spaziale e l'evoluzione temporale delle grandezze del moto. Ciò autorizza a procedere ad un loro accorto impiego in applicazioni a casi pratici in cui le irregolarità topografiche (aree inizialmente asciutte, ostacoli sormontabili o meno, ecc.) possono dare vita a campi di moto piuttosto complessi.

Persistono tuttavia diversi aspetti di analisi numerica meritevoli di approfondimento, a cui la letteratura in materia non ha ancora dedicato sufficiente attenzione. Tra questi, al fine di sviluppare codici numerici robusti nei casi di campo, pare sicuramente prioritario quello connesso all'introduzione del contributo dei termini sorgente in corrispondenza dei contorni mobili (fronti di allagamento). In prospettiva sembra poi necessario dirigersi verso l'impiego di tecniche di discretizzazione più flessibili che assicurino un valido compromesso tra accuratezza nella descrizione geometrica della topografia ed efficienza della simulazione al calcolatore.

Si configura come ulteriore sviluppo interessante di ricerca l'estensione dei metodi numerici presentati a casi di inondazione di aree urbane e a situazioni in cui non possa ritenersi irrilevante l'effetto di trasporto di sedimenti responsabile della modellazione del fondo.

Inoltre, i confortanti risultati conseguiti dalla sperimentazione di cui si è riferito incitano alla prosecuzione dell'indagine, prendendo in considerazione altre configurazioni ed affinando la tecnica colorimetrica di acquisizione. Non si esclude, infine, la possibilità di avviare studi per ottenere informazioni sperimentali estese sulla conformazione del campo delle velocità superficiali.

Bibliografia

- [1] M. B. ABBOTT. “An Introduction to the Method of Characteristics”. American Elsevier, New York (1965).
- [2] M. B. ABBOTT. “Computational Hydraulics”. Ashgate Publishing Company (1992).
- [3] A. A. AKANBI AND N. D. KATOPODES. Model for flood propagation on initially dry land. *Journal of Hydraulic Engineering* **114**(7), 689–706 (1988).
- [4] A. ALCRUDO AND P. GARCÍA-NAVARRO. A high resolution Godunov-type scheme in finite volumes for the 2D shallow water equations. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* **16**, 489–505 (1993).
- [5] K. ANASTASIOU AND C. T. CHAN. Solution of the 2D shallow water equations using the finite volume method on unstructured triangular meshes. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* **24**, 1225–1245 (1997).
- [6] R. ARIS. “Vectors, Tensors, and the Basic Equations of Fluid Mechanics”. Dover Publications, Inc., New York (1989).
- [7] F. AURELI. “Modellazione numerica e verifica sperimentale di fenomeni di moto rapidamente vario mono e bidimensionali”. Dissertazione per il conseguimento del titolo di Dottore di Ricerca in Ingegneria Idraulica, Politecnico di Milano, XII Ciclo (Dicembre 1999).
- [8] F. AURELI, A. MARANZONI, AND P. MIGNOSA. Experimental modeling of rapidly varying flows on wet bed and in presence of submersible obstacles. Accettato per la presentazione a River Flow 2004, Second International Conference on Fluvial Hydraulics. Napoli, 23-25 Giugno 2004 (Nov. 2003).
- [9] F. AURELI, A. MARANZONI, AND P. MIGNOSA. Parma University simulations of the isolated building test case. 3rd IMPACT Project Workshop. Louvain-la Neuve (Belgio), 6-7 Novembre 2003 (Nov. 2003).
- [10] F. AURELI, A. MARANZONI, AND P. MIGNOSA. Two dimensional modeling of rapidly varying flows by finite volume schemes. Accettato per la presentazione a River Flow 2004, Second International Conference on Fluvial Hydraulics. Napoli, 23-25 Giugno 2004 (Nov. 2003).
- [11] F. AURELI AND P. MIGNOSA. Moti bidimensionali originati da una rotta arginale. In CNR-GNDICI, editor, “Atti del XXVII Convegno di Idraulica e Costruzioni Idrauliche”, no. 1, pp. 183–189, Genova (12-15 Settembre 2000). Dipartimento di Ingegneria Ambientale, Università degli Studi di Genova.

- [12] F. AURELI AND P. MIGNOSA. Rapidly varying flows due to levee-breaking. In D. BOUSMAR AND Y. ZECH, editors, “River Flow 2002”, no. 1, pp. 459–466, Louvain-la-Neuve (Belgium) (4-6 Sept. 2002). Department of Civil and Environmental Engineering, Université catholique de Louvain.
 - [13] T. J. BARTH. “On Unstructured Grids and Solvers”. Von Karman Institute for Fluid Dynamics Lecture Series, 90-03 (1990).
 - [14] G. K. BATCHELOR. “An Introduction to Fluid Dynamics”. Cambridge University Press (1970).
 - [15] P. BATTEN, C. LAMBERT, AND D. M. CAUSON. Positively conservative high-resolution convection schemes for unstructured elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **39**(11), 1821–1838 (1996).
 - [16] A. BAYLISS AND E. TURKEL. Radiation boundary conditions for wave-like equations. *Communications on Pure and Applied Mathematics* **33**, 707–725 (1980).
 - [17] W. BECHTELER, H. KULISCH, AND M. NUJIC. 2-D dam-break flooding waves: comparison between experimental and calculated results. In A. J. SAUL, editor, “Floods and Flood Management”. Kluwer Academic Publishers, Dodrecht (1992).
 - [18] C. BEFFA AND R. FAEH. Flood propagation on mobile beds under mountainous flow conditions. In P. MOLINARO AND L. NATALE, editors, “Modelling of Flood Propagation Over Initially Dry Areas”, pp. 327–341, Milano (Giugno-Luglio 1994). ASCE - CNR/GNDCI - ENEL, American Society of Civil Engineers.
 - [19] M. BELICCHI. Modellazione fisica e matematica di fenomeni di moto vario conseguenti al collasso di opere di ritenuta. Master’s thesis, Università di Parma (Aprile 1997).
 - [20] C. V. BELLOS, J. V. SOULIS, AND J. K. SAKKAS. Computation of two-dimensional dam-break-induced flows. *Advances in Water Resources* **14**(1), 31–41 (1991).
 - [21] C. V. BELLOS, J. V. SOULIS, AND J. K. SAKKAS. Experimental investigations of two-dimensional dam-break-induced flows. *Journal of Hydraulic Research* **30**(1), 47–63 (1992).
 - [22] C. BENASSI. Indagine sperimentale e modellazione numerica di transitori rapidi conseguenti all’apertura di una breccia. Master’s thesis, Università di Parma (Ottobre 2003).
 - [23] A. BERMÚDEZ, A. DERVIEUX, J. A. DESIDERI, AND M. E. VÁZQUEZ. Upwind schemes for the two-dimensional shallow water equations with variable depth using unstructured meshes. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **155**, 49–72 (1998).
 - [24] A. BERMÚDEZ AND M. E. VÁZQUEZ. Upwind methods for hyperbolic conservation laws with source terms. *Computers Fluids* **23**(8), 1049–1071 (1994).
 - [25] S. J. BILLET. “A class of upwind methods for conservation laws”. PhD thesis, Cranfield University (1994).
 - [26] S. J. BILLET AND E. F. TORO. Implementing a three-dimensional finite volume WAF-type scheme for Euler equations. In “Proceedings of the Third ECCOMAS Computational Fluid Dynamics Conference”, pp. 732–738. Wiley, Paris, France (9-13 Sept. 1996).
-

-
- [27] S. J. BILLET AND E. F. TORO. On the accuracy and stability of explicit schemes for multidimensional linear homogeneous advection equations. *Journal of Computational Physics* **131**(1), 247–250 (1997).
- [28] S. J. BILLET AND E. F. TORO. On WAF schemes for multidimensional hyperbolic conservation laws. *Journal of Computational Physics* **130**(1), 1–24 (1997).
- [29] D. L. BOOK AND J. P. BORIS. Flux corrected transport I. SHASTA, a fluid transport algorithm that works. *Journal of Computational Physics* **11**, 38–69 (1973).
- [30] D. L. BOOK AND J. P. BORIS. Flux corrected transport III: minimal error FCT algorithms. *Journal of Computational Physics* **20**, 397–431 (1976).
- [31] D. L. BOOK, J. P. BORIS, AND K. HAIN. Flux corrected transport II: generalizations of the method. *Journal of Computational Physics* **18**, 248–283 (1975).
- [32] S. F. BRADFORD AND B. F. SANDERS. Finite-volume model for shallow-water flooding of arbitrary topography. *Journal of Hydraulic Engineering* **128**(3), 289–298 (Mar. 2002).
- [33] G. BRASCHI, F. DADONE, AND M. GALLATI. Plain flooding: near field and far field simulations. In P. MOLINARO AND L. NATALE, editors, “Modelling of Flood Propagation over Initially Dry Areas”, Proceedings of the Specialty Conference, pp. 51–55, Milano (29 Giugno-1 Luglio 1994). ASCE-CNR/GNDICI-ENEL, American Society of Civil Engineers.
- [34] P. BRUFAU AND P. GARCÍA-NAVARRO. Two-dimensional dam break flow simulation. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* **33**, 35–57 (2000).
- [35] P. BRUFAU, M. E. VÁZQUEZ-CENDÓN, AND P. GARCÍA-NAVARRO. A numerical model for the flooding and drying of irregular domains. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* **39**, 247–275 (2002).
- [36] J. BURGUETE AND P. GARCÍA-NAVARRO. Efficient construction of high-resolution TVD conservative schemes for equation with source terms: application to shallow water flows. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* **37**(2), 209–248 (2001).
- [37] D. S. BUTLER. “Characteristics in Three Independent Variables”. Pergamon Press, Londra (1962).
- [38] V. CALEFFI, A. VALIANI, AND A. ZANNI. Finite volume method for simulating extreme flood events in natural channels. *Journal of Hydraulic Research* **41**(2), 167–177 (2003).
- [39] D. CALHOUN AND R. J. LEVEQUE. Solving the advection-diffusion equation in irregular geometries. *Journal of Computational Physics* **156**, 1–38 (2000).
- [40] H. CAPART AND D. L. YOUNG. Formation of a jump by the dam-break wave over a granular bed. *Journal of Fluid Mechanics* **372**, 165–187 (1998).
- [41] D. M. CAUSON, D. M. INGRAM, C. G. MINGHAM, G. YANG, AND R. V. PEARSON. Calculation of shallow water flows using a Cartesian cut cell approach. *Advances in Water Resources* **23**, 545–562 (2000).
-

- [42] M. CETINA AND R. RAJAR. Two dimensional dam-break flow simulation in a sudden enlargement. In P. MOLINARO AND L. NATALE, editors, “Modelling of Flood Propagation over Initially Dry Areas”, Proceedings of the Specialty Conference, pp. 268–282, Milano (29 Giugno-1 Luglio 1994). ASCE-CNR/GNDCI-ENEL, American Society of Civil Engineers.
 - [43] M. H. CHAUDHRY. “An Introduction to Fluid Dynamics”. Prentice Hall (1993).
 - [44] I. CHERN AND P. COLELLA. A conservative front tracking method for hyperbolic conservation laws. Report UCRL-97200, LLNL (1987).
 - [45] T. CHIANG AND K. HOFFMANN. Determination of computational time step for chemically reacting flows. AIAA Paper 89-1855, New York. AIAA 20th Fluid Dynamics, Plasma Dynamics and Lasers Conference, Buffalo, 12-14 June 1989.
 - [46] A. J. CHORIN. Random Choice solution of hyperbolic systems. *Journal of Computational Physics* **22**, 517–533 (1976).
 - [47] A. J. CHORIN AND J. E. MARSDEN. “A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics”. Springer-Verlag (1993).
 - [48] V. T. CHOW. “Open-Channel Hydraulics”. McGraw Hill, New York (1959).
 - [49] D. CITRINI AND G. NOSEDA. “Idraulica”. CEA-Milano, seconda ed. (1987).
 - [50] B. COCKBURN AND C. W. SHU. TVB Runge-Kutta local projection discontinuous Galerkin finite element method for conservation laws II: general framework. *Mathematics of Computation* **52**, 411–435 (1989).
 - [51] B. COCKBURN AND C. W. SHU. The Runge-Kutta discontinuous Galerkin method for conservation laws V: multidimensional systems. *Journal of Computational Physics* **141**, 199–224 (1998).
 - [52] W. J. COIRIER AND K. G. POWELL. An accuracy assessment of Cartesian mesh approaches for the Euler equations. *Journal of Computational Physics* **117**, 121–131 (1993).
 - [53] F. COQUEL AND P. L. FLOCH. Convergence of finite difference schemes for conservation laws in several space dimensions: The corrected antidiffusive flux approach. *Mathematics of Computation* **57**, 169–210 (1991).
 - [54] F. COQUEL AND P. L. FLOCH. Convergence of finite difference schemes for conservation laws in several space dimensions: A general theory. *SIAM Journal on Numerical Analysis* **30**, 675–700 (1993).
 - [55] R. COURANT, K. O. FRIEDRICHS, AND H. LEWY. Uber die partiellen Differenzgleichungen der mathematischen Physik. *Mathematische Annalen* **100**, 32–74 (1928).
 - [56] R. COURANT AND D. HILBERT. “Methods of Mathematical Physics”, vol. 2. Interscience Publishers, New York (1962).
 - [57] J. A. CUNGE, F. M. HOLLY, AND A. VERWEY. “Practical Aspects of Computational River Hydraulics”. Pitman Publishing Ltd (1994). Ristampa a cura di University of Iowa.
-

-
- [58] S. F. DAVIS. TVD finite difference schemes and artificial viscosity. ICASE Report 84-20, NASA Langley Research Center (1984). NASA CR-172373.
- [59] S. F. DAVIS. Simplified second-order Godunov-type methods. *SIAM Journal on Scientific Computing* **9**, 445–473 (1988).
- [60] S. F. DAVIS. An interface tracking method for hyperbolic systems of conservation laws. *Applied Numerical Mathematics* **10**, 447–472 (1992).
- [61] R. J. DiPERNA. Measure-valued solutions to conservation laws. *Archive for Rational Mechanics and Analysis* **88**(3), 223–270 (1985).
- [62] B. EINFELDT. On Godunov-type methods for gas dynamics. *SIAM Journal on Numerical Analysis* **25**(2), 294–318 (1988).
- [63] B. ENGQUIST AND A. MAJDA. Absorbing boundary conditions for the numerical simulation of waves. *Mathematics of Computation* **31**, 629–651 (1977).
- [64] B. ENGQUIST AND S. OSHER. One-sided difference approximations for nonlinear conservation laws. *Mathematics of Computation* **36**, 321–352 (1981).
- [65] Eos Systems Inc., Vancouver (Canada). “Photomodeler Pro 4.0”, 21 ed. (Oct. 2000).
- [66] R. J. FENNEMA. “Numerical solution of two-dimensional transient free-surface flows”. PhD thesis, Washington State University (1985).
- [67] C. A. J. FLETCHER. “Computational Techniques for Fluid Dynamics”, vol. 1-2. Springer-Verlag (1988).
- [68] H. FORRER AND R. JELTSCH. A higher-order boundary treatment for Cartesian-grid methods. *Journal of Computational Physics* **140**, 259–277 (1998).
- [69] L. FRACCAROLLO AND H. CAPART. Riemann wave description of erosional dam-break flows. *Journal of Fluid Mechanics* **461**, 183–228 (2002).
- [70] L. FRACCAROLLO AND E. F. TORO. Experimental and computational analysis for two-dimensional dam-break type problems. Quaderni del Dipartimento IDR 2/1994, Università degli Studi di Trento, Dipartimento di Ingegneria Civile e Ambientale (1994).
- [71] L. FRACCAROLLO AND E. F. TORO. Experimental and numerical assessment of the shallow water model for two-dimensional dam-break type problems. *Journal of Hydraulic Research* **33**(6), 843–864 (1995).
- [72] S. S. FRAZÃO, S. MORRIS, AND Y. ZECH. CADAM, Concerted Action on Dam Break Modelling 1996-1999, CD-ROM (2000). Department of Civil and Environmental Engineering, Université catholique de Louvain, Louvain-la-Neuve (Belgium).
- [73] S. S. FRAZÃO, X. SILLEN, AND Y. ZECH. Dam-break flow through sharp bends. Physical Model and 2D Boltzmann Model Validation. In “Proceedings of the First CADAM Workshop”, Wallingford (UK) (2-3 March 1998).
-

- [74] S. S. FRAZÃO, S. SPINOWINE, AND Y. ZECH. Digital-imaging velocity measurements and numerical modelling of a dam-break flow through a 90° bend. In “Proceedings of XXIX IAHR Congress”, pp. 240–245, Beijing (16–21 September 2001). IAHR, Tsinghua University Press.
- [75] S. S. FRAZÃO AND Y. ZECH. Effect of a sharp bend on dam-break flows. In “Proceedings of XXVIII IAHR Congress”, Graz (22–27 August 1999). IAHR, Technical University.
- [76] S. S. FRAZÃO AND Y. ZECH. Dam-break flow experiment: the isolated building test case. IMPACT, 2nd Project Workshop CD-ROM proceedings (Sept. 2002). Mo-I-Rana, Norway.
- [77] P. GARCÍA-NAVARRO AND M. E. VÁZQUEZ-CENDÓN. On numerical treatment of the source terms in the shallow water equations. *Computers & Fluids* **29**, 951–979 (2000).
- [78] C. W. GEAR. “Numerical Initial-Value problems in Ordinary Differential Equations”. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New York (1971).
- [79] A. M. GHARANGIK AND M. H. CHAUDHRY. Numerical simulation of hydraulic jump. *Journal of Hydraulic Engineering* **117**(9), 1195–1211 (1991).
- [80] P. GLAISTER. Approximate Riemann solutions of the shallow water equations. *Journal of Hydraulic Research* **26**, 293–306 (1988).
- [81] P. GLAISTER. Shallow water flow with cylindrical symmetry. *Journal of Hydraulic Research* **29**(2), 219–227 (1991).
- [82] J. GLIMM. Solution in the large for nonlinear hyperbolic systems of equation. *Communications on Pure and Applied Mathematics* **18**, 697–715 (1965).
- [83] J. GLIMM, G. MARSHALL, AND B. PLOHR. A generalized Riemann problem for quasi-one-dimensional gas flows. *Advances in Applied Mathematics* **5**, 1–30 (1984).
- [84] E. GODLEWSKI AND P. A. RAVIART. “Numerical Approximation of Hyperbolic Systems of Conservation Laws”, vol. 118 of “Applied Mathematical Science”. Springer-Verlag, New York (1996).
- [85] S. K. GODUNOV. A difference scheme for numerical computation of discontinuous solution of hydrodynamic equations. *Math. Sbornik* **47**, 271–306 (1959).
- [86] J. B. GOODMAN AND R. J. LEVEQUE. On the accuracy of stable schemes for 2D scalar conservation laws. *Mathematics of Computation* **45**, 15–21 (1985).
- [87] N. GOUTAL AND F. MAUREL, editors. “Proceedings of the Second Workshop on Dam-Break Wave Simulation”, HE 43/97/016/B, Département Laboratoire National d’Hydraulique (1997). Groupe Hydraulique Fluviale Electricité de France.
- [88] J. M. GREENBERG AND A. LEROUX. A well-balanced scheme for the numerical processing of source terms in hyperbolic equations. *SIAM Journal on Numerical Analysis* **33**(1), 1–16 (1996).
- [89] T. HAGSTROM. Radiation boundary conditions for the numerical simulation of waves. *Acta Numer.* **8**, 47–106 (1999).
-

-
- [90] A. HARTEN. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws. *Journal of Computational Physics* **49**, 357–393 (1983).
- [91] A. HARTEN. On a class of high resolution total variation stable finite difference schemes. *SIAM Journal on Numerical Analysis* **21**, 1–23 (1984).
- [92] A. HARTEN, P. D. LAX, AND B. VAN LEER. On upstream differencing and Godunov-type schemes for hyperbolic conservation laws. *SIAM Review* **25(1)**, 35–61 (1983).
- [93] A. HARTEN AND S. OSHER. Uniformly high-order accurate nonoscillatory schemes I. *SIAM Journal on Numerical Analysis* **24(2)**, 279–309 (1987).
- [94] F. M. HENDERSON. “Open Channel Flow”. MacMillan Publishing Co., New York (1966).
- [95] J. M. HERVOUET AND A. PETITJEAN. Malpasset dam-break revisited with two-dimensional computations. *Journal of Hydraulic Research* **37(6)**, 777–788 (1999).
- [96] S. HIBBERD AND D. H. PEREGRINE. Surf and run-up on a beach. *Journal of Fluid Mechanics* **95**, 323–345 (1979).
- [97] R. L. HIGDON. Absorbing boundary conditions for difference approximations to the multi-dimensional wave equation. *Mathematics of Computation* **47**, 437–459 (1986).
- [98] C. HIRSCH. “Numerical Computation of Internal and External Flows”, vol. 2. John Wiley & Sons, Ltd (1990).
- [99] C. HIRSCH. “Numerical Computation of Internal and External Flows”, vol. 1. John Wiley & Sons, Ltd (1990).
- [100] K. A. HOFFMANN. “Computational Fluid Dynamics for Engineers”. Engineering Education Systems, Austin, Texas (1989).
- [101] T. Y. HOU AND P. LEFLOCH. Why non-conservative schemes converge to the wrong solutions: error analysis. *Mathematics of Computation* **62**, 497–530 (1994).
- [102] A. T. IPPEN AND R. T. KNAPP, editors. “Proceedings of the Fifth International Congress of Applied Mechanics”. John Wiley & Sons (1939).
- [103] S. KARNI. Far-field filtering operators for suppression of reflections from artificial boundaries. *SIAM Journal on Numerical Analysis* **33**, 1014–1047 (1996).
- [104] N. D. KATOPODES. “Two-Dimensional Unsteady Flow Through a Breached Dam by the Method of Characteristics”. PhD thesis, University of California (1976).
- [105] N. D. KATOPODES AND T. STRELKOFF. Computing two-dimensional dam-break flood waves. *Journal of Hydraulic Div., ASCE* **104(9)**, 1269–1288 (1978).
- [106] N. KOBAYASHI, A. K. OTTA, AND I. ROY. Wave reflection and run-up on rough slopes. *Journal of Hydraulic Engineering* **113(3)**, 282–298 (1987).
- [107] K. KRAUS. “Fotogrammetria”, vol. 1. Levrotto & Bella, Torino (1994).
-

- [108] D. KRÖNER AND M. ROKYTA. Convergence of upwind finite volume schemes for scalar conservation laws in two dimensions. *SIAM Journal on Numerical Analysis* **31**, 324–343 (1994).
 - [109] J. D. LAMBERT. “Computational Methods in Ordinary Differential Equations”. John Wiley and Sons (1973).
 - [110] P. D. LAX. Weak solutions of non linear hyperbolic equations and their numerical computation. *Communications on Pure and Applied Mathematics* **7**, 159–193 (1954).
 - [111] P. D. LAX. “Hyperbolic Systems of Conservation Laws and the Mathematical Theory of Shock Waves”. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia (1990).
 - [112] P. D. LAX AND B. WENDROFF. Systems of conservation laws. *Communications on Pure and Applied Mathematics* **13**, 217–237 (1960).
 - [113] R. J. LEVEQUE. Intermediate boundary conditions for time-split methods applied to hyperbolic partial differential equations. *Mathematics of Computation* **47**, 37–54 (1986).
 - [114] R. J. LEVEQUE. Cartesian grid methods for flow in irregular regions. In K. W. MORTON AND M. J. BAINES, editors, “Numerical Methods in Fluid Dynamics III”, pp. 375–382. Clarendon Press (1988).
 - [115] R. J. LEVEQUE. High resolution finite volume methods on arbitrary grids via wave propagation. *Journal of Computational Physics* **78**, 36–63 (1988).
 - [116] R. J. LEVEQUE. “Numerical Methods for Conservation Laws”. Birkhauser Verlag (1992).
 - [117] R. J. LEVEQUE. Balancing source terms and flux gradients in high-resolution Godunov-methods: the quasi-steady wave-propagation algorithm. *Journal of Computational Physics* **146**, 346–365 (1998).
 - [118] R. J. LEVEQUE. “Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems”. Cambridge University Press (2002).
 - [119] R. J. LEVEQUE AND K. M. SHYUE. One-dimensional front tracking based on high resolution wave propagation methods. *SIAM Journal on Scientific Computing* **16**, 348–377 (1995).
 - [120] R. J. LEVEQUE AND K. M. SHYUE. Two-dimensional front tracking based on high resolution wave propagation methods. *Journal of Computational Physics* **123**, 354–368 (1996).
 - [121] R. J. LEVEQUE AND H. C. YEE. A study of numerical methods for hyperbolic conservation laws with stiff source terms. *Journal of Computational Physics* **86**, 187–210 (1990).
 - [122] J. LIGHTHILL. “Waves in Fluids”. Cambridge University Press (1978).
 - [123] R. LISKA AND B. WENDROFF. Composite schemes for conservation laws. *SIAM Journal on Numerical Analysis* **35**(6), 2250–2271 (1998).
 - [124] R. LISKA AND B. WENDROFF. Two-dimensional shallow water equations by composite schemes. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* **30**, 461–479 (1999).
 - [125] B. LÉMEHAUTÉ. “An Introduction to Hydrodynamics and Water Waves”. Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin (1976).
-

-
- [126] J. D. LOGAN. “An Introduction to Nonlinear Partial Differential Equations”. John Wiley and Sons (1994).
- [127] F. MACCHIONE AND A. FALCONE. Simulazione di fenomeni di variazione del fondo di un corso d’acqua generati da depositi o da erosione. In CNR-GNDICI, editor, “Atti del XXVII Convegno di Idraulica e Costruzioni Idrauliche”, no. 1, pp. 299–307, Genova (12-15 Settembre 2000). Dipartimento di Ingegneria Ambientale, Università degli Studi di Genova.
- [128] R. W. MACCORMACK AND A. J. PAULLAY. Computational efficiency achieved by time splitting of finite difference operators. AIAA Paper 72-154, San Diego (1972).
- [129] E. MARCHI AND A. RUBATTA. “Meccanica dei Fluidi”. UTET (1981).
- [130] E. MARSHALL AND R. MENDEZ. Computational aspects of the Random Choice Method for Shallow Water Equations. *Journal of Computational Physics* **39**, 1–21 (1981).
- [131] P. W. McDONALD. The computation of transonic flow through two-dimensional gas turbine cascades. ASME Paper 71-GT-89, (1971).
- [132] C. G. MINGHAM AND D. M. CAUSON. High resolution finite-volume scheme method for shallow water flows. *Journal of Hydraulic Engineering* **124**(6), 605–614 (1998).
- [133] T. MOLLS AND M. H. CHAUDHRY. Depth averaged open-channel flow model. *Journal of Hydraulic Engineering* **121**(6), 453–465 (1995).
- [134] T. MOLLS, G. ZHAO, AND F. MOLLS. Friction slope in depth-averaged flow. *Journal of Hydraulic Engineering* **124**(1), 81–85 (1998).
- [135] G. MONEGATO. “Fondamenti di Calcolo Numerico”. CLUT-Torino (1998).
- [136] L. A. MONTHÉ. A study of splitting scheme for hyperbolic conservation laws with source terms. *Journal of Computational and Applied Mathematics* **137**, 1–12 (2001).
- [137] A. T. MOREL, M. FEY, AND J. MAURER. Multidimensional high order method of transport for the shallow water equations. Research Report 96-09, Swiss Federal Institute of Technology (1996).
- [138] K. W. MORTON AND D. F. MAYERS. “Numerical Solution of Partial Differential Equations”. Cambridge University Press (1994).
- [139] B. R. MUNSON, D. F. YOUNG, AND T. H. OKIISHI. “Fundamentals of Fluid Mechanics.” John Wiley & Sons, Inc., fourth ed. (2000).
- [140] M. NUJIC. Efficient implementation of non-oscillatory schemes for the computation of free-surface flows. *Journal of Hydraulic Research* **33**, 101–111 (1995).
- [141] S. OSHER. Riemann solvers, the entropy condition and difference approximations. *SIAM Journal on Numerical Analysis* **24**, 217–235 (1984).
- [142] C. D. PAGANI AND S. SALSA. “Analisi Matematica”, vol. 2. Masson (1993).
- [143] S. V. PATANKAR. “Numerical Heat Transfer and Fluid Flow”. Hemisphere Publishing Corp. (1970).
-

- [144] P. H. PERROUD. The solitary wave reflection along a straight vertical wall at oblique incidence. Technical Report IER 99-3, University of California, Berkeley, USA (1957).
 - [145] R. PEYRET. “Handbook of Computational Fluid Dynamics”. Academic Press (1996).
 - [146] A. QUARTERONI. “Modellistica Numerica per Problemi Differenziali”. Springer Italia, Milano (2003).
 - [147] A. QUARTERONI AND A. VALLI. “Numerical Approximation of Partial Differential Equations”. Springer-Verlag, Heidelberg (1996).
 - [148] J. J. QUIRK. An alternative to unstructured grids for computing gas-dynamic flow around arbitrarily complex 2-dimensional bodies. *Computers & Fluids* **23**, 125–142 (1994).
 - [149] R. D. RICHTMYER AND K. W. MORTON. “Difference Methods for Initial Value Problems”. Interscience-John Wiley & Sons, New York, second ed. (1967).
 - [150] A. RITTER. Die Fortpflanzung der Wasserwellen. *Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure* **36**(33), 947–954 (1892).
 - [151] P. J. ROACHE. “Computational Fluid Dynamics”. Hermosa Publishers (1982).
 - [152] P. L. ROE. Numerical algorithms for the linear wave equation. Technical Report 81047, Royal Aircraft Establishment (1981). Bedford (UK).
 - [153] P. L. ROE. Generalized formulation of TVD Lax-Wendroff schemes. ICASE Report 84-53, NASA Langley Research Center (1984). NASA CR-172478.
 - [154] P. L. ROE. Some contributions to the modelling of discontinuous flows. In “Lectures in Applied Mathematics”, vol. 22 of “Proceedings 1983 AMS-SIAM Summer Seminar on Large Scale Computing in Fluid Mechanics”, pp. 163–193, Philadelphia (1985). AMS-SIAM.
 - [155] P. L. ROE. Upwind differencing schemes for hyperbolic conservation laws with source terms. In C. CARRASO, P. A. RAVIART, AND D. SERRE, editors, “Nonlinear Hyperbolic Problems”, no. 1270 in Lecture Notes in Mathematics, pp. 41–51. Springer (1986).
 - [156] P. A. SLEIGH, P. H. GASKELL, M. BERZINS, AND N. G. WRIGHT. An unstructured finite-volume algorithm for predicting flow in rivers and estuaries. *Computers & Fluids* **27**(4), 479–508 (1998).
 - [157] G. D. SMITH. “Numerical Solution of Partial Differential Equations”. Clarendon Press, Oxford (1978).
 - [158] R. L. STOCKSTILL, R. C. BERGER, AND R. E. NECE. Two-dimensional flow model for trapezoidal high-velocity channels. *Journal of Hydraulic Engineering* **123**(10), 844–852 (1997).
 - [159] J. J. STOKER. The formation of breakers and bore. *Communications on Pure and Applied Mathematics* **1**, 1–87 (1948).
 - [160] J. J. STOKER. “Water Waves”. John Wiley & Sons (1957).
 - [161] J. J. STOKER. “Water Waves. The Mathematical Theory with Application”. John Wiley & Sons (1992).
-

-
- [162] G. STRANG. On the construction and comparison of difference schemes. *SIAM Journal on Numerical Analysis* **5**(3), 506–517 (1968).
- [163] J. C. STRIKWERDA. “Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations”. Wadsworth & Brooks/Cole (1989).
- [164] D. STURLA. “Simulazioni lagrangiane di flussi rapidamente variati nell’approssimazione di acque poco profonde”. Dissertazione per il conseguimento del titolo di Dottore di Ricerca, Università di Pavia, XIV Ciclo (Ottobre 2002).
- [165] P. K. SWEBY. High-resolution schemes using flux limiters for hyperbolic conservation laws. *SIAM Journal on Numerical Analysis* **21**, 995–1011 (1984).
- [166] E. TADMOR. Convenient total variation diminishing conditions for nonlinear difference schemes. *SIAM Journal on Numerical Analysis* **25**, 1002–1014 (1988).
- [167] J. F. THOMPSON. “Numerical Grid Generation”. North-Holland (1982).
- [168] J. F. THOMPSON, F. C. THAMES, AND C. W. MASTIN. Automatic numerical grid generation for body-fitted curvilinear coordinate system for field containing any number of arbitrary two-dimensional bodies. *Journal of Computational Physics* **15**, 299–319 (1974).
- [169] J. F. THOMPSON, J. F. WARSI, AND C. W. MASTIN. “Grid Generation: Foundations and Applications”. North-Holland (1982).
- [170] V. V. TITOV AND C. E. SYNOLAKIS. Modeling of breaking and nonbreaking long-wave evolution and runup using VTCS-2. *Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering* **121**(6), 308–316 (1995).
- [171] E. TITT. An initial-value problem for all hyperbolic partial differential equations of second-order with three independent variables. *Annals of Mathematics* **40** **4**, 862–891 (1939).
- [172] E. F. TORO. A fast Riemann Solver with constant covolume applied to the Random Choice Method. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* **9**, 1145–1164 (1989).
- [173] E. F. TORO. Riemann problem and the WAF method for solving two-dimensional shallow water equations. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* **A338**, 43–68 (1992).
- [174] E. F. TORO. Defects of conservative approaches and adaptive primitive-conservative schemes for computing solutions to hyperbolic conservation laws. Technical Report MMU 9401, Manchester Metropolitan University, Department of Mathematics and Physics, Manchester, UK (1994).
- [175] E. F. TORO. On adaptive primitive-conservative schemes for conservation laws. In M. M. HAFEZ, editor, “Sixth International Symposium on Computational Fluid Dynamics: a Collection of Technical Papers”, no. 3, pp. 1288–1293. Lake Tahoe, Nevada, USA (Sept. 1995).
- [176] E. F. TORO. On Glimm-related schemes for conservation laws. Technical Report MMU 9602, Manchester Metropolitan University, Department of Mathematics and Physics, Manchester, UK (1996).
-

- [177] E. F. TORO. “Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics”. Springer-Verlag (1997).
 - [178] E. F. TORO. Numerica. Numeritek Ltd. (1999). A library of source codes for teaching, research and applications.
 - [179] E. F. TORO. “Shock-Capturing Methods for Free-Surface Shallow Flows”. John Wiley & Sons, Ltd (2001).
 - [180] E. F. TORO AND S. J. BILLET. Centred TVD schemes for hyperbolic conservation laws. Technical Report MMU 9603, Manchester Metropolitan University, Department of Mathematics and Physics, Manchester, UK (1996).
 - [181] E. F. TORO AND R. E. BROWN. The WAF method and splitting procedures for viscous, shocked flows. In K. TAKAYAMA, editor, “Proceedings of the 18th International Symposium on Shock Waves”, pp. 1119–1126. Springer-Verlag, Tohoku University, Sendai, Japan (1992).
 - [182] E. F. TORO AND A. CHAKRABORTY. Development of an approximate Riemann solver for the steady supersonic Euler equations. *The Aeronautical Journal* **98**, 325–339 (1994).
 - [183] E. F. TORO, M. SPRUCE, AND W. SPEARES. Restoration of the contact surface in the HLL-Riemann Solver. *Shock Waves* **4**, 25–34 (1994).
 - [184] E. F. TORO AND M. E. VÁZQUEZ-CENDÓN. Model hyperbolic systems with source terms: exact and numerical solutions. In E. F. TORO, editor, “Godunov Methods: Theory and Applications”. Kluwer Academic/Plenum Publishers (2001).
 - [185] E. TURKEL. Accuracy of schemes with non-uniform meshes for compressible fluid flows. ICASE Report 85-43, NASA Langley Research Center (1985).
 - [186] E. TURKEL, S. YANIV, AND U. LANDAU. Accuracy of schemes for the Euler equation with non-uniform meshes. ICASE Report 85-59, NASA Langley Research Center (1985).
 - [187] A. VALIANI AND V. CALEFFI. Dam break modelling for sediment laden flows. *Proceedings of the 2001 International Symposium on Environmental Hydraulics* (2001).
 - [188] A. VALIANI, V. CALEFFI, AND A. ZANNI. Codice di calcolo ai volumi finiti per le equazioni alle acque basse: applicazione ad un evento di piena sul fiume Toce. In CNR-GNDICI, editor, “Atti del XXVII Convegno di Idraulica e Costruzioni Idrauliche”, no. 1, pp. 367–375, Genova (12-15 Settembre 2000). Dipartimento di Ingegneria Ambientale, Università degli Studi di Genova.
 - [189] A. VALIANI, V. CALEFFI, AND A. ZANNI. Codice di calcolo ai volumi finiti per le equazioni alle acque basse: applicazione al crollo della diga di Malpasset. In CNR-GNDICI, editor, “Atti del XXVII Convegno di Idraulica e Costruzioni Idrauliche”, no. 1, pp. 357–365, Genova (12-15 Settembre 2000). Dipartimento di Ingegneria Ambientale, Università degli Studi di Genova.
 - [190] G. D. VAN ALBADA, B. VAN LEER, AND W. W. ROBERTS. A comparative study of computational methods in cosmic gas dynamics. *Astron. Astrophysics* **108**, 76–84 (1982).
 - [191] B. VAN LEER. Towards the ultimate conservative difference scheme I. The quest for monotonicity. *Springer Lecture Notes in Physics* **18**, 163–168 (1973).
-

-
- [192] B. VAN LEER. Towards the ultimate conservative difference scheme II. Monotonicity and conservation combined in a second order scheme. *Journal of Computational Physics* **14**, 361–370 (1974).
- [193] B. VAN LEER. MUSCL, a new approach to numerical gas dynamics. In 'Computing in Plasma Physics and Astrophysics', Max-Planck-Institut für Plasma Physik, Garching, Germany (1976).
- [194] B. VAN LEER. Towards the ultimate conservative difference scheme III. Upstream-centered finite difference schemes for ideal compressible flow. *Journal of Computational Physics* **23**, 263–275 (1977).
- [195] B. VAN LEER. Towards the ultimate conservative difference scheme IV. A new approach to numerical convection. *Journal of Computational Physics* **23**, 276–299 (1977).
- [196] B. VAN LEER. Towards the ultimate conservative difference scheme V. A second order sequel to Godunov's methods. *Journal of Computational Physics* **32**, 101–136 (1979).
- [197] B. VAN LEER. On the relation between the upwind-differencing schemes of Godunov, Engquist-Osher and Roe. *SIAM J. Sci. Statist. Comput.* **5(1)**, 1–20 (1985).
- [198] V. VENKATAKRISHNAN. Perspective on unstructured grid flow solvers. *AIAA Journal* **34**, 533–547 (1996).
- [199] H. K. VERSTEEG AND W. MALALASEKERA. "An Introduction to Fluid Dynamics. The Finite Volume Method". Longman Scientific & Technical (1995).
- [200] M. VINOKUR. Conservation equations of gasdynamics in curvilinear coordinate systems. *Journal of Computational Physics* **14**, 105–125 (1974).
- [201] M. VINOKUR. An analysis of finite-difference and finite-volume formulations of conservation laws. *Journal of Computational Physics* **81**, 1–52 (1989).
- [202] C. B. VREUGDENHIL. "Numerical Methods for Shallow Water Flow". Kluwer Academic Publishers, The Netherlands (1994).
- [203] M. E. VÁZQUEZ-CENDÓN. Improved treatment of source terms in upwind schemes for the shallow water equations in channels with irregular geometry. *Journal of Computational Physics* **148**, 497–526 (1999).
- [204] T. WEIYAN. "Shallow Water Hydrodynamics". Elsevier, Amsterdam (1992).
- [205] G. B. WHITHAM. "Linear and Non-Linear Waves". John Wiley, New York (1974).
- [206] R. L. WIEGEL. Water wave equivalent of Mach reflection. In "Proceedings of 9th Conference on Coastal Engineering", pp. 82–102. American Society of Civil Engineers (1964).
- [207] N. N. YANENKO. "The Method of Fractional Steps". Springer-Verlag, New York (1971).
- [208] G. YANG, D. M. CAUSON, D. M. INGRAM, R. SAUNDERS, AND P. BATTEN. A Cartesian cut cell method for compressible flows. Part A: static body problems. *The Aeronautical Journal* **101**, 47–56 (1997).
-

- [209] G. YANG, D. M. CAUSON, D. M. INGRAM, R. SAUNDERS, AND P. BATTEN. A Cartesian cut cell method for compressible flows. Part B: moving body problems. *The Aeronautical Journal* **101**, 57–65 (1997).
 - [210] D. D. ZEEUW AND K. G. POWELL. An adaptively refined Cartesian mesh solver for the Euler equations. *Journal of Computational Physics* **104**, 56–68 (1993).
 - [211] W. ZHANG AND T. W. CUNDY. Modeling of two-dimensional overland flow. *Water Resources Research* **25**, 2019–2035 (1989).
 - [212] J. G. ZHOU, D. M. CAUSON, D. M. INGRAM, AND C. G. MINGHAM. Numerical solution of the shallow water equations with discontinuous bed topography. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* **38**, 769–788 (2002).
 - [213] J. G. ZHOU, D. M. CAUSON, C. G. MINGHAM, AND D. M. INGRAM. The surface gradient method for the treatment of source terms in the shallow-water equations. *Journal of Computational Physics* **168**, 1–25 (2001).
 - [214] J. G. ZHOU AND P. K. STANSBY. 2D shallow water model for hydraulic jump. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* **29**(4), 375–387 (1999).
-